

表現論的特殊多面体に対する組合せ論的変異

東京大学大学院数理科学研究科 藤田 直樹 (Naoki Fujita)*

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

概要

本稿は RIMS 共同研究「組合せ論的表現論における最近の進展」での講演内容をまとめたものである。ファノ多様体に対するミラー対称性の文脈から導入された組合せ論的変異の観点から、表現論由来の特殊多面体であるストリング多面体、中島-Zelevinsky 多面体、および FFLV (Feigin-Fourier-Littelman-Vinberg) 多面体間の関係を議論する。本稿の内容は東谷章弘氏との共同研究 [14] に基づく。

1 導入

Newton-Okounkov 凸体は偏極多様体およびその関数体上の付値から作られる凸体であり、Kaveh-Khovanskii [22, 23] および Lazarsfeld-Mustata [27] によって系統的な定義がなされた。その理論を用いることでトーリック退化 (トーリック多様体への平坦な退化) や完全可積分系などの幾何学的データを構成することができる ([2, 18] 参照)。Newton-Okounkov 凸体の組合せ論的性質はそれを定める付値の取り方に大きく依存しており、付値を取り換えた際に対応する Newton-Okounkov 凸体はどのように変わるのかが重要な問題となっている。この問題にファノ多様体に対するミラー対称性の文脈から導入された組合せ論的変異の観点から取り組む。このような研究は別の視点から既に行われており、Ilten は [7] の Appendix において complexity-1 のトーラス群作用を持つ射影多様体の Newton-Okounkov 凸体を考察し、その壁越え現象を組合せ論的変異を用いて実現した。本稿では旗多様体の Newton-Okounkov 凸体に着目する。旗多様体のトーリック退化は表現論と密接な関係があり、以下のような表現論に由来する種々の特殊多面体が旗多様体の Newton-Okounkov 凸体として実現される (ここで付した文献は Newton-Okounkov 凸体としての実現を与えた論文である):

- Berenstein-Littelman-Zelevinsky によるストリング多面体 (Kaveh [21], F.-大矢 [16]),
- 結晶基底の多面体表示における 中島-Zelevinsky 多面体 (F.-内藤 [15], F.-大矢 [16]),
- FFLV 多面体 (Kiritchenko [24, 25], Feigin-Fourier-Littelman [10]).

本稿の目的はこれらの表現論的特殊多面体を組合せ論的変異を用いて関連付けることである。

2 組合せ論的変異

まず組合せ論的変異導入の動機となったファノ多様体のミラー対称性について説明する。 m 変数ローラン多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}]$ に対して、 f の周期 $\pi_f(t)$ を

$$\pi_f(t) := \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^m \int_{|x_1|=\dots=|x_m|=1} \frac{1}{1-tf} \frac{dx_1}{x_1} \dots \frac{dx_m}{x_m} \quad (t \in \mathbb{C}, |t| \ll 1)$$

Date: January 4, 2021

*日本学術振興会特別研究員 (PD)

This work was supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows (No. 19J00123) and by JSPS Grants-in-Aid for Early-Career Scientists (No. 20K14281).

と定義する. このとき f が複素 m 次元ファノ多様体 X のミラーであるとは, f の周期 $\pi_f(t)$ が X の量子周期 \widehat{G}_X と一致することである. ファノ多様体として射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を考える. このとき $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ のミラーとしてローラン多項式 $f := x + y + \frac{1}{xy} \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ を取ることができる. 実際 f の周期は留数定理により

$$\begin{aligned} \pi_f(t) &:= \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \right)^2 \int_{|x|=|y|=1} \frac{1}{1-tf} \frac{dx dy}{x y} \quad (t \in \mathbb{C}, |t| \ll 1) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \text{Const}(f^k) \cdot t^k \\ &= 1 + 6t^3 + 90t^6 + 1680t^9 + 34650t^{12} + 756756t^{15} + \dots \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{(3k)!}{(k!)^3} t^{3k} \end{aligned}$$

と計算され, これは $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の量子周期 $\widehat{G}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{C})}$ と一致している. ここで同じファノ多様体 X に対して, ミラーとなるローラン多項式の取り方は一意ではない. 実際に $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の別のミラーとして, $g := y + \frac{1}{xy} + \frac{2}{y^2} + \frac{x}{y^3}$ を取ることができる. そのため周期が同じローラン多項式たちの間の具体的な関係を与えることは自然な問題である. このような問題に取り組む際にはローラン多項式の変異が有用である. ローラン多項式の変異は周期を保ち, 一つのローラン多項式に変異を施していくことで同じ周期を持つ様々なローラン多項式を構成することができる. 実際上記のローラン多項式 g は f に変異 $x \mapsto \frac{xy}{x+y}, y \mapsto \frac{y^2}{x+y}$ を施すことによって得られる. Akhtar–Coates–Galkin–Kasprzyk [1] はローラン多項式の変異を Newton 多面体の言葉で書き換えることによって, 多面体に対する組合せ論的変異の概念を導入した.

$N \simeq \mathbb{Z}^m$ を階数 m の \mathbb{Z} -格子とし, $M := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ をその双対格子とする. $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ と書く. $P \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を整凸多面体とし, $V(P) \subseteq N$ をその頂点集合とする. $w \in M$ および $h \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H_{w,h} := \{v \in N_{\mathbb{R}} \mid \langle w, v \rangle = h\}$$

とおき, $P_{w,h} := P \cap H_{w,h}$ と記す.

定義 2.1 (Akhtar–Coates–Galkin–Kasprzyk [1, Definition 5]). $P \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を整凸多面体とし, $w \in M$ を primitive ベクトル, $F \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を $H_{w,0}$ 内の整凸多面体とする. P の組合せ論的変異 $\text{mut}_w(P, F)$ が well-defined であるとは, すべての $h \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$ に対して, ある $G_h \subseteq N_{\mathbb{R}}$ が存在し,

$$V(P) \cap H_{w,h} \subseteq G_h + |h|F \subseteq P_{w,h}$$

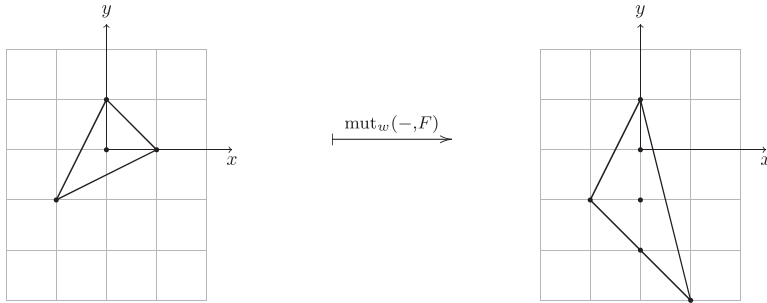
となることである. このとき $\text{mut}_w(P, F)$ は次で定義される整凸多面体である:

$$\text{mut}_w(P, F) := \text{conv} \left(\bigcup_{h \leq -1} G_h \cup \bigcup_{h \geq 0} (P_{w,h} + hF) \right) \subseteq N_{\mathbb{R}}.$$

組合せ論的変異 $\text{mut}_w(P, F)$ は $\{G_h\}_h$ の取り方に依らず, $P = \text{mut}_{-w}(\text{mut}_w(P, F), F)$ が成り立つ ([1, Lemma 2, Proposition 1] 参照).

例 2.2. $m = 2$ とする. このとき $w = (-1, -1) \in M$ および $F = \text{conv}\{(0, 0), (1, -1)\}$ に対して

次が成り立つ.



原点を内部に含む整凸多面体 $P \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を取る. このとき P の極双対 P^* とは次で定義される有理凸多面体のことである:

$$P^* := \{u \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle u, u' \rangle \geq -1 \ (u' \in P)\}.$$

組合せ論的変異には次のようにその双対版が存在する.

命題 2.3 (Akhtar–Coates–Galkin–Kasprzyk [1, Section 3]). 原点を内部に含む整凸多面体 $P \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を取り, $w \in M$ を primitive ベクトル, $F \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を $H_{w,0}$ 内の整凸多面体とする. 区分的線形変換 $\varphi_{w,F}: M_{\mathbb{R}} \rightarrow M_{\mathbb{R}}$ を $u \in M_{\mathbb{R}}$ に対して $\varphi_{w,F}(u) := u - u_{\min} w$ と定義する; ここで $u_{\min} := \min\{\langle u, v \rangle \mid v \in F\}$ である. このとき $\text{mut}_w(P, F)$ が well-defined ならば $\varphi_{w,F}(P^*) = \text{mut}_w(P, F)^*$ が成り立つ.

3 旗多様体の Newton–Okounkov 凸体

この節では旗多様体の場合に Newton–Okounkov 凸体の定義を説明する ([18, 22, 23] 参照). G を \mathbb{C} 上の連結単連結半単純代数群とし, $B \subseteq G$ をボレル部分群, $H \subseteq B$ を極大トーラス, $W := N_G(H)/H$ をワイル群とする; ここで $N_G(H)$ は G における H の正規化群である. 優整ウェイト全体のなす集合を P_+ とし, $\lambda \in P_+$ に対して旗多様体 G/B 上の直線束 \mathcal{L}_λ を $\mathcal{L}_\lambda := (G \times \mathbb{C})/B$ と定める; ここで B の $G \times \mathbb{C}$ への右作用は $g \in G, c \in \mathbb{C}$, および $b \in B$ に対して $(g, c) \cdot b := (gb, \lambda(b)c)$ と定義する. I をディンキン図形の頂点集合とし, $\rho \in P_+$ を $\rho := \sum_{i \in I} \varpi_i$ と定める; ここで $\varpi_i, i \in I$, は基本ウェイトである.

命題 3.1 ([6, Proposition 2.2.7 (ii)] 参照). 直線束 $\mathcal{L}_{2\rho}$ は G/B の反標準直線束と同型である.

$\lambda \in P_+$ に対して最高ウェイト λ の既約最高ウェイト G -加群を $V(\lambda)$ とし, その最高ウェイトベクトルを v_λ とする. このとき Borel–Weil の定理により大域切断のなす空間 $H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ は双対加群 $V(\lambda)^* := \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V(\lambda), \mathbb{C})$ と同型な G -加群である ([26, Corollary 8.1.26] 参照). 旗多様体 G/B の次元を m とし, トーラス $(\mathbb{C}^\times)^m$ から G/B への双有理写像を固定する. このとき $(\mathbb{C}^\times)^m$ の座標関数を t_1, \dots, t_m とすると, 関数体 $\mathbb{C}(G/B)$ は有理関数体 $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_m)$ と同一視される.

定義 3.2 ([21, Example 1.5] 参照). \mathbb{Z}^m 上の全順序 \leq であって加法と整合的であるものを固定する; つまり $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}^m$ に対して $a \leq b$ かつ $a' \leq b'$ ならば $a + a' \leq b + b'$ である. この全順序 \leq

を用いて t_1, \dots, t_m を変数とするローラン単項式たちの間の順序 \leq を $(a_1, \dots, a_m) \leq (a'_1, \dots, a'_m)$ のとき $t_1^{a_1} \dots t_m^{a_m} \leq t_1^{a'_1} \dots t_m^{a'_m}$ とすることにより定義する. このとき付値 $v_{\leq}^{\text{low}}: \mathbb{C}(G/B) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^m$ を次のように定める: $f, g \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \setminus \{0\}$ に対して $v_{\leq}^{\text{low}}(f/g) := v_{\leq}^{\text{low}}(f) - v_{\leq}^{\text{low}}(g)$ とし,

$$f = ct_1^{a_1} \dots t_m^{a_m} + (\text{higher terms}) \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_m] \setminus \{0\}$$

に対して $v_{\leq}^{\text{low}}(f) := (a_1, \dots, a_m)$ とする; ここで $c \in \mathbb{C}^\times$ であり, “(higher terms)” は上で定めた全順序 \leq に関して $t_1^{a_1} \dots t_m^{a_m}$ より大きい単項式たちの線形結合である. この付値 v_{\leq}^{low} を \leq に関する **lowest term valuation** という.

定義 3.3 ([18, Section 3.1.1] および [23, Definition 1.10] 参照). $\lambda \in P_+$ とし, $\tau \in H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ を 0 でない大域切断とする. 半群 $S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau) \subseteq \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^m$ を

$$S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} \{(k, v_{\leq}^{\text{low}}(\sigma/\tau^k)) \mid \sigma \in H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda^{\otimes k}) \setminus \{0\}\}$$

と定義する. さらにこの $S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau)$ を含む最小の実閉錐を $C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^m$ とし, 集合 $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau) \subseteq \mathbb{R}^m$ を

$$\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \mid (1, \mathbf{a}) \in C(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau)\}$$

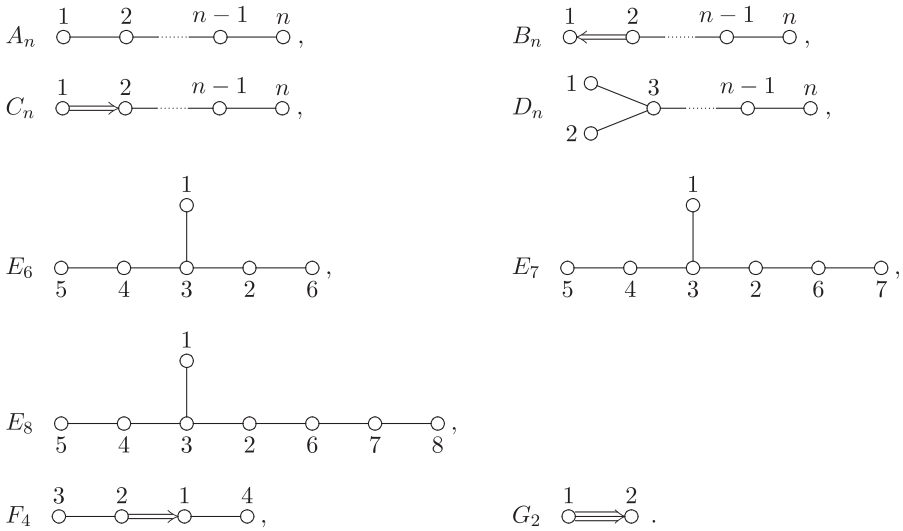
と定める. この集合 $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau)$ を **Newton–Okounkov 凸体** という.

Steinert [32] は反標準直線束 $\mathcal{L}_{2\rho}$ に関する Newton–Okounkov 凸体について次を証明した.

定理 3.4 (Steinert [32, Sections 4, 6]). 半群 $S(G/B, \mathcal{L}_{2\rho}, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau)$ が有限生成かつ飽和であると仮定する. このとき Newton–Okounkov 凸体 $\Delta := \Delta(G/B, \mathcal{L}_{2\rho}, v_{\leq}^{\text{low}}, \tau)$ は内部に格子点を唯一つ含む. さらにこの格子点を \mathbf{a} とおくと, $\Delta - \mathbf{a}$ の極双対 $\Delta^\vee := (\Delta - \mathbf{a})^*$ は整凸多面体である.

$w \in W$ の簡約語全体の集合を $R(w)$ とする. W の最長元を w_0 と書き, $\mathbf{i} \in R(w_0)$ および $\lambda \in P_+$ に対応するストリング多面体を $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ とする ([5, Section 3] および [28, Section 1] 参照).

例 3.5. G が階数 n の単純代数群であると仮定し, ディンキン図形の頂点集合 I を以下のように集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ と同一視する:



G のリー型を X_n とし、簡約語 $i_{X_n} \in R(w_0)$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned} i_{A_n} &:= (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \in I^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\ i_{B_n} &:= (1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, \dots, n, n-1, \dots, 2, 1, 2, \dots, n-1, n) \in I^{n^2}, \\ i_{C_n} &:= (1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, \dots, n, n-1, \dots, 2, 1, 2, \dots, n-1, n) \in I^{n^2}, \\ i_{D_n} &:= (1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, n, n-1, \dots, 3, 1, 2, 3, \dots, n-1, n) \in I^{n(n-1)}, \\ i_{E_6} &:= (i_{D_5}, 6, 2, 3, 1, 4, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 6, 2, 3, 4, 5) \in I^{36}, \\ i_{E_7} &:= (i_{E_6}, 7, 6, 2, 3, 1, 4, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 6, 7) \in I^{63}, \\ i_{E_8} &:= (i_{E_7}, 8, 7, 6, 2, 3, 1, 4, 5, 3, 4, 2, 3, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 7, \\ &\quad 6, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 6, 7, 8, 7, 6, 2, 3, 1, 4, 5, 3, 4, \\ &\quad 2, 3, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 2, 3, 1, 4, 3, 2, 6, 7, 8) \in I^{120}, \\ i_{F_4} &:= (1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 1, 4) \in I^{24}, \\ i_{G_2} &:= (1, 2, 1, 2, 1, 2) \in I^6. \end{aligned}$$

このとき Littelmann [28] は対応するストリング多面体 $\Delta_{i_{X_n}}(\lambda)$ を記述する明示的なアフィン不等式系を構成した. $\lambda = 2\rho$ に対して $\Delta_{i_{X_n}}(2\rho)$ の内部にある唯一の格子点を \mathbf{a}_{X_n} とする. このとき Littelmann の記述から \mathbf{a}_{X_n} は以下のように計算される:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{A_n} &= (1, 2, 1, 3, 2, 1, \dots, n, n-1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\ \mathbf{a}_{B_n} &= (1, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 1, \dots, 2n-2, 2n-3, \dots, n+1, n, 2n-1, n-1, n-2, \dots, 2, 1) \in \mathbb{Z}^{n^2}, \\ \mathbf{a}_{C_n} &= (1, 3, 2, 1, 5, 4, 3, 2, 1, \dots, 2n-1, 2n-2, \dots, 2, 1) \in \mathbb{Z}^{n^2}, \\ \mathbf{a}_{D_n} &= (1, 1, 3, 2, 2, 1, 5, 4, 3, 3, 2, 1, \dots, 2n-3, 2n-4, \dots, n, n-1, n-1, n-2, \dots, 2, 1) \in \mathbb{Z}^{n(n-1)}, \\ \mathbf{a}_{E_6} &= (\mathbf{a}_{D_5}, 11, 10, 9, 8, 8, 7, 7, 6, 6, 5, 4, 5, 4, 3, 2, 1) \in \mathbb{Z}^{36}, \\ \mathbf{a}_{E_7} &= (\mathbf{a}_{E_6}, 17, 16, 15, 14, 13, 13, 12, 12, 11, 11, 10, 9, 10, 9, 8, 7, 6, 9, 8, 7, 6, 5, 5, 4, 3, 2, 1) \in \mathbb{Z}^{63}, \\ \mathbf{a}_{E_8} &= (\mathbf{a}_{E_7}, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 23, 22, 22, 21, 21, 20, 19, 20, 19, 18, 17, 16, 19, \\ &\quad 18, 17, 16, 15, 15, 14, 13, 12, 11, 29, 18, 17, 16, 15, 14, 14, 13, 13, 12, \\ &\quad 12, 11, 10, 11, 10, 9, 8, 7, 10, 9, 8, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1) \in \mathbb{Z}^{120}, \\ \mathbf{a}_{F_4} &= (1, 2, 3, 1, 4, 3, 5, 2, 1, 10, 9, 8, 7, 7, 6, 5, 11, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1) \in \mathbb{Z}^{24}, \\ \mathbf{a}_{G_2} &= (1, 4, 3, 5, 2, 1) \in \mathbb{Z}^6. \end{aligned}$$

4 クラスター構造から定まる Newton–Okounkov 凸体

まず \mathcal{A} -クラスター多様体の定義を説明する ([11, 12, 13] 参照). クラスター多様体は seed と呼ばれるデータごとに与えられる代数的トーラスを変異 (mutation) という双有理変換によって貼り合わせることで構成される. J を有限集合とし、部分集合 $J_{\text{uf}} \subseteq J$ を固定する. $\mathcal{F} = \mathbb{C}(z_j \mid j \in J)$ を $|J|$ 変数の有理関数体とすると、 \mathcal{F} の seed $\mathbf{s} = (\mathbf{A}, \varepsilon)$ とは \mathcal{F} の自由生成系 $\mathbf{A} = (A_j)_{j \in J}$ および行列 $\varepsilon = (\varepsilon_{i,j})_{i \in J_{\text{uf}}, j \in J} \in \text{Mat}_{J_{\text{uf}} \times J}(\mathbb{Z})$ の組であって、 ε の $J_{\text{uf}} \times J_{\text{uf}}$ -部分行列 ε° が歪

対称化可能であるようなものことである. $a \in \mathbb{R}$ に対して $[a]_+ := \max\{a, 0\}$ とおく. seed $\mathbf{s} = (\mathbf{A}, \varepsilon) = ((A_j)_{j \in J}, (\varepsilon_{i,j})_{i \in J_{\text{uf}}, j \in J})$ および $k \in J_{\text{uf}}$ に対して, 変異 $\mu_k(\mathbf{s}) = (\mu_k(\mathbf{A}), \mu_k(\varepsilon)) = ((A'_j)_{j \in J}, (\varepsilon'_{i,j})_{i \in J_{\text{uf}}, j \in J})$ を以下のように定義する: $i \in J_{\text{uf}}$ および $j \in J$ に対して

$$\varepsilon'_{i,j} := \begin{cases} -\varepsilon_{i,j} & (i = k \text{ または } j = k \text{ のとき}), \\ \varepsilon_{i,j} + \text{sgn}(\varepsilon_{k,j})[\varepsilon_{i,k}\varepsilon_{k,j}]_+ & (\text{その他のとき}), \end{cases}$$

$$A'_j := \begin{cases} \frac{\prod_{l \in J} A_l^{[\varepsilon_{k,l}]_+} + \prod_{l \in J} A_l^{[-\varepsilon_{k,l}]_+}}{A_k} & (j = k \text{ のとき}), \\ A_j & (\text{その他のとき}). \end{cases} \quad (4.1)$$

\mathbb{T} を $|J_{\text{uf}}|$ -正則な木とし, 同じ頂点を共有する辺が異なるラベルを持つように \mathbb{T} の辺を J_{uf} の元でラベル付ける. このとき seed の族 $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ が **クラスター・パターン** であるとは, \mathbb{T} において $t \xrightarrow{k} t'$ のとき $\mu_k(\mathbf{s}_t) = \mathbf{s}_{t'}$ となることである. クラスター・パターン $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を固定し, $\mathbf{s}_t = (\mathbf{A}_t, \varepsilon_t) = ((A_{j;t})_{j \in J}, (\varepsilon_{i,j;t})_{i \in J_{\text{uf}}, j \in J})$ と書く. 代数的トーラス $\mathcal{A}_t := \text{Spec}(\mathbb{C}[A_{j;t}^{\pm 1} \mid j \in J])$ を貼り合わせるにより, スキーム

$$\mathcal{A} = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{A}_t = \bigcup_{t \in \mathbb{T}} \text{Spec}(\mathbb{C}[A_{j;t}^{\pm 1} \mid j \in J])$$

を得る; ここで貼り合わせ写像は (4.1) が定める双有理変換とする. \mathcal{F} の部分 \mathbb{C} -代数 $\mathbb{C}[\mathcal{A}] = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathbb{C}[A_{j;t}^{\pm 1} \mid j \in J] \subseteq \mathcal{F}$ を **upper クラスター代数** という ([4, Definition 1.6] 参照).

$\mathcal{S} = \{(\mathbf{A}_t, \varepsilon_t)\}_{t \in \mathbb{T}}$ をクラスター・パターンとし, $i \in J_{\text{uf}}$ に対して $\widehat{X}_{i;t} := \prod_{j \in J} A_{j;t}^{\varepsilon_{i,j}^{(t)}}$ とおく ([13, Section 3] 参照). すべての $t \in \mathbb{T}$ に対して ε_t の階数が $|J_{\text{uf}}|$ であることを仮定する.

定義 4.1 (Qin [29, Definition 3.1.1]). $t \in \mathbb{T}$ を固定する. \mathbb{Z}^J 上の半順序 \preceq_{ε_t} を, ある $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_{\text{uf}}}$ に対して $\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{v}\varepsilon_t$ となるとき $\mathbf{a} \preceq_{\varepsilon_t} \mathbf{a}'$ と定義する; ただし \mathbb{Z}^J や $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_{\text{uf}}}$ の元は行ベクトルとみなす. これを ε_t に付随する **dominance order** という.

定義 4.2 (Fomin–Zelevinsky [13], Qin [29]). $t \in \mathbb{T}$ に対してローラン多項式 $f \in \mathbb{C}[A_{j;t}^{\pm 1} \mid j \in J]$ が **weakly pointed** であるとは, ある $(g_j)_{j \in J} \in \mathbb{Z}^J$ および $c_0 \neq 0$ となる $\{c_{\mathbf{a}} \in \mathbb{C} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_{\text{uf}}}\}$ が存在して

$$f = \left(\prod_{j \in J} A_{j;t}^{g_j} \right) \left(\sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{J_{\text{uf}}}} c_{\mathbf{a}} \prod_{j \in J_{\text{uf}}} \widehat{X}_{j;t}^{a_j} \right)$$

となることである; ただし $\mathbf{a} = (a_j)_{j \in J_{\text{uf}}}$ である. このとき $g_t(f) := (g_j)_{j \in J} \in \mathbb{Z}^J$ と書き, これを f の **拡大 g -ベクトル** という ([13, Section 6] 参照). さらに $c_0 = 1$ となるとき f は **pointed** であるという ([29, Definition 3.1.4] 参照).

この拡大 g -ベクトルの細分として関数体 $\mathbb{C}(\mathcal{A})$ 上の付値を定義する.

定義 4.3 (F.-大矢 [17, Definition 3.8]). $t \in \mathbb{T}$ を固定し, $\preceq_{\varepsilon_t}^{\text{op}}$ を \preceq_{ε_t} の逆順序とする. $\preceq_{\varepsilon_t}^{\text{op}}$ を細分する \mathbb{Z}^J 上の全順序 \leq_t を固定すると, これは $A_{j;t}$, $j \in J$, に関するローラン単項式たちの間の全順序を誘導する. このとき付値 $v_t: \mathbb{C}(\mathcal{A}) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}^J$ を対応する lowest term valuation $v_{\leq_t}^{\text{low}}$ として定義する (定義 3.2 参照).

$t \in \mathbb{T}$ に対して $f \in \mathbb{C}[A_{j;t}^{\pm 1} \mid j \in J]$ が weakly pointed であるとき, $v_t(f) = g_t(f)$ が成り立つ. 旗多様体の場合に付値 v_t に関する Newton–Okounkov 凸体を考察する. $U^- \subseteq G$ を opposite ボレル部分群 B^- の冪単根基とする. $w \in W$ に対して $U_w^- := U^- \cap B\tilde{w}B$ とおき, これを冪単胞体という; ここで $\tilde{w} \in N_G(H)$ は $w \in W = N_G(H)/H$ の代表元である. Berenstein–Fomin–Zelevinsky [4] は座標環 $\mathbb{C}[U_w^-]$ に upper クラスタ代数の構造が入ることを証明した. より詳しく述べると簡約語 $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m) \in R(w)$ から一般化小行列式を用いて seed \mathbf{s}_i が定義され, 対応する upper クラスタ代数が $\mathbb{C}[U_w^-]$ と同型になる; ここで集合 J は \mathbf{i} の添え字集合 $\{1, \dots, m\}$ と同一視される. また $\mathbf{s}_i, i \in R(w)$, たちは互いに変異の列によって移り合い, 一つのクラスタ・パターン $\mathcal{S} = \{\mathbf{s}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を定めている. $\mathbf{s}_t = \mathbf{s}_i$ となる $t \in \mathbb{T}$ を固定し, これを t_i と書く. このクラスタ構造により U_w^- は対応するクラスタ多様体 \mathcal{A} と双有理同値であり, 関数体の同型 $\mathbb{C}(U_w^-) \simeq \mathbb{C}(\mathcal{A})$ を誘導する. 柏原–Kim [20] は冪単部分群の量子座標環の monoidal categorification (Kang–柏原–Kim–Oh [19]) を応用して, カルタン行列が対称である場合に $\mathbb{C}[U_w^-]$ の上側大域基底 (= 双対標準基底) \mathbf{B}_w^{up} の拡大 g -ベクトルの理論を発展させた. Qin [30] はカルタン行列が対称化可能である場合に \mathbf{B}_w^{up} の拡大 g -ベクトルを調べたことを証明した.

定理 4.4 (柏原–Kim [20, Lemma 3.6, Theorem 3.16, Corollary 3.17], Qin [30]). すべての $w \in W$ および $t \in \mathbb{T}$ に対して以下が成り立つ.

- (1) すべての $b \in \mathbf{B}_w^{\text{up}}$ は t に対して pointed である. 特に拡大 g -ベクトル $g_t(b)$ が定まる.
- (2) \mathbb{T} において $t \xrightarrow{k} t'$ のとき, すべての $b \in \mathbf{B}_w^{\text{up}}$ に対して $g_{t'}(b) = \mu_k^T(g_t(b))$ が成り立つ; ここで $\mu_k^T: \mathbb{R}^J \rightarrow \mathbb{R}^J$, $(g_j)_{j \in J} \mapsto (g'_j)_{j \in J}$, は

$$g'_j := \begin{cases} g_j + \max\{\varepsilon_{k,j}^{(t)}, 0\}g_k - \varepsilon_{k,j}^{(t)} \min\{g_k, 0\} & (j \neq k \text{ のとき}), \\ -g_k & (j = k \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義される区分的線形写像であり, トロピカル変異と呼ばれる.

$\tau_\lambda \in H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$ を G -加群としての最低ウェイトベクトルとし, $s_i \in W, i \in I$, を単純鏡映, $h_i \in \text{Lie}(H), i \in I$, を余ルートとする. $w = w_0$ の場合を考える. 自然な射影 $G \rightarrow G/B$ は開埋め込み $U_{w_0}^- \hookrightarrow G/B$ を誘導するため, 各 $t \in \mathbb{T}$ に対して $\mathbb{C}(G/B) \simeq \mathbb{C}(U_{w_0}^-)$ 上の付値 v_t を得る. 定理 4.4 (1) より, すべての $t \in \mathbb{T}$ および $b \in \mathbf{B}_{w_0}^{\text{up}}$ に対して $v_t(b) = g_t(b)$ が成り立つ. 筆者は大矢氏との共同研究 [17] において, $\mathbf{B}_{w_0}^{\text{up}}$ のこの性質から Newton–Okounkov 凸体 $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_t, \tau_\lambda)$ を調べたことを証明した.

定理 4.5 (F.-大矢 [17]). すべての $\lambda \in P_+, t \in \mathbb{T}$, および $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m) \in R(w_0)$ に対して以下が成り立つ.

- (1) 凸体 $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_t, \tau_\lambda)$ は $\preceq_{\varepsilon_t}^{\text{op}}$ を細分する全順序 \leq_t の取り方に依らない.
- (2) 半群 $S(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_t, \tau_\lambda)$ は有限生成かつ飽和である. 特に凸体 $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_t, \tau_\lambda)$ は有理凸多面体である.
- (3) \mathcal{L}_λ が非常に豊富な直線束のとき, G/B はトーリック多様体 $X(\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_t, \tau_\lambda))$ へ平坦に退化する.
- (4) \mathbb{T} において $t \xrightarrow{k} t'$ のとき, $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{t'}, \tau_\lambda) = \mu_k^T(\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_t, \tau_\lambda))$ が成り立つ.

- (5) t_i に対応する Newton–Okounkov 凸体 $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{t_i}, \tau_\lambda)$ はストリング多面体 $\Delta_i(\lambda)$ とユニモジュラー同値である. 具体的には $\Delta_i(\lambda) = \Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{t_i}, \tau_\lambda) M_i$ が成り立つ; ここで $M_i = (d_{s,t})_{s,t \in J} \in \text{Mat}_{J \times J}(\mathbb{Z})$ は

$$d_{s,t} := \begin{cases} \langle s_{i_{t+1}} \cdots s_{i_s} \varpi_{i_s}, h_{i_t} \rangle & (t \leq s \text{ のとき}), \\ 0 & (t > s \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる.

- (6) ある $t_i^{\text{mut}} \in \mathbb{T}$ が存在し, 対応する Newton–Okounkov 凸体 $\Delta(G/B, \mathcal{L}_\lambda, v_{t_i^{\text{mut}}}, \tau_\lambda)$ は中島–Zelevinsky 多面体 $\tilde{\Delta}_i(\lambda)$ とユニモジュラー同値である.

定理 3.4, 4.5 (2) より次が従う.

系 4.6. すべての $t \in \mathbb{T}$ に対して Newton–Okounkov 凸体 $\Delta_t := \Delta(G/B, \mathcal{L}_{2\rho}, v_t, \tau_{2\rho})$ は内部に格子点を唯一つ含む. さらにこの格子点を \mathbf{a}_t とおくと, $\Delta_t - \mathbf{a}_t$ の極双対 $\Delta_t^\vee := (\Delta_t - \mathbf{a}_t)^*$ は整凸多面体である.

格子点 \mathbf{a}_t は次のように具体的に計算できる.

命題 4.7. すべての $t \in \mathbb{T}$ に対して, $\Delta(G/B, \mathcal{L}_{2\rho}, v_t, \tau_{2\rho})$ の内部にある唯一の格子点 $\mathbf{a}_t = (a_j)_{j \in J}$ は次で与えられる:

$$a_j = \begin{cases} 0 & (j \in J_{\text{uf}} \text{ のとき}), \\ 1 & (j \in J \setminus J_{\text{uf}} \text{ のとき}). \end{cases}$$

Proof. 半単純リー代数 \mathfrak{g} は単純リー代数の有限個の直和と同型であるため, 例 3.5 に登場した簡約語 i_{X_n} たちを並べることで簡約語 $i_{\mathfrak{g}} \in R(w_0)$ を構成することができる. 例 3.5 における \mathbf{a}_{X_n} の計算および定理 4.5 (5) から seed $\mathbf{s}_{i_{\mathfrak{g}}}$ に対する主張が従う. \mathbb{T} における $t_{i_{\mathfrak{g}}}$ からの距離に関する帰納法で証明する. \mathbb{T} において $t \stackrel{k}{\leftarrow} t'$ であるとし, seed \mathbf{s}_t に対して主張が成り立つと仮定する. このとき \mathbf{a}_t はトロピカル変異 μ_k^T で不変であり, μ_k^T が同相であることから $\mu_k^T(\mathbf{a}_t)$ は $\mu_k^T(\Delta(G/B, \mathcal{L}_{2\rho}, v_t, \tau_{2\rho})) = \Delta(G/B, \mathcal{L}_{2\rho}, v_{t'}, \tau_{2\rho})$ の内部に含まれている. 従って $\mathbf{a}_{t'} = \mathbf{a}_t$ が成り立ち, 求める主張が示される. \square

定理 4.5 (5) および命題 4.7 により, スtring多面体 $\Delta_i(2\rho)$ の内部にある唯一の格子点は次のように計算される.

系 4.8. $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m) \in R(w_0)$ とする. このときストリング多面体 $\Delta_i(2\rho)$ の内部にある唯一の格子点 $\mathbf{a}_i = (a_j)_j$ は次で与えられる:

$$a_j = \sum_{k \in J \setminus J_{\text{uf}}; j \leq k} \langle s_{i_{j+1}} \cdots s_{i_k} \varpi_{i_k}, h_{i_j} \rangle.$$

トロピカル変異 μ_k^T は命題 2.3 における $\varphi_{w,F}$ とユニモジュラー変換の合成として記述できる. 命題 4.7 を用いてこの極双対を考えることで次が示される.

定理 4.9. (1) 双対多面体の族 $\{\Delta(G/B, \mathcal{L}_{2\rho}, v_t, \tau_{2\rho})^\vee\}_{t \in \mathbb{T}}$ は互いに (ユニモジュラー変換を除いて) 組合せ論的変異の繰り返しで移り合う.

- (2) 特にストリング多面体および中島–Zelevinsky 多面体の双対多面体の族 $\{\Delta_i(2\rho)^\vee \mid \mathbf{i} \in R(w_0)\} \cup \{\tilde{\Delta}_i(2\rho)^\vee \mid \mathbf{i} \in R(w_0)\}$ も互いに (ユニモジュラー変換を除いて) 組合せ論的変異の繰り返しで移り合う.

5 FFLV 多面体との関係

この節では以上の話と FFLV 多面体を結び付ける。FFLV 多面体は $V(\lambda)$ の PBW (Poincaré–Birkhoff–Witt) フィルトレーションの構造を調べるために Feigin–Fourier–Littelmann [8, 9] および Vinberg [33] によって導入された概念である。 $G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ または $G = Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の場合を考える。Littelmann [28] は例 3.5 に登場した簡約語 i_{A_n} および i_{C_n} に関するストリング多面体がそれぞれのリー型の Gelfand–Tsetlin 多面体とユニモジュラー同値であることを証明した。そのため Gelfand–Tsetlin 多面体と FFLV 多面体を組合せ論的変異で繋げればよい。 (Π, \preceq) を半順序集合とし、部分集合 $\Pi^* \subseteq \Pi$ を取る。 Π^* は Π のすべての極大元および極小元を含むと仮定し、 \mathbb{R}^{Π^*} の元 $\lambda = (\lambda_a)_{a \in \Pi^*}$ であって $a \preceq b$ となるすべての $a, b \in \Pi^*$ に対して $\lambda_a \leq \lambda_b$ となるものを取る。このとき組 (Π, Π^*, λ) を **marked poset** という。

定義 5.1 (Ardila–Bliem–Salazar [3, Definition 1.2]). marked poset (Π, Π^*, λ) に対して、

$$\mathcal{O}(\Pi, \Pi^*, \lambda) := \{(x_p)_{p \in \Pi \setminus \Pi^*} \in \mathbb{R}^{\Pi \setminus \Pi^*} \mid x_p \leq x_q (p \preceq q), \lambda_a \leq x_p (a \preceq p), x_p \leq \lambda_a (p \preceq a)\},$$

$$\mathcal{C}(\Pi, \Pi^*, \lambda) := \{(x_p)_{p \in \Pi \setminus \Pi^*} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{\Pi \setminus \Pi^*} \mid \sum_{i=1}^k x_{p_i} \leq \lambda_b - \lambda_a (a \prec p_1 \prec \dots \prec p_k \prec b \text{ のとき})\}$$

とおく。これらの多面体をそれぞれ **marked 順序多面体** および **marked 鎖多面体** という。

$\lambda \in \mathbb{Z}^{\Pi^*}$ のとき、marked 順序多面体 $\mathcal{O}(\Pi, \Pi^*, \lambda)$ および marked 鎖多面体 $\mathcal{C}(\Pi, \Pi^*, \lambda)$ はどちらも整凸多面体である ([3, Lemma 3.5] 参照)。

例 5.2. marked poset (Π, Π^*, λ) を図 1 のように定める。このとき marked 順序多面体 $\mathcal{O}(\Pi, \Pi^*, \lambda)$ および marked 鎖多面体 $\mathcal{C}(\Pi, \Pi^*, \lambda)$ は以下で与えられる：

$$\mathcal{O}(\Pi, \Pi^*, \lambda) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda_2 \leq x \leq \lambda_4, \lambda_1 \leq z \leq \min\{x, y\}, \lambda_3 \leq y \leq \lambda_4\},$$

$$\mathcal{C}(\Pi, \Pi^*, \lambda) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \mid x \leq \lambda_4 - \lambda_2, x + z \leq \lambda_4 - \lambda_1, y + z \leq \lambda_4 - \lambda_1, y \leq \lambda_4 - \lambda_3\}.$$

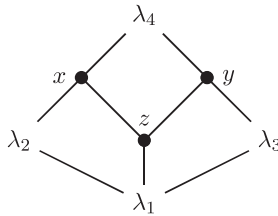


図 1: 例 5.2 における marked poset のハッセ図。

区分的アフィン写像 $\phi_{(\Pi, \Pi^*, \lambda)}: \mathbb{R}^{\Pi \setminus \Pi^*} \rightarrow \mathbb{R}^{\Pi \setminus \Pi^*}, (x_p)_p \mapsto (x'_p)_p$, を $p \in \Pi \setminus \Pi^*$ に対して

$$x'_p := \min(\{x_p - x_{p'} \mid p' \preceq p, p' \in \Pi \setminus \Pi^*\} \cup \{x_p - \lambda_{p'} \mid p' \preceq p, p' \in \Pi^*\})$$

と定義する；ここで $q \preceq p$ は $q \prec p$ であり $q \prec q' \prec p$ となる $q' \in \Pi \setminus \{p, q\}$ が存在しないことを表す。

定理 5.3 (Ardila–Bliem–Salazar [3, Theorem 3.4]). 区分的アフィン写像 $\phi_{(\Pi, \Pi^*, \lambda)}$ は $\mathcal{O}(\Pi, \Pi^*, \lambda)$ から $\mathcal{C}(\Pi, \Pi^*, \lambda)$ への全単射となっている。これを **transfer map** という。

注意 5.4. 順序多面体や鎖多面体およびそれらの間の transfer map はもともと Stanley [31] によって marking (Π^*, λ) の無い通常の半順序集合 (Π, \preceq) に対して導入された概念であり, 上記の理論はその marked poset 版となっている。

半順序集合 (Π, \preceq) が **pure** であると仮定する。つまり (Π, \preceq) のハッセ図における極大鎖がすべて同じ長さを持つと仮定する。このとき階数 $r: \Pi \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を Π における極小元から $p \in \Pi$ までの鎖の長さを $r(p)$ とすることにより定義する。 (Π, Π^*) の marking λ^r を $a \in \Pi^*$ に対して $(\lambda^r)_a := r(a)$ と定める。このとき $\mathcal{O}(\Pi, \Pi^*, \lambda^r)$ および $\mathcal{C}(\Pi, \Pi^*, \lambda^r)$ はどちらも内部に格子点を唯一つ含む。各 $p \in \Pi \setminus \Pi^*$ に対して

- $w_p := -e_p,$
- $F_p := \text{conv}(\{-e_{p'} \mid p' \prec p, p' \in \Pi \setminus \Pi^*\} \cup \{0 \mid p' \prec p, p' \in \Pi^*\})$

とおく; ここで $e_q \in \mathbb{R}^{\Pi \setminus \Pi^*}$ を $q \in \Pi \setminus \Pi^*$ に対応する単位ベクトルとする。

定理 5.5. $\Pi \setminus \Pi^*$ の元を $p_i \prec p_j$ ならば $i > j$ となるように $\Pi \setminus \Pi^* = \{p_1, \dots, p_N\}$ と並べる。このとき transfer map $\phi_{(\Pi, \Pi^*, \lambda)}$ は適切な平行移動の下で $\varphi_{w_{p_N}, F_{p_N}} \circ \dots \circ \varphi_{w_{p_1}, F_{p_1}}$ と一致し, 次が成り立つ:

$$\mathcal{C}(\Pi, \Pi^*, \lambda^r)^\vee = \text{mut}_{w_{p_N}}(-, F_{p_N}) \circ \dots \circ \text{mut}_{w_{p_1}}(-, F_{p_1})(\mathcal{O}(\Pi, \Pi^*, \lambda^r)^\vee).$$

$G = SL_{n+1}(\mathbb{C})$ とし, $\lambda \in P_+$ を取る。各 $1 \leq k \leq n$ に対して $\lambda_{\geq k} := \sum_{k \leq \ell \leq n} \langle \lambda, h_\ell \rangle$ とおき, marked poset (Π, Π^*, λ) を図 2 のように取る。このとき定義により marked 順序多面体およ

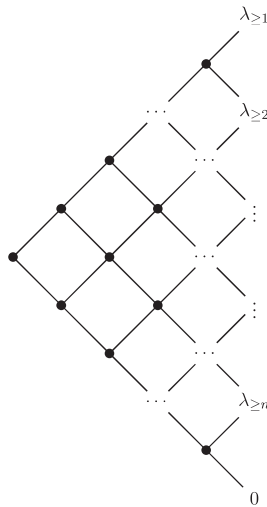


図 2: A_n 型の Gelfand–Tsetlin marked poset のハッセ図。

び marked 鎖多面体はそれぞれ A_n 型の Gelfand–Tsetlin 多面体 $GT_{A_n}(\lambda)$ および FFLV 多面体

$FFLV_{A_n}(\lambda)$ と一致する. また階数 r から定まる marking λ^r はウェイト $\lambda = 2\rho$ に対応する. 従って定理 5.5 の系として次が成り立つ.

系 5.6. 双対多面体 $GT_{A_n}(2\rho)^\vee$ および $FFLV_{A_n}(2\rho)^\vee$ は組合せ論的変異の繰り返しで移り合う.

次に $G = Sp_{2n}(\mathbb{C})$ とし, $\lambda \in P_+$ を取る. 各 $1 \leq k \leq n$ に対して $\lambda_{\leq k} := \sum_{1 \leq \ell \leq k} \langle \lambda, h_\ell \rangle$ とおき, marked poset (Π, Π^*, λ) を図 3 のように取る. このとき定義により marked 順序多面体および

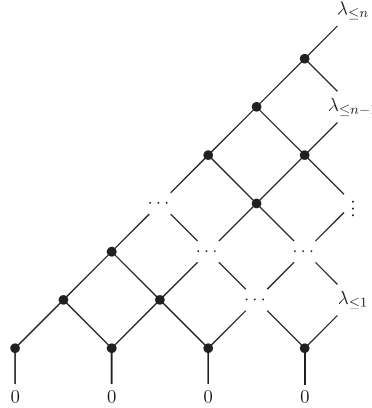


図 3: C_n 型の Gelfand–Tsetlin marked poset のハッセ図.

び marked 鎖多面体はそれぞれ C_n 型の Gelfand–Tsetlin 多面体 $GT_{C_n}(\lambda)$ および FFLV 多面体 $FFLV_{C_n}(\lambda)$ と一致しており, 定理 5.5 の系として次が成り立つ.

系 5.7. 双対多面体 $GT_{C_n}(2\rho)^\vee$ および $FFLV_{C_n}(2\rho)^\vee$ は組合せ論的変異の繰り返しで移り合う.

参考文献

- [1] M. Akhtar, T. Coates, S. Galkin, and A. M. Kasprzyk, Minkowski polynomials and mutations, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **8** (2012), 094.
- [2] D. Anderson, Okounkov bodies and toric degenerations, Math. Ann. **356** (2013), no. 3, 1183–1202.
- [3] F. Ardila, T. Bliem, and D. Salazar, Gelfand–Tsetlin polytopes and Feigin–Fourier–Littelmann–Vinberg polytopes as marked poset polytopes, J. Combin. Theory Ser. A **118** (2011), no. 8, 2454–2462.
- [4] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky, Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells, Duke Math. J. **126** (2005), no. 1, 1–52.
- [5] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. **143** (2001), no. 1, 77–128.
- [6] M. Brion, Lectures on the geometry of flag varieties, in Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2005, 33–85.
- [7] L. Escobar and M. Harada, Wall-crossing for Newton–Okounkov bodies and the tropical Grassmannian, with Appendix by N. Itten, Int. Math. Res. Not., published online, DOI:10.1093/imrn/rnaa230.

- [8] E. Feigin, G. Fourier, and P. Littelmann, PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n , *Transform. Groups* **16** (2011), no. 1, 71–89.
- [9] E. Feigin, G. Fourier, and P. Littelmann, PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2011** (2011), no. 24, 5760–5784.
- [10] E. Feigin, G. Fourier, and P. Littelmann, Favourable modules: filtrations, polytopes, Newton–Okounkov bodies and flat degenerations, *Transform. Groups* **22** (2017), no. 2, 321–352.
- [11] V. V. Fock and A. B. Goncharov, Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **42** (2009), no. 6, 865–930.
- [12] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. I. Foundations, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), no. 2, 497–529.
- [13] S. Fomin and A. Zelevinsky, Cluster algebras. IV. Coefficients, *Compos. Math.* **143** (2007), no. 1, 112–164.
- [14] N. Fujita and A. Higashitani, Newton–Okounkov bodies of flag varieties and combinatorial mutations, *Int. Math. Res. Not.*, published online, DOI:10.1093/imrn/rnaa276.
- [15] N. Fujita and S. Naito, Newton–Okounkov convex bodies of Schubert varieties and polyhedral realizations of crystal bases, *Math. Z.* **285** (2017), no. 1–2, 325–352.
- [16] N. Fujita and H. Oya, A comparison of Newton–Okounkov polytopes of Schubert varieties, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **96** (2017), no. 1, 201–227.
- [17] N. Fujita and H. Oya, Newton–Okounkov polytopes of Schubert varieties arising from cluster structures, preprint 2020, arXiv:2002.09912v1.
- [18] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, *Invent. Math.* **202** (2015), no. 3, 927–985.
- [19] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-j. Oh, Monoidal categorification of cluster algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **31** (2018), no. 2, 349–426.
- [20] M. Kashiwara and M. Kim, Laurent phenomenon and simple modules of quiver Hecke algebras, *Compos. Math.* **155** (2019), no. 12, 2263–2295.
- [21] K. Kaveh, Crystal bases and Newton–Okounkov bodies, *Duke Math. J.* **164** (2015), no. 13, 2461–2506.
- [22] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, preprint 2008, arXiv:0804.4095v1; a short version with title *Algebraic equations and convex bodies* appeared in *Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology*, *Progr. Math.* Vol. 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012, 263–282.
- [23] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton–Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, *Ann. of Math.* **176** (2012), no. 2, 925–978.
- [24] V. Kiritchenko, Newton–Okounkov polytopes of flag varieties, *Transform. Groups* **22** (2017), no. 2, 387–402.
- [25] V. Kiritchenko, Newton–Okounkov polytopes of flag varieties for classical groups, *Arnold Math J.* **5** (2019), 355–371.
- [26] S. Kumar, *Kac–Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory*, *Progr. Math.* Vol. 204, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.
- [27] R. Lazarsfeld and M. Mustata, Convex bodies associated to linear series, *Ann. Sci. de l’ENS* **42** (2009), no. 5, 783–835.
- [28] P. Littelmann, Cones, crystals, and patterns, *Transform. Groups* **3** (1998), no. 2, 145–179.
- [29] F. Qin, Triangular bases in quantum cluster algebras and monoidal categorification conjectures, *Duke Math. J.* **166** (2017), no. 12, 2337–2442.
- [30] F. Qin, Dual canonical bases and quantum cluster algebras, preprint 2020, arXiv:2003.13674v2.
- [31] R. P. Stanley, Two Poset Polytopes, *Discrete Comput. Geom.* **1** (1986), 9–23.
- [32] C. Steinert, Reflexivity of Newton–Okounkov bodies of partial flag varieties, preprint 2019, arXiv:1902.07105v1.
- [33] E. Vinberg, On some canonical bases of representation spaces of simple Lie algebras, Conference Talk, Bielefeld, 2005.