RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B85 (2021), 79-92

ラザール・カルノー『無限小計算の形而上学的原理についての考察』（1797）と数学の厳密性問題

Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal (1797) by L. Carnot and the Problem about Rigor of Mathematics

但馬亨

Toru Tajima *

Abstract

Lazare Carnot is an eminent mathematical scientist and engineer in 18^{th} Century. Traditionally 18^{th} Century infinitesimal analysis is recognized as magnanimous and vague and we have a tendency to treat it as proto-step before the achievement of rigorization of analytical mathematics by A. L. Cauchy and K. Weierstrass, as we call the analytical revolution in 19^{th} Century. This kind of historiography, however, is only one side of 18^{th} Century Mathematics and the tendency into rigorization would be seen already in L. Carnot's famous work, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (1797).

§1. 『科学革命の歴史構造』と19世紀以降の解析科学の厳密化

佐々木力の代表的著作に『科学革命の歴史構造』（1985）がある．浩瀚な作品であるが，その中でも数学者・数学史家に今なお重要な示唆を与えるのは，第3章「フランス革命と科学思想」ならびに，第4章「ドイツ近代大学建設と科学思想」であろう．これによると，中世から存在する既存の大学とは差別化されたエコール・ポリテクニック（以下ポリテクニック）を嚆矢とした理工系の新教育研究機関の創設が，数学研究に与えた影響は甚大であったとされる．最も典型的な例は，論理的に曖昧かつ不完全であり，17世紀の解析学の黎明期より議論の的となっていた「無限小」概念を，このポリテクニックの俊英に

Received March 28, 2021. Revised May 31, 2021.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 01A50,01A55
Key Words: 18^{th} Century mathematics, infinitesimal calculus, rigorization of mathematics, Lazare Carnot, George Berkeley, Joseph Louis Lagrange
This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage / Research Center located in Kyoto University.
*Yokkaichi University, Seki-Kowa Institute of Mathematics
e-mail: torutajima@07.alumni.u-tokyo.ac.jp

対応させるべく，いわゆるイプシロン・デルタ論法を開発することによってそれまでの解析学の教授法から駆逐した，オーギュスタン・ルイ・コーシーの『解析教程』(*Cours d'Analyse*)についての記述であろう．

　このような数学史上重要な過程は，もう一つ，エコル・ポリテクニクに直接関係したエピソードから選ぶことができる．それはコーシーの有名な『解析学教程』の数学史における意義についてである．コーシーは，モンジュが解析幾何学について行ったことを微分積分学で行った．モンジュは伝統的幾何学の痕跡を残さない首尾一貫した解析幾何学を建設しようと意図した．コーシーは微分積分学を代数的な思考の範囲内で厳密なものとしようと試み，前述の名著を生んだのである．それまでは微分積分学を厳密なものにしようとすると，ニュートンの例がよく示しているように，古典的な幾何学の比の理論に「逆行」しなければならなかった．コーシーの代数解析についての書物は，エコル・ポリテクニクでの講義のためのものであった．精妙な数学上のテクニックも，その形成のために必要な思想的背景をもっていることが理解される．（文庫版上巻，pp. 362-3.）

　佐々木が解説するこの解析学の厳密化のプロセスは教科書の改善という意味だけでなく，19世紀末の数学基礎論の発展に直結をする現代数学が築かれる過程の重要な変化のはじまりとなっている．では，この数学史上著名なコーシーの展開の直前期に，無限小概念の問題点を総説した著作がなかったか詳しく探求すると，19世紀に広く読まれ，第4版まで重版された，当時の数学者たちに人気を博した重要なとある著作に到達する．それは，こちらもポリテクニックの創設と大きく関係した，ラザール・カルノー(Lazare Carnot)による『無限小計算の形而上学的原理についての考察（以下『考察』）』(*Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*)である．本稿は，このカルノーの代表作の一つを分析することによって，当時の先端的数学がどのように思想として理解されていたのか，現在でいうところの数学の哲学の問題としてどのように考察されていたのかを理解することを目的としている．

§2. カルノーとその時代

Fig.1 ラザール・カルノーの肖像画（from *wiki commons*, public domain.）

ラザール・カルノー(Lazare Nicolas Marguerite Carnot,1753-1823)は，ブルゴーニュ地方のノレ(Nolet)出身である，カルヴァニスト家系の小ブルジョワ階級出身である．神学校を卒業したあと，メジーエールの王立工兵士官学校(École royale du génie de Mézières)へ進学し，後のポリテクニックの創設について指導的役割を果たす，ガスパール・モンジュの薫陶を受けることになる．士官学校卒業後は，数学・物理学・機械工学の研究の傍ら，数学・光学的知識のみならず，軍人としての戦略的才能を活かして，かのロベスピエールとも友好関係を築き，軍司令官そして国民公会議員として活躍し，革命後の恐怖政治，ならびにナポレオンによるフランス政府激変の混乱の中を共和主義者として生き抜いたことで知られる．19世紀になり，独裁体制を一層強めていった第一帝政期のナポレオンとも適切な距離感で関係を保ちつづけ，ナポレオン失脚後の王政復古後は政府要職からは罷免されることになり，1823年の死までドイツ，ザクセン・アンハルト州の州都であるマクデブルクに亡命しで余生を過ごすこととなる．政治的な立ち回り方などをみるに，けっして日和見主義者ではなかったが，革命期の動乱でラヴォアジェに代表される悲惨な刑死や獄中死という最後を迎えなかった点が，目まぐるしく変転する最高権力者とつかず離れず接したという彼の位置に関する絶妙さを物語っているともいえる．また，創設期のポリテクニックの初代教授陣として活躍したことも無視することができない．

軍事的あるいは詩学上の作品を除いて，科学的著作としては『考察』以外では，以下のものが著名である．まず『一般機械論』(*Essai sur les machines en général*, 1783)においてカルノーは衝突の法則を詳説し，力学的エネルギー保存則（仕事量保存則）をより洗練化したスタイルで定式化した．また，『位置の幾何学』(*Avec sa Géométrie de position*, 1803)ならびに，『横断性の理論についての試論』(*Essai sur la théorie des transversales*, 1806)で，モンジュと同時代的に近代幾何学の創設者としての評価を受けている．エウクレイデス『原論』のリフォームが17世紀半ばから叫ばれて久しく，数学研究の主要方法が，代数学スタイルに移行を見せていた大陸側では，この時期にしては比較的珍しい研究となっており，後の微分幾何学の研究にも関連するテーマが扱われている．

最後に子孫についてのいくつかの情報をまとめておく．その息子には熱力学の研究で知られる物理学者のサディ・カルノーや政治家であるイポリット・カルノーなど，大学教授や企業経営者，共和国大統領にもなるほどの大政治家等々社会的に成功した血縁者が多くみられる．現在もカルノー家は名門の誉れを維持しており，財団法人を運営し過去の類縁者の業績をまとめるアーカイブを管理している．[1]

このように，大名門カルノー家の18世紀中の筆頭的存在，家長と呼べるのがラザールであり，工兵士官，国民公会議員といった政府中枢にかかわる重職を担いつつ，エコール・ポリテクニックの初期の中核的教授陣の一人として，モンジュやラグランジュとともにフランスの理工系教育の刷新を担った重要人物であった．[2]19世紀になるとラザールの薫陶を受けたポリテクニシャンがフランス共和国の中枢を担って活躍するようになるが，その中にはサディのような直接のカルノー家の子孫も多く含まれることになったのである．

§3-1. 『考察』の書誌情報

本論の主要テーマである『考察』についてその書誌情報をここで詳らかにしておきたい．カルノーは，1797年に『考察』初版を，そして最終版となる第4版は1860年に出版している．60年以上という月日にも関わらず，多くの数学を解するフランスの知識人に愛読されていることがこの重版の息の長さから容易に推測できる．なお，オックスフォード大学ペンブルックカレッジのフェローであるブロウェル牧師(Rev. W. R. Browell) によって，1832年 *Reflexions on the metaphysical principles of the Infinitesimal Calculus*のタイトルで英語にも翻訳されている．その他，ポルトガル語(1798)やドイツ語(1800)，イタリア語(1803)やロシア語(1823)など，ヨーロッパ各国の主要言語に19世紀初頭から次々と翻訳され，19世紀中の数学者に広く読解されている．[3]

§3-2. 『考察』の執筆経緯

この著作が執筆される経緯にまず触れておく．当時，啓蒙専制君主として名高く，軍事強国としての道をまい進していたプロイセンの指導者は，フリードリッヒ大王（2世）であった．そもそもプロイセン科学アカデミー（ベルリン）は1700年にライプニッツの提言を受けて，パリの科学アカデミーを範として作られたものであったが，オイラーやラグランジュ，ディドロ，ヴォルテールといった当時の先端的な数学者，科学者，知識人を外

---

[1] カルノー財団については以下の web に詳しい記述があり，家系の構成員を完全に把握することが出来る．
http://carnot.org/archives-familiales/ascendance-et-descendance-de-lazare-carnot/

[2] ラグランジュは初代エコール・ポリテクニックの校長に就任したという意見が多いが，これは誤りで [Capecchi, D. 2012] p. 492.の記述にあるように，公共事業中央学校の第一評議会議長と解析教授を歴任とするのが正しい．さらに正確にはポリテクニック[中央学校時期]の初代校長(directeur)は Jacques-Élie Lamblardie であり，ラザール・カルノーは二代目校長である．

[3] [Youschkevitch, A. P. 1971], p. 149 の記述によれば，英語版は別の翻訳者名義ですでに 1800-01 年の段階で出版されている．またこの論文はラグランジュが審査を行ったとされる 1784 年の懸賞問題に提出されたカルノーの手稿現行のファクシミリ版を含むものであり，『考察』の起源となった文章の詳細な解説を含んでいる．

国からも多数招くことによって新興国プロイセンの後進性を打破すべく，18世紀の半ばにはフリードリッヒ大王による強力なてこ入れがなされていた．とりわけアカデミー総裁にラグランジュを迎え入れ，アカデミーの紀要としてフランス語を排他的言語として採用するなど，フランス科学アカデミーを強く意識したこのリフォームは大成功し，当時のプロイセンの国力とは乖離するほど強力な指導的アカデミーが18世紀中に完成した．

主要な事業としてもパリのアカデミーと同じく懸賞問題の提示を行っており，1784年に提示されたのは「いわゆる数学上の無限の明確かつ正確な理論」を求めよというものであった．賞そのものの授与は，1786年にスイス人数学者であるシモン・リュイリエ(Simon Lhuilier,1750-1824)に授与されたが，カルノーも応募しており，その後落選した応募論文を改訂および拡張し，1797年に『考察』として出版することになる．解析学史の世界的権威であるIvor Grattan-Guinness はこの著書について以下のように全般的性格付けを行っている．

カルノーは，微積分学を基礎付ける様々な既知の方法について調査し，その中にはバークリーの誤差補正の原理やオイラーのゼロを伴う微積分法についての考え方が含まれている．彼は誤差の補正を支持したが，彼による最も有意義な議論は，無限小，微分，および高階微分の定義と使用に関するものだった．[4]

カルノーの研究はその独自性にも関わらず，実は数学史上これまであまり顧みられてはいおらず，微積分学の発達における重要な貢献とはされていない．そもそもカルノーの主要な関心は主に幾何学と工学問題への数学の応用にあったので，この作品自体がカルノーの仕事としてはかなり異色であることは否めないが，やはり純粋に著作自体を振り返ってみると，バークリーの無限小についての著名な批判とは別軸で，無限小のもつ論理的問題を指摘する優れた数学の哲学的著作であるといえる．ストラスブール大学の数学史家Harthongは，カルノーの研究の重要性をよりよく指摘しており，この時代の無限小の位置づけについて彼の分析の有意義性を強調するものである．

この著作の主要な関心は，広く一般的である意見の誤謬を明らかにすることである．すなわち，微積分学は，ヴァイエルシュトラスによるだけでは完全に厳密なもの（つまり直観や才能に頼ることなく論理だけに基づいたもの）にはならなかったであろうということである．ヴァイエルシュトラスの視点が今日支配的なものであることはたしかに正しく，それが満足のいくアプローチを与えることも正しい．しかし，カルノー（さらにラグランジュに多くを負っている）のそれが，これに劣らず同じように満足のいくアプローチを与えることができたかもしれないということも正しく，究極的に歴史によってなされた選択について別の説明が見つかるに違いないのである．実際，カルノーは真の公理的アプ

4 [Grattan-Guinness, I 1980], p.120.

ローチ[訳注：無限小の意味づけという意味で]を与えるのである．[5]

このように，『考察』は，神学者ジョージ・バークリーの著名な『解析者』のように数学以外の第三極からの鋭い無限小批判という意味をもつものではなく，またコーシーやヴァイエルシュトラス，ディリクレ，デーデキント等，19世紀後半の解析学の厳密化運動の端緒となったともみなされておらず，同時代の無限小をめぐる数学の哲学ともいえる記述の中ではやや埋没している感は否めない．しかし，19世紀中に流通した無限小を巡る形而上学的著作としては稀有な存在であり，ラグランジュが『解析関数論』の中でその点に触れるなど，重要な側面について18世紀後半以降の数学者は大きくその影響を受けている．[6]その内容について数学史的に精査・吟味する意味はあるだろう．

§3-3.　著作の構成と部分訳

『考察』は以下のように18章から構成されている．なお，その版によって記述内容は大幅に増加しているが，ここでは初版の構成を挙げ，ページ数はGallicaで公開されている全集版に依拠している．[7]

1.　序言．pp. 127-128.
2.　この著作の目的．pp. 129-131.
3.　無限小解析学がもつことが可能である起源．pp. 131-135.
4.　まず，自然にそれ[無限小解析学]を単純な近似法としてみなされるべきであったこと．pp. 135-137.
5.　つづいて，それぞれの問題の表現[関係式]の中でおかされる誤謬にも関わらず，それら結果は少なくとも最高に完全な厳密性をもつこと．pp. 137-138.
6.　これらの結果は誤謬の補正によってのみ厳密たり得ない．pp. 139-141.
7.　なぜこの補正が生じるのか．pp. 141-144.
8.　どのようにこの補正をそれぞれの特別な場合に適用させることができるのか．pp. 144-156.
9.　無限小解析学の基礎的諸原理．pp. 157-159.
10.　この解析学の精神を構成するもの．pp. 159-163.
11.　未決定による方法の拡張が望まれるのであれば，無限小解析学は応用以外のなにものでもない．pp. 163-167.
12.　的確に表現される極限による方法の説明．pp. 167-168.
13.　この方法は無限小解析学よりも，実行に移す際にはより困難である．pp. 168-169.

---

5 [Harthong, J. 1984], p.1.
6 [Youschkevitch, A. P. 1971], pp. 154-155.
7 https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62609f/f1.item

まず，序言と結論部の象徴的な記述を幾つか訳出しておく．基本的に増補改訂が完遂された第4版を底本とするが，一部それ以前の版との重要な相違点を付記する．

『無限小解析学の形而上学的原理の考察』序言

私は無限小計算の真の精神がどのように構成されているか探究している．[8]第一にこの解析学の一般原理を指摘し，第二に微積分学の発明によって，どのようにしてそれがアルゴリズムに還元されたかを検討し，第三にそれに代わる可能性のある他の方法，例えば，取り尽くし法，不可分者，不定量の方法などと比較してみたい．

第一章　無限小解析学の一般原理

数理科学[scinences mathématiques]において，「無限小解析学」ほど幸福[heureuse]かつ突然な革命[révolution]をもたらした発見はない．また，自然界の法則を理解する上で，これ以上に単純で，これ以上に成功した方法はない．物体をその要素に分解することで，内的な構造と組織を示しているように見える．しかし，すべての外延が感覚や想像力から逃れているので，これらの要素については，不完全な考え以外には何も形成できない．ある時には実量の性質を持ち，別の時には全くの無として扱われなければならない量の特殊な種であり，それらのいかがわしくも[équivocal]適切な[propre]結びつきによって，大きさとゼロの間，存在と非存在の間の中間的なランクを保持しているように見える．[9]

幸いなことにこの困難性は発見の進展を妨げていない．精神につねに不明瞭さを残すある種の原始的な考えがあるが，それらの最初の推論が一度なされたときには，障害物のない広大な分野が開かれる．しかし哲学者たちは，このような曖昧な概念に満足することができず原理に戻りたがっていたが，意見が分かれていることに気がついた．というか，自分たちの思索の対象に対する考え方が分かれていることに気がついた．私の意図はこれらの異なる視点を集中させ，それらの相互関係を示し，新たにいくつかの提案をすることである．

問題の異なる条件を方程式で正確に表現することや，これらの方程式を解くことでし

8 無限小計算とはcalcul infinitesimalであり，現在の微積分学を示す．

9 第4版には以下の脚注が付加されている．「私はここで，それらの性質を確認するために穏やかに，無限小と呼ばれる量について一般的に形成されている漠然とした考えに沿って話しているが，実際にはこの種の量に関する厳密な考えほど単純なものはないのである．」すなわち無限小を論理的に精緻化することで解析学の中に含まれる混乱を収める効用があると考えられている．

ばしば経験される困難は，無限小計算の最初のアイデアを生んだのかもしれない．実際，問題の正確な解を見つけることが不可能な場合で，その小さな値のために，これらの量が計算結果に些細な誤差以上のものを生み出すことができないことが予想される場合には，組み合わせを困惑させる量を無視することによって，可能な限りそれに近づこうと努力することが自然である．例えば，曲線の特性を発見するのは難しいので，曲線を多数の辺の多角形と考える必要がある．説明のために，正多角形が円に内接していると仮定すると，この二つの図形は，常に異なっていて，同一になることはできないが，それにもかかわらず，多角形の辺の数が増えれば増えるほど，ますます類似していくことは明らかである．また，その周長，その面積，与えられた軸の周りを回転することによって形成される立体，これらの図形の内側または外側に描かれた類似の線，これらの線によって形成される角度等は，それぞれが等しくないとしても，その辺の数がより増大すれば少なくともなおのこと等価[égalité]に接近していくことも明らかである．ここから，実際にこの辺の数が非常に大きくなると仮定すると，外接円に内接した多角形に属すると見受けられる諸性質を，知覚可能な誤差なく，当てはめることが可能であることが導かれる．

さらに，この多角形の各辺は，辺の数が増えるにつれて，明らかに大きさが小さくなる．したがって，もし多角形が本当にたくさんの辺で構成されていると仮定するならば，それぞれの辺の大きさは実際には非常に小さいと断言することができる．[10]

結論部

結論から言うと，無限小分析の優位性を示すことができるのは，原理の説明ではない．それらのすべては大抵の場合，原理において等しく明解である．しかしそれらを特定の問題に適用することは等しく容易ではない．主な困難は問題を方程式に入れることであるが，これは一方では無限小解析では非常に簡単である．他の方法は，彼らの微積分学に我々が無限小と呼ぶ量の類を導きいれることを拒否し，比較の手段が限定される．そして，この困難性は，代数的なフレーズやあらゆる種類の操作では，それらに先行する命題や議論よりも，はるかに観察することが少ないのであり，この困難性はこれらの操作のために置換される．この点で無限小解析が優れていることを証明するには，一つの例を挙げれば十分であろう．仮想速度の有名な原理を説明してみよう．以下は，ラグランジュが『解析力学』で述べたものである．

もし，我々が好きなだけ多くの物体や点の系が，どんな力によって作用しても，平衡状態にあり，我々がこの系にどんな小さな運動を与えても，各点がその仮想速度を表現する無限に小さな空間を記述する結果として，その仮想速度，力の合計は，それが適用されている点がこの同じ力の方向に記述されている空間にそれぞれ乗算され，ゼロに等しくなる．それは力の経路に記述されている小さな空間を正として取り，反対の方向に記述されている空間を負として取っている場合において．（『解析力学』引用）

---

[10] 第4版 pp. 5-8.

なんとなれば，わたしはこの式を拒否しておりながら，無限小解析学に入門を許された者が，『解析力学』のかの有名な著者の説明を可能な限り明晰になした(読解した)まさにその直後に，どうしてこの命題を明確に述べることができるようになるだろうか？[11]

しかし，すべての数学は，適切に言えば，単に同様の式の過程を辿る．すなわち，それらを放棄することは，退屈で複雑な困難に突入することになるだろうし，我々はまだ少なくともいくつかの誤差が結果に残るかもしれないことを恐れなければならない．今では誰もがその結果では，方法が無謬であることを認めている．数学の研究では，我々は自然に無限に小さいと呼ばれる量に精神を固定し，その比の極限ではないことを観察しなければならない．もし曲面を持つ物体の体積が必要とされるならば，我々はこの物体を多数のスライスや粒子に分割したものを想像している．すなわち，これらのスライスや粒子こそが我々が実際に考えているものであり，それらが互いに異なる比率を持っているかもしれないし，これらの比率の限界も考えていない．体積を層や粒子に分割することは，精神に像を提示し，その操作を明確にし，指示し，解答を容易にする．これらの粒子の一つは全量の要素とみなされ，実際にはこれらすべての要素の総和であると考えられ，微分式が求められる．[12]この微分式には，積分積分の既知の公式が次の場所で適用され，したがって，我々は多くの問題を解くために多くの問題なしに可能になる．無限に小さな量を実量として考えることも，全くの無量として考えることも可能であるが，想像力はそれ自体，ゼロに還元されたと仮定する方法よりも，物体を有効・効率的[efficient]なものとみなす方法の方が，より容易に受け入れられるものだ．連続性の法則自体は，それだけで各場合の端数 0/0 の値を決定することができ，それがなければ端数は不確定なままであるのに対し，それらが完全に消滅する前にそれらを比較することを義務づけている．さらに，これらのすべての量は，それらに確定的な値を割り当てることなしに除去させることは可能かもしれない．したがって，それらをゼロに等しいと仮定することは，いかなることがあっても不要である．それは，そうすることを避けることができるかもしれないときに問題を特殊化することであり，結果としてよりエレガントでない方法でこの問題を解くこととなる．

無限小解析学の本質的で崇高な長所は，一般的な近似プロセスにおける容易性と，一般的解析学における結果の正確性が一体化したことであると言えるかもしれない．もしライプニッツが提供したような純粋で単純な方法ではなく，計算の過程を通してより大きな厳密さを維持しているかのように見せかけて，他のあまり自然ではない方法で代用するならば，この計り知れない利点は失われてしまうであろうし，何れにしても減少してしまうだろう．現代人の誰もが疑っていないようにこの方法がその結果において正確であるならば，同様に認められているように，難しい問題では常にこの方法に頼らなければならないのであれば，なぜその場所を間接的で複雑な方法で補わなければならないのだろうか．なぜ他の方法で得られる推論やその結果との一致性に頼ることに満足しているのだろうか．これに対して持ち込まれた反論はすべて，無限に小さな量を無視することによって計算の

[11] 少々意味がとりにくいが，反語的言い回しであり，仮想速度の原理等，ラグランジュの解析力学の純形式的表現と内容の抽象性に熟達していないものは，ラグランジュの真意をくみ取れないと主張している．

[12] 微分式とは微分方程式とは違う表現であり，expression différentielle.

過程で生じた誤差が，どんなに小さな量であっても，微積分の結果に残るという誤った仮定に基づいている．そして，この消去の不可欠な条件の中で，無限小量の真の性質と，すべての反対意見に対する決定的な答えが，これまで発見されていなかったというのは珍しいことである．[13]

部分訳は以上のとおりである．まずその解題をしなければならない．『無限小解析学の形而上学的原理の考察』という表題の「形而上学的」という表現であるが，古代ギリシャの『原論』に代表される正統的な幾何学のような形式性・正当性を獲得しているとは言い難い当時の無限小解析学すなわち微積分学に，古典数学に匹敵する基礎付けを与えたいという筆者の壮大な数学思想の表明であると考えられる．17世紀のライプニッツは「よく基礎づけられた虚構」という表現で無限小解析学の原理への考察を通底させていなかったが，その不足点についての探求を行う意思が書名から垣間見られる．

また重要な特徴としてこの著作の中には非常に豊富な歴史記述がある．これは，たとえば最初にアルキメデス由来の「静力学」を紹介した後で，自らの「動力学」の記述を付加するというラグランジュの『解析力学』の構成に典型的に表れるのと同様，この時代の数学書の典型的な記述形式といえる．すなわち，まず優れた古代人も含めた先人の数学的達成を紹介し，その正当な後継として自身の新しい創意工夫を継ぎ足すという記述形式が，大陸の同時期の数学者にはオーソドクスなスタイルであったことが伺われるのである．ニュートンの流率法やライプニッツの微分計算の起源についての記述をまず必ず展開して，それから自身の論理を述べるというスタイルがカルノー著作の全域に及んでおり，手厳しい批判のための書という性格はそこには感じられない．

§４．無限小・極限概念の推移

以上のようにカルノーによる無限小解析あるいは無限小概念そのものについての議論は前世紀である17世紀の土壌から継続されている深い文脈を持つものであり，その前史や同時代の数学者の学説を理解することも彼の主張の文脈を理解するうえでは欠かすことはできない．ここでは，いくつかの先行研究をもとにこれらの議論の流れをトレースしてみたい．

まず，［武隈 1959］は当時の無限・極限についての議論を，ダランベールとラグランジュに関してまとめている．ダランベールの認識は以下の通りである．

ダランベールは，無限に関して近代的見解をもった最初の人である．無限とは有限なものが限りなく近づくが，けっして到達し得ないところの一つの極限に過ぎぬという．たとえば，１＋２＋４＋８＋・・・という数が無限に大きいというのは，項の数を十分たくさんにとって加えるとその結果が，任意に与えられたいかなる数よりも大きくなることを

13 第４版，pp. 134-136.

意味するものであるという．同様に無限小をも説明した．したがって微分学も，一定の法則に従う二つの有限の量の比の極限値を計算するのが目的であり，それはあくまでも有限量に関するものであるという．[14]

ここで重要なのは，有限回数の操作によって達成される極限か否かという，操作の概念による定義を強調している点であり，同時代のオイラーの『無限解析入門』では論じられていない点である．また，ラグランジュについては，重要著作の一つ『解析関数論』での説明を簡便に総括している記述を見ると，

ラグランジュは生涯の後半を大著『解析力学』(*Mécanique analytique*, 1788)，『解析函数論』(*Théorie des fonctions analytique*, 1797)およびその続篇(*Leçons sur le calcul des fonctions*, 1801)の著述にささげた．（・・・中略・・・）「解析函数論」は副題に「無限小または消滅するもの，極限または流動率についてのすべての考察から解放されて，有限量の代数的解析に帰着せしめられる微分学の原理」とあるので，この書物の意図と内容をだいたい推察することができよう．すなわち，彼はライプニッツ，ヨハンネス・ベルヌーイなどの無限小，また，オイラーのように無限小を零とする立場，ダランベールの無限の概念，ニュートンの流動率などによって微分学を基礎づけることには反対であった．それは不明瞭であり初学者にとっても理解が困難なので，もっと簡単明瞭な原理によってきずきあげようとするのである．[15]

とあり，ラグランジュはこれまでの論者の定義は恣意的で矛盾を多く含む可能性があり不十分だと武隈によって批判的にまとめられている．ラグランジュは1794年に化学者ラヴォアジェを弾頭台へ送った国民公会によって，ポリテクニックの前身となる公共事業中央学校(école central des travaux publics)の解析部門教授（参照文献末に彼の新組織での地位をまとめている）に任命されるが，より明晰判明な原理によっておきかわる教示法を目指して，無限および無限小概念の整理を目指していた．のちにコーシーが腐心する問題について，18世紀最大の数学者として直観的に危惧していたように思われる．

他にも17世紀からの意見として興味深いのは，オランダの自然神学者のニーウェンタイト(1654-1718)の意見がある．彼はライプニッツ流の無限小を激しく批判した．［三浦2019]によると，彼は「無限小なる曖昧なものの存在を否定し，それでももし存在するとしたらそれは０でしかなく，それを用いる場合は，有限量aに対して任意に与えられたものより大きいmで割ったa/mを用いれば済むことである」と解釈した．[16]これはギリシャ幾何学的方法での厳密性を目指す議論であり，17世紀後半の大陸側数学でこの論法を堅持し

14 ［武隈 1959]，163 頁.

15 同著，166 頁.

16 [三浦 2019], 226 頁.

た例は比較的珍しい．

またもう一人重要な例として考慮すべきは，先にも述べたアイルランド人のジョージ・バークリー(1685-1753)である．彼の著作『解析者』(*The Analyst*)は18世紀の無自覚で野放図な無限小の使用について，神学者の立場から本質的で厳しい楔を打ち込んだ人物である．ここで揶揄される「解析者」とは，ニュートンの知己であったオックスフォードのエドモンド・ハリーであり，イギリス側の流率法の論理的欠陥を批判する，この分野では同時代的にもっとも有名な著作である．彼にとってニュートンのoは０でありかつ０でない矛盾に満ちた無限小量であり，かつてのフェルマのeも同様，さらに２次以上の高階の微分については，無限小を内に含む流量を2度以上も重ねる「流率の流率」であり，神秘そのものだと強く否定される．神学者に神秘そのものという批判を受けることは，この上ない栄誉か批判かのいずれかだが，彼の著作は当然１８世紀の英国内の数学者，コリン・マクローリンなどを巻き込んで大規模な激論の戦端を切る展開となるのである．

§５．結語

数学を哲学的に論じることは，20世紀以降の一般の数学者たちにはあまりなじみのないものになっていった．それは19世紀半ば以降の素朴集合論をはじめとした，基礎論の発展，そしてドイツ近代大学制度の成立に伴う「純粋数学」の成立以降，数学の専門分化が進んでいった経過として考えられるが，元来ギリシャ人によって「学ぶべきもの(Mathemata)」という名辞が誕生して以降，実は延々と「数学の確実性」についての論争は尽きないものであったといえる．これは中世やルネサンスにおいてはスワレスやピッコロ―ミニなどの哲学者を大きく巻き込んだものになり，先に述べた19世紀後半には，カントール，デーデキントなどの素朴基礎論から派生してフッサール，ゲーデル等による確実性の論争が再燃した．さらに現代数学においては，この種の議論は基礎論のごく一部の世界に限定され，哲学的主題へと昇華させる向きは消えてしまう．主として18世紀のカルノーの議論は無限小の有益性を積極的に評価したものであり，論理的に矛盾を含むことからの切り捨てはバークリーほど辛辣ではない．いずれも数学的対象をメタ概念として分析するとどうなるか，という専門的数学者らしからぬ視点からの分析であり，非常に貴重であると同時にやはり基礎付けの問題からはどの時代の数学者も無関係でいられなかったことを示す好例である．『考察』は内容についてのさらなる詳細な分析が必要だが，故佐々木力氏が著作で指摘した，純粋数学の成立が後世（19世紀）の新参者としての性格を有すならば，『考察』は数学が他の自然科学と遊離していない最後の時代の証言と言えるかもしれない．故人の冥福を心よりお祈り申し上げます．

謝辞

本論文は京都大学に於ける国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所によって助成された．ここに感謝申し上げます．

付録:『考察』の目次（原文）

参考文献

[Carnot, L. 2019] Lazare Carnot, translated by W. R. Browell, *Reflexions on the metaphysical principles of the infinitesimal analysis*, Kindle Edition 2019, Franklin Classics 2018.

[Cajori, F. 1922] Florian Cajori, ``Review : Lazare Carnot, Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal'', *Bull. Amer. Math. Soc.* vol. 28, n. 5 (1922), P. 273.

[Capecchi, D. 2012] Danilo Capecchi, *History of virtual work laws: a history of mechanics prospective*, Milan, Springer Science & Business Media, 2012.

[Grattan-Guinness, I. 1994] Ivor Grattan-Guinness, *Companion encyclopedia of the history and*

philosophy of the mathematical sciences ed. by I. Grattan-Guinness, 2 Vols., Johns Hopkins University Press 2003, c1994.
[Grattan-Guinness, I. 1990] Ivor Grattan-Guinness, *Convolutions in French mathematics, 1800-1840: from the calculus and mechanics to mathematical analysis and mathematical physics* （Science networks, historical studies, v. 2-4）, Birkhäuser, 1990.
[Grattan-Guinness, I. 1980] Ivor Grattan-Guinness, *From the Calculus to set Theory 1630-1910*, ed. and with an introduction by I. Grattan-Guinness; with chapters by H.J.M. Bos ... [et al.], Princeton University Press 2000, c1980.
[Harthong, J. 1984] JACQUES HARTHONG, Lazare Carnot et le calcul infinitésimal Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1984, fascicule 2 « Séminaires de mathématiques-science, histoire et société » pp. 1-4.
URL: http://www.numdam.org/article/PSMIR_1984___2_A8_0.pdf
[Youschkevitch, A. P. 1971] Адо́льф-Андре́й Па́влович Юшке́вич, Lazare Carnot and the Competition of the Berlin Academy in 1786 on the Mathematical Theory of the Infinite in *Lazare Carnot Savant* ed. By Charles Coulston Gillispie, Princeton University Press, 1971. pp. 147-168.
［アレクサンダー 2015］ アミーア・アレクサンダー著，足立恒雄訳『無限小：世界を変えた数学の危険思想』，岩波書店，2015年.
［小堀 1979］ 小堀憲『18世紀の数学』（数学の歴史５），共立出版株式会社，1979年.
［武隈 1959］ 武隈良一『数学史』（新数学シリーズ），培風館，1959年.
［佐々木 1985］ 佐々木力『科学革命の歴史構造』上下巻，岩波書店，1985年（講談社学術文庫版1995年）.
［田村 1989］田村三郎『フランス革命と数学者たち：デカルトからガウスまで』講談社，1989年.
［三浦 2019］ 三浦伸夫『数学の歴史』改訂版，放送大学教育振興会，2019年.