多項式で表せる有限列の分布と Hardy field

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 * 吉田 裕哉 †
Yuuya Yoshida
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

概要

Piatetski-Shapiro 列に含まれる等差数列や, その一般化について述べる.

1 等差数列と Piatetski-Shapiro 列

本稿では, 実数の狭義増加列と部分集合を同一視する. $k \geq 3$ とする. 実数 s と $r > 0$ に対して, 列 $(s+rj)_{j=0}^{k-1}$ を長さ k の等差数列という. 等差数列に関する次の問題がある: $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ の部分集合 A が与えられたとき, A の中にどれくらい長い等差数列が存在するか? 等差数列の存在を保証する有名な定理の 1 つが, 次の Szemerédi の定理である [10]: $\mathbb{N}$ の部分集合 A の上漸近密度が正, つまり,

$$\varlimsup_{N\to\infty} \frac{\#(A \cap [1, N])}{N} > 0$$

なら, A は任意の長さの等差数列を含む. そのため, 漸近密度 0 の集合が等差数列を含むかどうかが研究されてきた. 漸近密度 0 の集合の典型例に素数全体の集合があり, それは任意の長さの等差数列を含む [5]. また, まだ未解決ではあるものの, $\mathbb{N}$ の部分集合 A の逆数和が発散すれば, A は任意の長さの等差数列を含むと予想されている (Erdős–Turán 予想).

漸近密度が 0 であるような別の集合を考える. 任意の $\alpha > 1$ に対して, 集合 $\mathrm{PS}(\alpha) \coloneqq \{\lfloor n^\alpha \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$ の漸近密度 0 である. この集合は, $\alpha > 1$ が整数でないとき, **Piatetski-Shapiro 列**と呼ばれ, 集合 $\mathbb{N}$ との類似性が知られている [1, 3, 6, 7]. しかも, 任意の

* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町
† m17043e@math.nagoya-u.ac.jp

$\alpha \in (1,2)$ に対して, 集合 $\mathrm{PS}(\alpha)$ は任意の長さの等差数列を含む [4]. また, $\mathbb{N}$ の部分集合 A の上漸近密度が正なら, 任意の $\alpha \in (1,2)$ に対して, $\mathrm{PS}(\alpha)$ の部分集合 $\{\lfloor n^\alpha \rfloor : n \in A\}$ も任意の長さの等差数列を含む [8]. このように, Piatetski-Shapiro 列は漸近密度 0 であるものの, 多くの等差数列を含む.

既存の研究 [4, 8] で考察された等差数列は, 次の形であった: $\left(\lfloor (n+rj)^\alpha \rfloor\right)_{j=0}^{k-1}$. ただし, $n, r \geq 1$ と $k \geq 3$ は整数である. 文献 [4] の証明を読むと, 任意の $\alpha \in (1,2)$, 任意の整数 $r \geq 1$ と $k \geq 3$ に対して, 列 $\left(\lfloor (n+rj)^\alpha \rfloor\right)_{j=0}^{k-1}$ が等差数列となるような整数 $n \geq 1$ が無数に存在することがわかる. しかし, そのような n の漸近密度は知られていなかったため, 筆者は齋藤との共同研究 [9] で, 漸近密度が $1/(k-1)$ に等しいことを示した.

2 Hardy field

前の Section では, 主に Piatetski-Shapiro 列と等差数列について述べた. この Section では, Piatetski-Shapiro 列の定義に使われる関数 x^α を一般化するために, [9] で用いた方法を述べる. 大雑把に言うと, [9] では, $f(x)$ の増加レートが $x \log x$ と x^2 の間である Hardy field の元 f に一般化した. 以下, Hardy field について説明する.

$\mathcal{B}$ を十分大きい $x > 0$ に対して定義された実数値関数 $f(x)$ 全体の集合とする. $\mathcal{B}$ の元 f_1 と f_2 に対して, 同値関係 $f_1 R f_2$ を次のように定める:

$$f_1 R f_2 \iff \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \geq x_0,\ f_1(x) = f_2(x).$$

集合 $\mathcal{B}$ を R で割った集合 $\mathcal{B}/R$ は, 同値関係 R によって誘導される加法と乗法により, 環をなす. 以下, 混乱のない限り, $f \in \mathcal{B}$ と $[f] \in \mathcal{B}/R$ を同一視する.

Definition 1 (Hardy field)**.** 環 $\mathcal{B}/R$ の部分体のうち, 微分に関して閉じているものを Hardy field という. Hardy field 全ての和集合を $\mathcal{H}$ で表す.

集合 $\mathcal{H}$ は, 関数の増加スピードを調べる際に通常用いるような関数を含んでいる. 実際, 算術記号 $+, -, \times, \div$ と関数記号 $\log(\cdot)$ と $\exp(\cdot)$ を, 実変数 x と実定数に有限回作用させた関数は全て $\mathcal{H}$ の元である. このような関数は, logarithmico-exponential function と呼ばれる. たとえば, 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ に対して, 以下の関数は logarithmico-exponential である:

$$x^\alpha, \quad x(\log x)^\beta, \quad \frac{x^2}{(\log x)^\gamma}, \quad \frac{x^2}{(\log\log x)^\gamma}.$$

ガンマ関数や Riemann のゼータ関数は logarithmico-exponential ではないものの, 集合 $\mathcal{H}$ の元である. 一方, $\cos x$ や $\sin x$ のように, 振動する関数は $\mathcal{H}$ の元ではない.

3 Hardy field と法 1 での一様分布性

我々は, $f \in \mathcal{H}$ のときに, 整数部分 $\lfloor f(n) \rfloor$ を扱いたい. 小数部分 $\{f(n)\} \coloneqq f(n) - \lfloor f(n) \rfloor$ を用いて, $\lfloor f(n) \rfloor = f(n) - \{f(n)\}$ と書く. 条件 $f \in \mathcal{H}$ があるので, $f(n)$ は比較的扱いやすい. 残りの小数部分 $\{f(n)\}$ を処理するために, **法 1 での一様分布性**を用いる.

Definition 2 (法 1 での一様分布性)**.** 任意の実数 $0 \le a < b \le 1$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\bigl\{n \le N : a \le \{x_n\} < b\bigr\} = b - a \tag{1}$$

が成り立つとき, 実数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ は法 1 で一様に分布するという.

我々は, 区間 $[n_0, \infty)$ 上で定義された関数 f に対して, 列 $(f(n))_{n=n_0}^{\infty}$ が法 1 で一様に分布するかどうかに興味がある. 通常, 法 1 での一様分布性を調べるには指数和を評価しなければならないが, $f \in \mathcal{H}$ の場合には以下の事実が知られている.

Proposition 1 (Boshernitzan [2])**.** $n_0 \ge 1$ を整数とする. 区間 $[n_0, \infty)$ 上で定義された任意の subpolynomial 関数 $f \in \mathcal{H}$ に対して, 以下は同値である.

- $(f(n))_{n=n_0}^{\infty}$ が法 1 で一様に分布する.
- 任意の多項式 $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ に対して,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - p(x)}{\log x} = \pm\infty.$$

ただし, $\pm\infty$ の符号は p に依存する.

ここで, 関数 f が subpolynomial とは, 十分大きい $x > 0$ に対して $|f(x)|/x^n$ が有界となるような整数 $n \ge 0$ が存在することをいう. Proposition 1 の判定条件は, 指数和の評価より遥かに簡単である. たとえば, 以下の事実を簡単に確かめられる:

- 任意の無理数 α に対して, $(\alpha n)_{n=1}^{\infty}$ は法 1 で一様に分布する;
- 整数でない任意の $\alpha > 0$ に対して, $(n^{\alpha})_{n=1}^{\infty}$ は法 1 で一様に分布する;
- $(\log n)_{n=1}^{\infty}$ は法 1 で一様に分布しない.

さて, 関数 $f \in \mathcal{H}$ の増加レートが $x \log x$ と x^2 の間だとする:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x \log x} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0.$$

このとき, 導関数 f' の増加レートは $x\log x$ と x^2 の間である (Hardy field の性質). そのため, 0 でない任意の $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ に対して, 列 $(a_0 f(n) + a_1 f'(n))_{n=n_0}^{\infty}$ が法 1 で一様に分布することがわかる. これは, [9] の証明における重要な事実の 1 つである.

4 等差数列から多項式で表せる有限列へ

関数 $f \in \mathcal{H}$ の増加レートが $x\log x$ と x^2 の間だとする. Section 1 で述べたように, 列 $\big(\lfloor f(n+rj)\rfloor\big)_{j=0}^{k-1}$ が等差数列となるような整数 $n \geq 1$ 全体の漸近密度は $1/(k-1)$ である. 実は, "等差数列" を "多項式で表せる有限列" にすることができる. 以下, これについて簡単に述べる.

共通部分 $\mathcal{I} \cap \mathbb{Z}$ を $\mathcal{I}_{\mathbb{Z}}$ と表す. 整数 $d \geq 1$ と $k \geq d+2$ に対して, 集合 $\mathcal{P}_{k,d}$ を次のように定める:

$$\mathcal{P}_{k,d} := \left\{ \begin{array}{c} (a(j))_{j=0}^{k-1} \subset \mathbb{N} \\ \text{strictly increasing} \end{array} : \begin{array}{l} \exists p(x) \in \mathbb{Q}[x] \text{ of degree} \leq d, \\ \forall j \in [0,k)_{\mathbb{Z}},\ a(j) = p(j) \end{array} \right\}.$$

つまり, $\mathcal{P}_{k,d}$ の元は, 次数 d 以下の多項式で表せる有限列である. 特に, $\mathcal{P}_{k,1}$ の元は長さ k の等差数列である. 筆者は齋藤との共同研究 [9] で, 以下を示した.

Theorem 1. $n_0, d \geq 1$ を整数, $f\colon [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{H}$ に属する微分可能な関数で, 以下が成り立つとする:

- 関数 f の増加レートは $x^d \log x$ と x^{d+1} の間;
- $\inf_{x \geq n_0} f'(x) \geq 1$.

このとき, 任意の整数 $k \geq d+2$ と $r \geq 1$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{n \in [n_0, N]_{\mathbb{Z}} : (\lfloor f(n+rj)\rfloor)_{j=0}^{k-1} \in \mathcal{P}_{k,d}\} = \mu(\mathcal{C}_{k,d+1}) \geq \frac{1}{\prod_{i=1}^{d} \binom{k-1}{i}}. \quad (2)$$

ただし, μ は $\mathbb{R}^{d+1}$ 上の Lebesgue 測度, $\mathcal{C}_{k,d+1}$ は $\mathbb{R}^{d+1}$ の凸集合

$$\mathcal{C}_{k,d+1} = \left\{ (y_i)_{i=0}^{d} \in \mathbb{R}^{d+1} : 0 \leq y_0 < 1,\ 0 \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{j}{i} y_i < 1\ (\forall j \in [1,k)_{\mathbb{Z}}) \right\}$$

である. $d = 1$ なら, (2) の不等号は等号になる: $\mu(\mathcal{C}_{k,2}) = 1/(k-1)$.

謝辞

筆者は JSPS 科研費 JP19J20161 の助成を受けている.

参考文献

[1] R. C. Baker, W. D. Banks, J. Brüdern, I. E. Shparlinski, and A. J. Weingartner. Piatetski-Shapiro sequences. *Acta Arith.*, 157(1):37–68, 2013.

[2] M. D. Boshernitzan. Uniform distribution and Hardy fields. *J. Anal. Math.*, 62:225–240, 1994.

[3] J.-M. Deshouillers. A remark on cube-free numbers in Segal-Piatestki-Shapiro sequences. *Hardy-Ramanujan J.*, 41:127–132, 2018.

[4] N. Frantzikinakis and M. Wierdl. A Hardy field extension of Szemerédi's theorem. *Adv. Math.*, 222(1):1–43, 2009.

[5] B. Green and T. Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):481–547, 2008.

[6] J. F. Morgenbesser. The sum of digits of $\lfloor n^c \rfloor$. *Acta Arith.*, 148(4):367–393, 2011.

[7] J. Rivat and P. Sargos. Nombres premiers de la forme $\lfloor n^c \rfloor$. *Canad. J. Math.*, 53(2):414–433, 2001.

[8] K. Saito and Y. Yoshida. Arithmetic progressions in the graphs of slightly curved sequences. *J. Integer Seq.*, 22(2):Art. 19.2.1, 25, 2019.

[9] K. Saito and Y. Yoshida. Distributions of finite sequences represented by polynomials in Piatetski-Shapiro sequences. *J. Number Theory*, 222:115–156, 2021.

[10] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith.*, 27:199–245, 1975.