ディリクレ L 関数の絶対テンソル積のオイラー積表示

東洋大学大学院 理工学研究科　田中　秀宣
Hidenori Tanaka
Graduate School of Science and Engineering
Toyo University

概要

本稿では，2 個のディリクレ L 関数の絶対テンソル積のオイラー積表示を構成したことについて報告する．そのオイラー積は，2 個の素数の組に渡る無限積であり，2 重オイラー積と呼ばれる．本研究は，赤塚のリーマンゼータ関数に対する結果の一般化であり，また，黒川が 1992 年に提唱した予想の部分的解決を与える．関連して，絶対テンソル積の定義・導入の動機・意義についても簡単に紹介する．

1　絶対テンソル積

1.1　定義と性質

本小節では，絶対テンソル積の定義，および，その定義で用いられるゼータ正規化積の定義についてまとめ，それらの性質について確認していく．

絶対テンソル積とは，1992 年，黒川 [1] によって導入された概念で，次のように定義される：

定義 1.1.1. (絶対テンソル積) 複素変数関数 $Z_j(s)$ $(j = 1, \cdots, r,\ r \in \mathbb{Z}_{>0})$ に対して，それらの絶対テンソル積 $(Z_1 \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \cdots \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} Z_r)(s)$ を，

$$(Z_1 \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \cdots \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} Z_r)(s) \coloneqq \prod_{\rho_1, \cdots, \rho_r \in \mathbb{C}} ((s - \rho_1 - \cdots - \rho_r))^{\mu(\rho_1, \cdots, \rho_r)} \tag{1.1}$$

と定義する．ただし，$\coprod$ はゼータ正規化積 (定義は後述) を表す記号であり，また，$Z_j(s)$ の零点 ρ の位数を $\mu_j(\rho)$(本稿では，極は負の位数を持つ零点と見なす) としたとき，$\mu(\rho_1, \cdots, \rho_r)$ は，

$$\mu(\rho_1, \cdots, \rho_r) \coloneqq \mu_1(\rho_1) \cdots \mu_r(\rho_r) \times \begin{cases} 1 & (\Im(\rho_1), \cdots, \Im(\rho_r) \geq 0) \\ (-1)^{r-1} & (\Im(\rho_1), \cdots, \Im(\rho_r) < 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

によって定義される．

定義 1.1.1 において用いられている，ゼータ正規化積の定義は次の通りである：

定義 1.1.2. (ゼータ正規化積) 複素数列 $\boldsymbol{a} \coloneqq \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{b} \coloneqq \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$Z_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(w, s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} b_n(s-a_n)^{-w}$ によって定義されるディリクレ級数 $Z_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(w, s)$ が，$\Re(w) > C$(C はある正の定数)

において広義一様絶対収束し，$w=0$ において w の有理型関数であるとする．このとき，ゼータ正規化積 $\prod_{n=1}^{\infty}((s-a_n))^{b_n}$ は，

$$\prod_{n=1}^{\infty}((s-a_n))^{b_n} := \exp\left(-\operatorname*{Res}_{w=0}\frac{Z_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(w,s)}{w^2}\right)$$

と定義される．

注意 1.1.3. 上の定義から分かるように，ゼータ正規化積の因子 $((s-a_n))^{b_n}$ の情報は，$Z_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(w,s)$ の各項に含まれている．そこで本稿では，「ゼータ正規化積の因子の情報を含む級数」という意味を込めて，$Z_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(w,s)$ を「因子級数」と名付けることにする．

このように定義されたゼータ正規化積は，特に $\boldsymbol{b}$ が整数列であるときに，$s=a_n$ においてのみ零点を持つことが知られている (cf. [2])．この性質から，絶対テンソル積 (1.1) は $s=\rho_1+\cdots+\rho_r$，すなわち，$Z_j(s)\ (j=1,\cdots,r)$ それぞれの零点の和として表される点においてのみ零点を持つことが分かる．実際，定義 1.1.1 内の $\mu(\rho_1,\cdots,\rho_r)$ はその定義により整数値を取り，かつ，ρ_j が $Z_j(s)$ の零点でないときには $\mu_j(\rho_j)=0$ であるので，$\mu(\rho_1,\cdots,\rho_r)=0$ となるからである．また，黒川は， [1] において，$Z_j(s)\ (j=1,\cdots,r)$ がそれぞれオイラー積 (素数に渡る無限積) 表示を持つならば，$(Z_1 \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \cdots \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} Z_r)(s)$ は多重オイラー積表示，すなわち，r 個の素数の組に渡る無限積表示を持つであろうことを予想した．詳細は後述するが，この予想の正しさは，いくつかの場合に証明されている．

1.2　導入の動機

絶対テンソル積は，リーマン予想解決の期待を込めて導入された．本小節では，絶対テンソル積がどのようにリーマン予想の解決につながるのか．その仕組みについて解説する．$Z(s)$ をゼータ関数とする．$Z(s)$ の任意の零点 ρ_1, ρ_2 に対し，1.1 節で見た絶対テンソル積の性質から，$(Z \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} Z)(s)$ は $s=\rho_1+\rho_2$ において零点を持つ．よって，特に ρ を $0<\Re(\rho)<1$ を満たす $Z(s)$ の任意の零点とするとき，$(Z \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} Z)(s)$ は $s=\rho+\rho=2\rho$ において零点を持ち，ρ の存在域の仮定から，$0<\Re(2\rho)<2$ が成り立つことが容易に分かる．ここで，もし $1/2<\Re(2\rho)<3/2$ が成り立つことが示せたならば，$1/4<\Re(\rho)<3/4$ を導くことができ，結果，ρ の存在域を狭めることができる．絶対テンソル積を取る $Z(s)$ の個数を増やし，同様の操作を繰り返すと，$\underbrace{(Z \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \cdots \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} Z)}_{r\text{ 個}}(s)$ の零点 $s=r\rho$ に対し，$r/2-1/2<\Re(r\rho)<r/2+1/2$ を示すことにより，$1/2-1/(2r)<\Re(\rho)<1/2+1/(2r)$ を導くことができ，ρ の存在域をさらに狭めることができる．$r\to\infty$ とすることにより，$\Re(\rho)=1/2$ が得られ，リーマン予想が解決する．

1.3　絶対テンソル積のオイラー積

絶対テンソル積のオイラー積を構成するという研究は，前小節で述べたリーマン予想解決のアイディアを実現するために始められた．無限積がその収束域において非零であることは，無限積の一般

論として良く知られた事実である．この事実から，絶対テンソル積のオイラー積を構成し，その収束域を考えることによって，絶対テンソル積が非零である領域，逆の捉え方をすれば，絶対テンソル積の零点の存在域を知ることができる．絶対テンソル積のオイラー積の収束域を拡大することができれば，絶対テンソル積の零点の存在域が狭められ，1.2 節のアイディアが実現されることになる．

具体的な絶対テンソル積のオイラー積の構成事例には，有限体のハッセゼータ関数 $\zeta_{\mathbb{F}_p}(s) := (1-p^{-s})^{-1}$ と リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ ($\Re(s)>0$ においては，$\zeta(s) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ として定義される関数) に対するものがある．$\zeta_{\mathbb{F}_p}(s)$ に対して，2 個の場合に小山・黒川 [3] が，3 個の場合に赤塚 [4] が，そして一般の r 個の場合に黒川・若山 [5] が，それぞれ構成し，また，$\zeta(s)$ 2 個の場合に，まず小山・黒川 [3] が，その後，小山・黒川とは別の手法によって，赤塚 [6] が，それぞれ構成している．$\zeta_{\mathbb{F}_p}(s)$ については，零点が全て $\Re(s)=0$ なる直線上に存在するという形で，元々リーマン予想が成り立っており，また，$\zeta(s)$ の絶対テンソル積のオイラー積の収束域を拡大することは，現時点ではできておらず，先程述べたアイディアの実現には未だ至っていないものの，1.1 節において述べた，黒川の「絶対テンソル積は多重オイラー積表示を持つ」という予想については，$\zeta_{\mathbb{F}_p}(s)$ と $\zeta(s)$ に対するどの場合にも，具体的に構成したオイラー積の形から正しい事が示されている．

2　ディリクレ L 関数の絶対テンソル積

本節において，筆者の行った研究「ディリクレ L 関数の絶対テンソル積のオイラー積表示」について報告する．なお，ディリクレ L 関数とは，ディリクレ指標 χ に対して，$\Re(s)>1$ においては，$L(s,\chi) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$ によって定義される関数である (本稿では，$L(s,\chi)$ を $L_\chi(s)$ とも書く)．

1.3 節において述べたように，赤塚は [6] において，2 個のリーマンゼータ関数の絶対テンソル積 $(\zeta \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \zeta)(s)$ のオイラー積表示を構成している．その研究の流れは，級数 $\theta(t) \coloneqq \sum_{\Re(\tau)>0} e^{-\tau t}$ ($\Re(t)>0$) (τ は，リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明零点 ρ に対し，$\rho = 1/2 + i\tau$ を満たすような複素数) に対する Cramér [7] や Guinand [8] の明示公式・関数等式・極・漸近挙動といった結果に基づき，「$\zeta(s)$ の絶対テンソル積の因子級数と素数とを繋ぐ等式」を導き，この等式を用いて $(\zeta \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} \zeta)(s)$ のオイラー積表示を得る，というものである．本研究は，赤塚がリーマンゼータ関数に適用した手法を，ディリクレ L 関数に対しても適用可能なのではないか，という興味から始められた．

2.1　本研究の流れと主結果

上述の級数 $\theta(t)$ に対応して，本研究では，まず，級数

$$l_\chi(t) \coloneqq \sum_{\Re(\tau_\chi)>0} e^{-\tau_\chi t} \; (\Re(t)>0)$$

を導入した．ここで，χ は，法 N ($N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$) の原始的ディリクレ指標であり，$\tau_\chi$ は，$L(s,\chi)$ の虚の零点 ρ_χ に対し $\rho_\chi = 1/2 + i\tau_\chi$ を満たすような複素数である．$l_\chi(t)$ について，関数等式・明示公式・極・漸近挙動・境界を導き，これらを用いて「ディリクレ L 関数の絶対テンソル積の因子級数と素数とを繋ぐ等式」を導いた．この等式は，本研究において，非常に重要な役割を果たすので，「鍵を握る等式」という意味を込めて「 **Key equation** 」と名付けておく．この **Key equation** から，

単なる計算により，主結果である「2 個のディリクレ L 関数の絶対テンソル積のオイラー積表示」を導くことができる．こうして導かれた主結果は，次の定理である：

定理 2.1.1. (2 個のディリクレ L 関数の絶対テンソル積のオイラー積表示) $\Re(s) > 2$ において，

$$(L_{\chi_1} \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} L_{\chi_2})(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^{8} E_k(s, \{\chi_j\}_{j=1}^2)\right) \tag{2.1}$$

が成り立つ．ただし，$E_k(s, \{\chi_j\}_{j=1}^2)$ は，

$$\begin{aligned}
E_1(w, s, \{\chi_j\}_{j=1}^2) &\coloneqq -\frac{i(w+1)}{2\pi}\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \chi_1(p^m)\chi_2(p^m)p^{-ms}(m\log p)^{w-2}(\log p)^2 \\
&\quad + \frac{i(s-2)}{2\pi}\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \chi_1(p^m)\chi_2(p^m)p^{-ms}(m\log p)^{w-1}(\log p)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E_2(w, s, \{\chi_j\}_{j=1}^2) \\
&\coloneqq -\frac{i}{2\pi}\sum_{(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}} \sum_{\substack{p,\,m,\,q,\,n \\ p^m \neq q^n}} \frac{\chi_a(p^m)\chi_b(q^n)p^{-m(s-1)}q^{-n}(m\log p)^w \log p}{n(m\log p - n\log q)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E_3(w, s, \{\chi_j\}_{j=1}^2) \\
&\coloneqq \frac{1}{2\pi}\sum_{(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}} \sum_{p,m,q,n} \frac{\chi_a(p^m)\bar{\chi}_b(q^n)p^{-m(s+\alpha)}q^{-n(1+\alpha)}}{n(m\log p + n\log q)}(m\log p)^w \log p,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&E_4(w, s, \{\chi_j\}_{j=1}^2) \\
&\coloneqq -\frac{1}{2\pi}\sum_{(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}} \sum_{p,m,n} \frac{\chi_a(-1)\chi_b(p^m)p^{-m(s+\alpha)}q^{-\alpha n\pi i}}{n(im\log p - n\pi)}(m\log p)^{w-2}\log p,
\end{aligned}$$

$$E_5(w, s, \{\chi_j\}_{j=1}^2) \coloneqq \frac{i}{2}\sum_{(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}} \sum_{p,m} \frac{\chi_a(p^m)p^{-m\left(s-\frac{1-\chi_b(-1)}{2}\right)}}{\sin(im\log p)}(m\log p)^{w-1}\log p,$$

$$\begin{aligned}
E_6(w, s, \{\chi_j\}_{j=1}^2) &\coloneqq -\frac{i}{2\pi}\sum_{(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}} \int_{S^{(2)}(\pi\to 0)} \sum_{p,m} \chi_a(p^m)p^{-m(s-u)} \\
&\qquad\qquad \times (m\log p)^w(\log p)\log L(u, \chi_b)du,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_7(w, s, \{\chi_j\}_{j=1}^2) &\coloneqq \sum_{(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}} \frac{1}{2\pi}\left(\log\left(\frac{\chi_a(-1)\Gamma(1+\alpha)N_a^{\alpha}G(\chi_a)}{(2\pi)^{1+\alpha}}\right)\right. \\
&\quad \left. +\gamma + \log\left(\frac{2\pi}{N_a} + \frac{\pi i}{2}\right)\right)\sum_{p,m}\chi_b(p^m)p^{-m(s+\alpha)}(m\log p)^{w-2}\log p \\
&\quad + \sum_{a=1}^{2}\left(-\frac{1+\alpha}{4}\sum_{p,m}\chi_a(p^m)p^{-m(s+\alpha)}(m\log p)^{w-1}\log p\right. \\
&\quad + \frac{i}{2\pi}\sum_{p,m}\chi_a(p^m)p^{-m(s+\alpha)}(m\log p)^{w-1}\log p \\
&\quad \left. \times \int_0^{\infty} \frac{1}{e^u - 1}\cdot\frac{u + m(\log p)(1-e^{-\alpha u})}{u + m\log p}du\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&E_8(w,s,\{\chi_j\}_{j=1}^2)\\
&:=\sum_{(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}}\mu_{\chi_b}(\rho_{\chi_b})\sum_{p,m}\sum_{\Im(\rho_{\chi_b})=0}\chi_a(p^m)p^{-m(s-\rho_{\chi_b})}(m\log p)^{w-1}\log p,
\end{aligned}
$$

としたとき，$E_k(s,\{\chi_j\}_{j=1}^2):=E_k(0,s,\{\chi_j\}_{j=1}^2)$ によって定義され，また，$S^{(r)}:=\left\{\frac{1+\alpha}{2}\cos\varphi+i\varepsilon^{(r)}\sin\varphi+\frac{1-\alpha}{2}\mid 0\le\varphi\le\pi\right\}$ である．

定理内で用いられている記号について補足すると，χ_j は法 N_j の原始的ディリクレ指標，$L(s,\chi_j)$ および $L_{\chi_j}(s)$ は χ_j に対応するディリクレ L 関数，p,q は素数，m,n は正の整数，α は $0<\alpha<1$ を満たす任意定数であり，また，$\tau_\chi^{(1)}:=\min\{\Re(\tau_\chi)>0\}$ に対し，$0<\varepsilon_\chi<\min\{\tau_\chi^{(1)},\tau_{\bar\chi}^{(1)}\}$ を満たす ε_χ を任意に固定し，$\varepsilon^{(r)}:=\min\limits_{j\in\{1,\cdots,r\}}\{\varepsilon_{\chi_j}\}$ と定めている．さらに，$L(s,\chi)$ の実軸上に存在しうる非自明零点 ρ_χ の位数を $\mu_\chi(\rho_\chi)$ とし，また，γ, $\Gamma(s)$, $G(\chi)$ はそれぞれ，オイラー定数，ガンマ関数，ガウス和，すなわち，

$$
\gamma:=\lim_{K\to\infty}\left(\sum_{k=1}^K\frac{1}{k}-\log K\right),\ \Gamma(s):=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx\ (\Re(s)>0),\ G(\chi):=\sum_{n=1}^N\chi_j(n)e^{\frac{2\pi i}{N}n}
$$

である．

定理内の $E_k(s,\{\chi_j\}_{j=1}^2)$ は，素数に渡る和であることから，(2.1) の右辺は素数に渡る積になることが分かり，本定理により $(L_{\chi_1}\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}L_{\chi_2})(s)$ のオイラー積表示が得られていることが分かる．特に，$E_2(s,\{\chi_j\}_{j=1}^2)$ と $E_3(s,\{\chi_j\}_{j=1}^2)$ は，素数の組 (p,q) に渡る和になっているため，(2.1) の右辺は素数の組 (p,q) に渡る積，すなわち，二重オイラー積表示となっており，1.1 節において述べた黒川の予想が，2 個のディリクレ L 関数の場合にも正しい事も，この定理により示されている．

2.2　$l_\chi(t)$ の性質

2.1 節において，$l_\chi(t)$ を導入し，その性質を用いて主結果を導いたことを簡単に紹介した．本小節では，主結果導出のために用いられた $l_\chi(t)$ の性質がどのようなものか，具体的に見ていくことにする．$l_\chi(t)$ について，初めに示したのは，次の関数等式である：

定理 2.2.1. **($l_\chi(t)$ の関数等式)** $l_\chi(t)$ は $\mathbb{C}-i\mathbb{R}_{\le0}$ への有理型接続を持ち，次の関数等式を満たす：

$$
l_\chi(t)+l_{\bar\chi}(-t)=\begin{cases}
-\dfrac{ie^{-\frac{\chi(-1)}{2}it}}{2\sin t}-\displaystyle\sum_{\Im(\rho_\chi)=0}\mu_\chi(\rho_\chi)e^{i(\rho_\chi-\frac12)t} & (\Re(t)<0),\\[2ex]
\dfrac{ie^{\frac{\chi(-1)}{2}it}}{2\sin t}-\displaystyle\sum_{\Im(\rho_\chi)=0}\mu_\chi(\rho_\chi)e^{i(\rho_\chi-\frac12)t} & (\Re(t)>0).
\end{cases}
$$

ただし，偏角は $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ に取るものとする．

次に，$\Re(t)>0$ における $l_{\chi_j}(t)$ の明示公式を導き，定理 2.2.1 で示した関数等式と合わせることで，$\mathbb{C}-i\mathbb{R}_{\le0}$ 上での明示公式を導いた．後者の明示公式から，$l_{\chi_j}(t)$ の $t=0$ 付近での漸近挙動，および，極を求めることができる．以上の流れをまとめたものが，次の定理である：

定理 2.2.2. ($l_\chi(t)$ の明示公式・$t=0$ 付近での漸近挙動・極)
$S_\chi := \left\{ \frac{1+\alpha}{2}\cos\varphi + i\varepsilon_\chi \sin\varphi + \frac{1-\alpha}{2} \mid 0 \le \varphi \le \pi \right\}$ とする．
(i) $l_\chi(t)$ は $\Re(t) > 0$ において，次の表示を持つ：

$$l_\chi(t) = -\frac{it}{2\pi}e^{\frac{it}{2}}\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(p^m)p^{-m}}{m(t+im\log p)} + \frac{e^{-i\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)t}}{2\pi}\left(it\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(p^m)p^{-m(1+\alpha)}}{m(t-im\log p)}\right.$$
$$- it\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(-1)^m e^{-\alpha m\pi i}}{m(t+m\pi)} + i\log\left(\frac{\chi(-1)\Gamma(1+\alpha)N^\alpha G(\chi)}{(2\pi)^{1+\alpha}}\right) - \frac{(1+\alpha)\pi}{2}$$
$$\left.-\frac{1}{t}\left(\gamma + \log\left(\frac{2\pi}{N}\right) + \frac{\pi i}{2}\right) + \frac{1}{t}\int_0^\infty \frac{1}{e^u-1}\cdot\frac{u+it(1-e^{-\alpha u})}{u+it}du\right)$$
$$-\frac{t}{2\pi}e^{-\frac{it}{2}}\int_{S_\chi(\pi\to 0)} e^{ist}\log L(s,\chi)ds.$$

(ii) $l_\chi(t)$ は $t \in \mathbb{C} - i\mathbb{R}_{\le 0}$ に対して，次の表示を持つ：

$$l_\chi(t) = -\frac{it}{2\pi}e^{-\frac{it}{2}}\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(p^m)p^{-m}}{m(t-im\log p)} - \frac{e^{i\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)t}}{2\pi}\left(it\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(p^m)p^{-m(1+\alpha)}}{m(t+im\log p)}\right.$$
$$- it\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(-1)e^{-\alpha m\pi i}}{m(t-m\pi)} + i\log\left(\frac{\chi(-1)\Gamma(1+\alpha)N^\alpha G(\bar{\chi})}{(2\pi)^{1+\alpha}}\right) - \frac{(1+\alpha)\pi}{2}$$
$$\left.+\frac{1}{t}\left(\gamma + \log\left(\frac{2\pi}{N}\right) + \frac{\pi i}{2}\right) - H(t)\right) - \frac{t}{2\pi}e^{\frac{it}{2}}\int_{S_\chi(\pi\to 0)} e^{-ist}\log L(s,\bar{\chi})ds$$
$$-\frac{ie^{-\frac{\chi(-1)}{2}it}}{2\sin t} - \sum_{\Im(\rho_\chi)=0}\mu_\chi(\rho_\chi)e^{i(\rho_\chi-\frac{1}{2})t}.$$

(iii) $l_\chi(t)$ は $t=0$ 付近において，次のように表される：

$$l_\chi(t) = -\frac{\log t}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi t}\left(\log\left(\frac{2\pi}{N}\right) + \gamma + \frac{3\pi i}{2}\right) + O(1).$$

(iv) $l_\chi(t)$ は $\mathbb{C} - i\mathbb{R}_{\le 0}$ 上，次の点において 1 位の極を持つ：$t = im\log p,\ t = -m\pi$. ただし，$m \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ である．

なお，(ii)-(iv) において，偏角は $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ に取る．

さらに，定理 2.2.2 (ii) で導いた明示公式から，$t=0$ 付近以外での $l_{\chi_j}(t)$ の漸近挙動を導く事ができ，その系として，$l_{\chi_j}(t)$ の境界が得られる．これらについて述べているのが，以下の補題および系である：

補題 2.2.3. ($l_\chi(t)$ の漸近挙動) (i) $\Re(t) \ge 1$ において，

$$l_\chi(t) = O(e^{-\varepsilon_\chi\Re(t)+\frac{1}{2}|\Im(t)|}).$$

(ii) $\Re(t) \le -1$ において，

$$l_\chi(t) = \frac{e^{-\frac{\chi(-1)}{2}it}}{e^{it}-e^{-it}} + O(e^{\varepsilon_\chi\Re(t)+\frac{1}{2}|\Im(t)|} + e^{\tau_\chi^{(0)}|\Im(t)|}).$$

(iii) $t=\sigma+iU$ $(U\geq 2,\ -U\leq\sigma\leq U)$ に対して，

$$l_\chi(t)=\frac{it}{2\pi}e^{-\frac{it}{2}}\sum_{\substack{p,\,m\\ p^m<e^{2U}}}\frac{\chi(\overline{p^m})p^{-m}}{m(t-im\log p)}+O(Ue^{\left(\varepsilon_\chi+\frac{1}{2}\right)U}).$$

以下，θ_χ を $0<\theta_\chi<\frac{\pi}{4}$ かつ $\tan\theta_\chi<\varepsilon_\chi$ を満たす任意定数とする．

系 2.2.4. **($l_\chi(t)$ の境界)** (i) $u\geq\frac{1}{\cos\theta_j}$ に対して，

$$l_\chi(ue^{-i\theta_\chi})=O(e^{-\frac{u}{2}\sin\theta_\chi}),\ l_\chi(ue^{i(\pi-\theta_\chi)})=O(e^{\tau_\chi^{(0)}u\sin\theta_\chi}).$$

(ii) $R\geq 1$ かつ $-R\tan\theta_\chi\leq y\leq R\tan\theta_\chi$ のとき，

$$l_\chi(R+iy)=O(e^{\frac{y}{2}}).$$

(iii) $\sigma\in\mathbb{R}$, $M\in\mathbb{Z}_{\geq 100}$, $U:=\log\left(M+\frac{1}{2}\right)$ としたとき，

$$l_\chi(\sigma+iU)=\begin{cases}O(e^{\frac{U}{2}}) & (\sigma\geq 1),\\ O(U^2e^{\left(\varepsilon_\chi+\frac{1}{2}\right)U}) & (-1\leq\sigma\leq 1),\\ O(e^{\varepsilon_\chi\sigma+\frac{U}{2}}+e^{\tau_\chi^{(0)}U}) & (\sigma\leq -1).\end{cases}$$

2.3 Key equation から主結果へ

2.1 節で述べたように，2.2 節で示した $l_{\chi_j}(t)$ の性質を用いて，**Key equation**，すなわち「ディリクレ L 関数の絶対テンソル積 $(L_{\chi_1}\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}\cdots\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}L_{\chi_r})(s)$ の因子級数と素数とを繋ぐ等式」を導くことができる．本小節では，**Key equation** の形を確認した後，**Key equation** から主結果である定理 2.1.1 に至るまでの流れを概観する．

今，$\theta^{(r)}:=\min_{j\in\{1,\cdots,r\}}\{\theta_{\chi_j}\}$, $\tau_r^{(0)}:=\max_{j\in\{1,\cdots,r\}}\{\tau_{\chi_j}^{(0)}\}$ とし，

$$\begin{aligned}D_{\theta^{(r)},\tau_r^{(0)}}&:=\left\{(w,z)\in\mathbb{C}^2\ \middle|\ -\frac{r}{2}\sin\theta^{(r)}<\Re(ze^{-i\theta^{(r)}})<-r\tau_r^{(0)}\sin\theta^{(r)}\right\}\\&=\left\{(w,z)\in\mathbb{C}^2\ \middle|\ -\frac{r}{2}\tan\theta^{(r)}<\Re(z)+\Im(z)\tan\theta^{(r)}<-r\tau_r^{(0)}\tan\theta^{(r)}\right\}\end{aligned}$$

と定める．

定理 2.3.1. **(Key equation)** $(w,z)\in D_{\theta^{(r)},\tau_r^{(0)}}$ が $\Im(z)<-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon^{(r)}\right)r$ かつ $\Re(w)>r$ を満たすとする．このとき，

$$L^{(1)}_{\theta^{(r)}}(w,z,\{\chi_j\}_{j=1}^r)+L^{(2)}_{\theta^{(r)}}(w,z,\{\chi_j\}_{j=1}^r)=R_{\theta^{(r)}}(w,z,\{\chi\}_{j=1}^r)\tag{2.2}$$

が成り立つ．ここで，

$$L^{(1)}_{\theta^{(r)}}(w,z,\{\chi_j\}_{j=1}^r):=\frac{1}{\Gamma(w)}\int_0^{\infty e^{-i\theta^{(r)}}}e^{-zt}\prod_{j=1}^r l_{\chi_j}(t)t^{w-1}dt,$$

$$L^{(2)}_{\theta^{(r)}}(w,z,\{\chi_j\}_{j=1}^r):=(-1)^{r-1}\frac{e^{\pi iw}}{\Gamma(w)}\int_0^{\infty e^{-i\theta^{(r)}}}e^{zt}\prod_{j=1}^r\left(l_{\overline{\chi_j}}(t)+\sum_{n=1}^\infty e^{-\left(2n-1-\frac{\chi_j(-1)}{2}\right)it}\right.$$

$$+\sum_{\Im(\rho_{\chi_j})=0}\mu_{\chi_j}(\rho_{\chi_j})e^{i(\rho_{\chi_j}-\frac{1}{2})t}\Biggr)t^{w-1}dt,$$

$$R_{\theta^{(r)}}(w,z,\{\chi_j\}_{j=1}^{r}) \coloneqq \frac{2\pi i}{\Gamma(w)}\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{p,\,m\\ p^m\,<\,N+1/2}}\operatorname*{Res}_{t=im\log p}e^{-zt}\prod_{j=1}^{r}l_{\chi_j}(t)t^{w-1}.$$

である．

この定理内の (2.2) が **Key equation** である．(2.2) の左辺を具体的に計算すると $(L_{\chi_1}\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}\cdots\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}L_{\chi_r})(s)$ の因子級数が求まり，右辺は素数に渡る和となっているので，**Key equation** が「r 個のディリクレ L 関数の絶対テンソル積の因子級数と素数とを繋ぐ」役割を果たしていることが分かる．今回は 2 個の場合を扱いたい為，**Key equation** において，$r=2$ として計算を進めればよい．さらに，$z=-i(s-1)$ とすることにより，次の定理を得る：

定理 2.3.2. $\boldsymbol{((L_{\chi_1}\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}L_{\chi_2})(s)}$ **の因子級数の明示公式)** $(2\tau_2^{(0)}+1)\tan\theta^{(2)}<\Re(s)\tan\theta^{(2)}-\Im(s)<2\tan\theta^{(2)}$, $\Re(s)>2(1+\varepsilon^{(2)})$, $\Re(w)>2$ であるとき，次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&-\sum_{\Im(\rho_{\chi_1}),\Im(\rho_{\chi_2})<0}\frac{1}{(s-\rho_{\chi_1}-\rho_{\chi_2})^w}+\sum_{\Im(\rho_{\chi_1}),\Im(\rho_{\chi_2})>0}\frac{1}{(s-\rho_{\chi_1}-\rho_{\chi_2})^w}\\
&+\sum_{(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}}\Biggl(\sum_{\Im(\rho_{\chi_a})=0,\Im(\rho_{\chi_b})>0}\frac{\mu_{\chi_a}(\rho_{\chi_a})}{(s-\rho_{\chi_a}-\rho_{\chi_b})^w}\\
&\qquad+\sum_{\Im(\rho_{\chi_a})>0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(s-\rho_{\chi_a}+2n-\frac{3+\chi_b(-1)}{2}\right)^w}\\
&\qquad+\sum_{\Im(\rho_{\chi_a})=0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_{\chi_a}(\rho_{\chi_a})}{\left(s-\rho_{\chi_a}+2n-\frac{3+\chi_b(-1)}{2}\right)^w}\Biggr)\\
&+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\frac{1}{\left(s+2n_1+2n_2-3-\frac{\chi_1(-1)+\chi_2(-1)}{2}\right)^w}\\
&+\sum_{\Im(\rho_{\chi_1}),\Im(\rho_{\chi_2})=0}\frac{\mu_{\chi_1}(\rho_{\chi_1})\mu_{\chi_2}(\rho_{\chi_2})}{(s-\rho_{\chi_1}-\rho_{\chi_2})}\\
&=-\frac{1}{\Gamma(w)}\sum_{k=1}^{8}E_k(w,s,\{\chi_j\}_{j=1}^{2}).
\end{aligned}$$

この定理で示した等式の左辺が $(L_{\chi_1}\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}L_{\chi_2})(s)$ の因子級数であり，右辺の $E_k(w,s,\{\chi_j\}_{j=1}^{2})$ が素数に渡る和である (cf. 定理 2.1.1) ことから，上記等式が因子級数の明示公式となっていることが分かる．この明示公式に対し，ゼータ正規化積の定義に従い

$$\exp\left(-\operatorname*{Res}_{w=0}\frac{(\text{明示公式の左辺})}{w^2}\right)=\exp\left(-\operatorname*{Res}_{w=0}\frac{(\text{明示公式の右辺})}{w^2}\right)$$

なる操作を施すことで，左辺からはゼータ正規化積を含む

$$\prod_{\Im(\rho_{\chi_1}),\Im(\rho_{\chi_2})<0}((s-\rho_{\chi_1}-\rho_{\chi_2}))^{-1}\prod_{\Im(\rho_{\chi_1}),\Im(\rho_{\chi_2})>0}((s-\rho_{\chi_1}-\rho_{\chi_2}))$$
$$\times\prod_{(a,b)\in\{(1,2),(2,1)\}}\Bigg(\prod_{\Im(\rho_{\chi_a})=0}\prod_{\Im(\rho_{\chi_b})>0}((s-\rho_{\chi_a}-\rho_{\chi_b}))^{\mu_{\chi_a}(\rho_{\chi_a})}$$
$$\times\prod_{\Im(\rho_{\chi_a})>0,n\geq 1}\left(\left(s-\rho_{\chi_a}+2n-\frac{3+\chi_b(-1)}{2}\right)\right)$$
$$\times\prod_{\Im(\rho_{\chi_a})=0}\prod_{n\geq 1}\left(\left(s-\rho_{\chi_a}+2n+\frac{3+\chi_b(-1)}{2}\right)\right)^{\mu_{\chi_a}(\rho_{\chi_a})}\Bigg)$$
$$\times\prod_{n_1,n_2\geq 1}\left(\left(s+2n_1+2n_2-3-\frac{\chi_1(-1)+\chi_2(-1)}{2}\right)\right)$$
$$\times\prod_{\Im(\rho_{\chi_a}),\Im(\rho_{\chi_b})=0}(s-\rho_{\chi_a}-\rho_{\chi_b})^{\mu_{\chi_a}(\rho_{\chi_a})\mu_{\chi_b}(\rho_{\chi_b})}$$

という表示が得られるが，ゼータ正規化積の性質により，この表示を持つ関数は $s=\rho_{\chi_1}+\rho_{\chi_2}$ などの，2 個のディリクレ L 関数 $L(s,\chi_1)$, $L(s,\chi_2)$ それぞれの零点の和で表される点において零点を持っており，$(L_{\chi_1}\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}L_{\chi_2})(s)$ を表していることが分かる．右辺からは素数に渡る積，すなわち，オイラー積が得られ，こうして主結果である定理 2.1.1 が導かれる．

3　因子級数の有理型性

ゼータ正規化積の定義（cf. 定義 1.1.2）において，因子級数は $w=0$ において有理型関数であることが仮定されている．しかし前節までにおいて，$(L_{\chi_1}\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}L_{\chi_2})(s)$ の因子級数が $w=0$ で有理型関数であるかどうかについて触れていないため，現段階では，定理 2.3.2 から主結果を導く操作が正当化されていない．

本節では，「一般化されたメリン変換」（定義は後述）が，特定の条件の下で有理型関数となることを紹介し，それを用いて **Key equation** の左辺が，全複素平面上において有理型関数となることを示す．これにより，上述の操作が正当化される．なぜなら，$(L_{\chi_1}\underset{\mathbb{F}_1}{\otimes}L_{\chi_2})(s)$ の因子級数は **Key equation** の左辺から導かれるものであるからである．

3.1　一般化されたメリン変換とその有理型性

任意に固定された実数 $\psi\in(-\pi,\pi]$ に対し，$f(t)$ を $\{re^{i\psi}|r\in(0,\infty)\}$ 上，局所可積分可能な複素数値関数としたとき，$f(t)$ の一般化されたメリン変換 $M_\psi[f,w]$ を

$$M_\psi[f:w]:=\int_0^{\infty e^{i\psi}}f(t)t^{w-1}dt$$

によって定義する．ここで，$M_\psi[f:w]$ が $a<\Re(w)<b$ において絶対収束することを仮定すると，次の補題が成り立つ：

補題 3.1.1. (一般化されたメリン変換の有理型性) $f(t)$ が $t \to 0$ と $t \to \infty$ に対し，それぞれ，

$$f(t) \sim \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N_1(k)} A_1(n,k)(\log t)^n t^{a_1(k)} & (t \to 0), \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N_2(k)} A_2(n,k)(\log t)^n t^{a_2(k)} & (t \to \infty e^{i\psi}) \end{cases}$$

なる漸近挙動を持つと仮定する．ただし，$N_i(k)$ は各 k に対し，非負かつ有限な整数であり，また，$\{a_i(k)\}_k$ は $\Re(a_i(k))$ が単調増加するような複素数列である．このとき，$M_\psi[f:w]$ は，w の関数として全複素平面上への有理型接続を持つ．

3.2 $(L_{\chi_1} \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} L_{\chi_2})(s)$ の因子級数の有理型性

本節の前文で述べたように，$(L_{\chi_1} \underset{\mathbb{F}_1}{\otimes} L_{\chi_2})(s)$ の因子級数が w の関数として $w=0$ において有理型関数であることを言う為には，**Key equation** の左辺の有理型性を示せばよい．**Key equation** の左辺を構成する $L^{(1)}_{\theta^{(r)}}$ および $L^{(2)}_{\theta^{(r)}}$ はそれぞれ

$$e^{-zt}\prod_{j=1}^{r} l_{\chi_j}(t),\ e^{zt}\prod_{j=1}^{r}\left(l_{\bar{\chi_j}}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(2n-1-\frac{\chi_j(-1)}{2}\right)it} + \sum_{\Im(\rho_{\chi_j})=0} \mu_{\chi_j}(\rho_{\chi_j}) e^{i(\rho_{\chi_j}-\frac{1}{2})t}\right) \tag{3.1}$$

の一般化されたメリン変換を用いて表されており，これらが，定理 2.2.2 や 系 2.2.4 を用いることにより，$\Re(w) > r$ において絶対収束することを示すことができる．また，定理 2.2.2 (iii) より，(3.1) の 2 関数は共に， $t \to 0$ において，補題 3.1.1 の仮定を満たすような漸近挙動を持つことが分かるので，結果，$L^{(1)}_{\theta^{(r)}}, L^{(2)}_{\theta^{(r)}}$ は，w の関数として，全複素平面への有理型接続を持つことも示される．

4 今後の展望

本研究に基づき，今後，以下のような研究に着手していく予定である．

まず，リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ やディリクレ L 関数 $L(s,\chi)$ と似た性質 (オイラー積表示と関数等式) を持つ関数に対し，今回の研究と同様の手法を適用することによる，絶対テンソル積のオイラー積表示の構成である．具体的には，セルバーグクラス (cf. [9]) に属する関数やセルバーグゼータ関数に対する研究を考えている．

次に，3 個以上のディリクレ L 関数の絶対テンソル積のオイラー積の構成である．今回の研究では **Key equation** において $r=2$ とした場合を扱ったが，$r \geq 3$ として計算を進めれば，3 個以上のディリクレ L 関数の絶対テンソル積のオイラー積も構成可能である．

そして，今回の研究で構成した，ディリクレ L 関数の絶対テンソル積のオイラー積の収束域の拡大である．1.3 節でも述べたように，絶対テンソル積のオイラー積の収束域の拡大により，ディリクレ L 関数のリーマン予想への進展が期待される．

参考文献

[1] N. Kurokawa, *Multiple zeta functions: an example*, Adv. Stud. Pure Math. **21** (1992), 219-226.

[2] N. Kurokawa and M. Wakayama, *Zeta Regularizations*, Acta Appl. Math. **81** (2004), 147-166.

[3] S. Koyama and N. Kurokawa, *Multiple Euler products (in Russian)*, Proc. St. Petersburg Math. Soc. **11** (2005), 123-166. English transl.:Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **218** (2006), 101-140.

[4] H. Akatsuka, *Euler product expression of triple zeta functions*, Internat. J. Math. **16** (2005), 111-136.

[5] N. Kurokawa and M. Wakayama, *Absolute Tensor Products*, Int. Math. Res. Not. **2004**(5) (2004), 249-260.

[6] H. Akatsuka, *The double Riemann zeta function*, Commun. Number Theory Phys. vol. 3, no. 4 (2009), 619-653.

[7] H. Cramér, *Studien über die Nulstellen der Riemannschen Zetafunktion*, Math. Z. **4** (1919), 104-130.

[8] A. P. Guinand, *Fourier reciprocities and the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2) **51** (1950), 401-414.

[9] A. Selberg, *Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series*, Proc. Amalfi Conf. Analytic Number Theory, eds. E. Bombieri et al., Università di Salerno, Salerno, 1992, 367-385.