quadrilateral zeta function について *

東京理科大学　理工学部　教養　中村 隆 †
Takashi Nakamura
Department of Liberal Arts, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science

概要

この論説は「2020 年度 RIMS 共同研究（公開型）解析的整数論の展望と諸問題」における著者の講演を解説したものである．2018 年度 RIMS 解析数論の著者による論説「論文 Zeros and the functional equation of the quadrilateral zeta function に関する注意」を更に発展させたものであるので，重複するところもあるが，その点についてはご容赦いただければ幸いである．番号のついていないセクションがイントロであり，§1 で関数等式（[12] 参照），§2 において臨界線上の零点（[12] 参照），§3 では Davenport-Heilbronn 関数（[16] 参照），§4 では実零点と複素零点（[14] 参照），§5 で整数点での値（[15] 参照），について解説する．証明はここでは詳しく述べないので，各論文を参照していただきたい．

Introduction

The Riemann zeta function

$s = \sigma + it$ を複素数とするとき，リーマンゼータ関数は

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \sigma > 1$$

で定義される．$\zeta(s)$ は複素全平面に有理型に解析接続され，$s = 1$ で極を持ち，その留数は 1 である．さらに $\zeta(s)$ は関数等式

$$\zeta(1-s) = \Gamma_{\cos}(s)\zeta(s), \qquad \Gamma_{\cos}(s) := \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \cos\Bigl(\frac{\pi s}{2}\Bigr) \tag{0.1}$$

The author was partially supported by JSPS grant 16K05077.

(例えば [19, (2.1.8)] 参照) を持つ．関数等式には同値な様々な形があるが，この論説では実零点との関連を考えこの形を採用する．級数表示から $\sigma > 1$ において $\zeta(\sigma) > 0$ である．一方，[19, (2.12.4)] から

$$\bigl(1-2^{1-\sigma}\bigr)\zeta(\sigma) = 1 - \frac{1}{2^\sigma} + \frac{1}{3^\sigma} - \frac{1}{4^\sigma} + \cdots > 0, \qquad 0 < \sigma < 1,$$

であるので，$\zeta(\sigma) < 0$ が $0 < \sigma < 1$ において成り立つ．さらに $\zeta(0) = -1/2 < 0$ である (例えば [19, (2.4.3)] などを参照) ので，関数等式 (0.1) から次が成り立つ．

Theorem A. $\zeta(s)$ の実零点は負の偶数点上に**のみ**存在する．

オイラー積から $\zeta(s)$ は $\sigma > 1$ において零点を持たない．よって関数等式 (0.1) から $\zeta(s)$ は $\sigma < 0$ かつ $t \neq 0$ では零点を持たない．よって全ての複素零点は臨界領域と呼ばれる $0 \leq \sigma \leq 1$ にあることがわかる．関数等式 (0.1) と対称性 $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$ から，$\zeta(s)$ の実でない零点 (自明でない零点) は，直線 $t = 0$ と $\sigma = 1/2$ について対称に分布する．さらに次のように予想されている．

The Riemann hypothesis. 全ての $\zeta(s)$ の自明でない零点は $\sigma = 1/2$ 上にある．

Hurwitz and periodic zeta functions

Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,a)$ は

$$\zeta(s,a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}, \qquad \sigma > 1, \quad 0 < a \leq 1.$$

により定義される．$\zeta(s,a)$ の Dirichlet 級数は $\sigma > 1$ で絶対収束する．$\zeta(s,a)$ は全複素平面に有理型に解析接続され，$s = 1$ で極を持ち，その留数は 1 である ([1, Section 12] などを参照)．関数 $\zeta(s,1/2) = (2^s-1)\zeta(s)$ の実零点は正でない偶数上にしかないことは Theorem A からわかる．松坂 [8, Theorem 1.3] は整数 $N \leq -1$ に対して, $\zeta(s,a)$ が $(-N-1,-N)$ に実零点を持つための必要充分条件は $B_{N+1}(a)B_{N+2}(a) < 0$ であること, ただし $B_N(a)$ は N 番目のベルヌーイ多項式，を示した．$N = -1$ と $N = 0$ の場合は，それぞれ [10, Theorem 1.2] と [11, Theorem 1.2] で証明されていたことを注意しておく．

$0 < a \leq 1$ に対して, 周期的ゼータ関数を以下で定義する ([1, Exercise 12.2] を参照)

$$\mathrm{Li}_s(e^{2\pi i a}) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n a}}{n^s}, \qquad \sigma > 1.$$

明らかに $\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s,1) = \zeta(s)$ が成り立つ．$0 < a < 1$ であるとき $\mathrm{Li}_s(e^{2\pi ia})$ の Dirichlet 級数は $\sigma > 0$ で広義一様収束する．このとき $\mathrm{Li}_s(e^{2\pi ia})$ は全平面解析的に接続される ([7, Section 2.2] を参照)．関数 $\zeta(s,a)$ と $\mathrm{Li}_s(z)$, ただし $|z| \le 1$，の実零点については [10, Section 1.1] や論文 [13] などを参照していただきたい．

$\Gamma_\pi(s) := (2\pi)^{-s}\Gamma(s)$ とおくと，$\zeta(s,a)$ と $\mathrm{Li}_s(e^{2\pi ia})$ は以下に述べる関数等式により，互いに“写りあう”ことがわかる．

$$\begin{aligned}\zeta(1-s,a) &= \Gamma_\pi(s)\big(e^{-\pi is/2}\mathrm{Li}_s(e^{2\pi ia}) + e^{\pi is/2}\mathrm{Li}_s(e^{-2\pi ia})\big),\\ \mathrm{Li}_{1-s}(e^{2\pi ia}) &= \Gamma_\pi(s)\big(e^{\pi is/2}\zeta(s,a) + e^{-\pi is/2}\zeta(s,1-a)\big).\end{aligned} \tag{0.2}$$

1 関数等式

1.1 Main result

$0 < a \le 1/2$ に対して，4 つ組ゼータ関数 $Q(s,a)$ を以下で定義する．

$$2Q(s,a) := \zeta(s,a) + \zeta(s,1-a) + \mathrm{Li}_s(e^{2\pi ia}) + \mathrm{Li}_s(e^{2\pi i(1-a)}).$$

$Q(0,a) = \zeta(0) = -1/2$ が成り立つように，$Q(s,a)$ は定数倍が調整されて定義されていることに注意する（値 $Q(0,a)$ が a に依存しないというだけでも面白いことであると著者は考えている）．関数等式 (0.1) の類似として次を得た．

Theorem 1.1. $Q(s,a)$ は次の関数等式を充たす．

$$Q(1-s,a) = \Gamma_{\cos}(s)Q(s,a) \tag{1.1}$$

この $Q(s,a)$ の関数等式は (0.2) からすぐに証明される（この形を発見してしまえば）．関数等式 (1.1) は, $\zeta(s)$ の関数等式 (0.1) において $Q(s,a)$ と $Q(1-s,a)$ を $\zeta(s)$ と $\zeta(1-s)$ に入れ替えれば完全に一致することを注意しておく．これは重大な意味を持つので，次のサブセクションで解説する．

1.2 Hamburger's theorem

1921 年に Hamburger [3] は $\zeta(s)$ は関数等式 (0.1) により特徴付けられることを示した．

Theorem B. $G(s)$ を位数有限の整関数，$P(s)$ を多項式とし，

$$f(s) := \frac{G(s)}{P(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}, \qquad a(n) \in \mathbb{C}, \tag{H1}$$

は $\sigma > 1$ で絶対収束すると仮定する．さらに

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)f(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{1-s}{2}\Big)f(1-s), \tag{H2}$$

を充たすとする．このとき，$f(s) = C\zeta(s)$ が成り立つ．

即ち，(i) 通常 Dirichlet 級数表示を持ち，(ii) 極が有限個であり，(iii) 関数等式 (H2) を持つ，この 3 つ**全て**を充たすものは $\zeta(s)$ の定数倍**のみ**であることを主張している．Siegel [17]，Hecke [5]，などが類似や拡張を考えている．例えば Hecke [5] によるものとして，次の主張がある：以下の 3 条件全てを充たす関数 $\phi(s)$ は，$\zeta(2s)$ の定数倍に限る．
(1) $\phi(s)$ は有理関数で，$P(s)\phi(s)$ が位数有限の整関数となる多項式 $P(s)$ が存在する．
(2) $R(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\phi(s)$ とおくとき，関数等式 $R(s) = R(1/2-s)$ を充たす．
(3a) $\phi(s)$ と $\phi(s/2)$ はある半平面で通常 Dirichlet 級数表示を持つ．
さらに Hecke は (3a) は次の条件に書き換えられることも示した．
(3b) $\phi(s)$ はある半平面で通常 Dirichlet 級数表示を持ち，$\phi(s/2)$ の極は $s = 1$ のみにおいて許される．

これを踏まえ，Knopp [6, Theorem 1] は (3b) ではなく次の条件を満たすリーマンゼータ関数の定数倍でない関数は無限に存在することを示した．
(3) $\phi(s)$ はある半平面で通常 Dirichlet 級数表示を持つ．

Knopp [6, Theorem 1] はこのような関数の存在を示しただけである．一方の $Q(2s,a)$ は以下の性質を持つ．
(3a') $\phi(s)$ と $\phi(s/2)$ はある半平面で**一般** Dirichlet 級数表示を持つ．
(3b') $\phi(s)$ はある半平面で**一般** Dirichlet 級数表示を持ち，$\phi(s/2)$ の極は $s = 1$ のみ．

さらに, r, q を互いに素である自然数で $0 < r/q < 1/2$ として, $H(s,q) := (q^s + q^{1-s})^{-1}$ とおくと，$H(2s,q)Q(2s,r/q)$ は，条件 (2) と (3)，さらに次を充たす
(1') $\phi(s)$ は有理関数であり, $D(s)\phi(s)$ が位数有限の整関数となる **Dirichlet 多項式** $D(s)$ が存在する．

つまり，Hamburger の定理において，$Q(s,a)$ は (i) 通常 Dirichlet 級数表示を持つ，という条件だけを落としたものであり，$H(s,q)Q(s,r/q)$ は (ii) 極が有限個である，という条件だけを落としたものである．Konpp は条件 (ii) を外したものしか考察していないので，Theorem 1.1 は彼の定理のある種の改良といえる．繰り返しになるが，Knopp は (ii) の条件を充たさないが他は充たす関数の存在を示しただけである．一方我々は具体的に関数を構成しているので，それがリーマンゼータ関数とよく似た性質を持つことが期待される．以下に述べるように実際に優れた性質を持つ．

2　臨界線上の零点

2.1　Main result

前のセクションから，$\sigma = 1/2$ は $Q(s,a)$ の臨界線であるといえる．この節の主定理は，$Q(s,a)$ は臨界線上に無限個の零点を持つというものである．

Theorem 2.1. $0 < a \leq 1/2$ を任意に一つ固定する．そのとき $T > T(a)$ であれば，$Q(s,a)$ が線分 $[1/2, 1/2+iT]$ 上に零点を $A(a)T$ よりも多い個数を持つような，$T(a)$ と $A(a)$ が存在する．

$Q(s,a)$ は通常 Dirichlet 級数表示を持たないが，臨界線上にかなり多くの零点を持つことになる．証明は Hardy と Littlewood の 1921 年の論文 [4] の類似であり，鍵となるのは以下の積分表示である．

Proposition 2.2. $G_a(u)$ を次のように定義する

$$G_a(u) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(\exp\big(-\pi u^2 (n+a)^2\big) + \exp\big(-\pi u^2 n^2 + i2\pi n a\big) \Big).$$

$0 < \Re(s) < 1$ であるとき，以下の等式が成り立つ．

$$\pi^{-s/2}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big) Q(s,a) = \int_0^\infty u^{-s} \bigg(G_a(u) - 1 - \frac{1}{u} \bigg) du.$$

2.2　Remarks

ゼータ関数や L 関数の臨界線上の零点については，多くの研究があるが，私の知る限り，全て通常 Dirichlet 級数表示を持つものに限定されている．a が無理数である場合，適当な初等関数を掛けても $Q(s,a)$ は通常 Dirichlet 級数表示を持たないことを強調しておく．臨界線上の零点の個数が，$\gg T$ であるというのも $Q(s,a)$ の優れた点である．もちろんリーマンゼータ関数などは $\gg T \log T$ であるが，それはオイラー積を持つ．私の知る限り，Euler 積を持たないもので，$\Omega(T)$ 個の零点を持つと uncoditional に証明されているものは，次のセクションで述べる Davenport-Heilbronn 関数だけである．しかしその Davenport-Heilbronn 関数も 2 つのオイラー積の和で書けるという著しい性質を持つ．$Q(s,a)$ は一般に有限個のオイラー積の和で書けるものではないのも関わらず，$\gg T$ 個の零点を臨界線上に持つ稀有な関数であるといえる．

3 Davenport-Heilbronn 関数

3.1 Main result

Davenport-Heilbronn 関数の定義は次のサブセクションで述べることにし，先ず我々の主定理を述べる．そのための記号の準備をする．χ を mod q の原始的 Dirichlet 指標とし，$L(s,\chi)$ を Dirichlet L 関数，$G(\chi)$ をガウス和とする．さらに $\kappa(\chi) := (1-\chi(-1))/2$ とおく．$\Gamma_{\cos}(s)$ は既に定義されているが，$\Gamma_{\sin}(s)$ との比較のため定義を再掲する．

$$\Gamma_{\cos}(s) := \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \qquad \Gamma_{\sin}(s) := \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

$\overline{\chi}$ を χ の複素共役とし，$f(s,\chi)$ を次のように定義すると，以下の定理が成り立つ．

$$f(s,\chi) := q^s L(s,\chi) + i^{-\kappa(\chi)} G(\chi) L(s,\overline{\chi}).$$

Theorem 3.1. $f(s,\chi)$ は次の関数等式を充たす

$$\begin{aligned} f(1-s,\chi) &= \Gamma_{\cos}(s) f(s,\chi), \qquad \textit{if} \quad \chi(-1) = 1 \\ f(1-s,\chi) &= \Gamma_{\sin}(s) f(s,\chi), \qquad \textit{if} \quad \chi(-1) = -1. \end{aligned}$$

さらに原始的 *Dirichlet* 指標 χ を任意に一つ固定したとき，$\sigma \geq 1$ において $f(\sigma,\chi) \neq 0$ であり，全ての $1/2 \leq \sigma < 1$ に対して $f(\sigma,\chi) \neq 0$ であるための必要充分条件は全ての $1/2 \leq \sigma < 1$ について $L(\sigma,\chi) \neq 0$ である．

原始的実 *Dirichlet* 指標 χ を任意に一つ固定したとき，$\Re(s) > 0$ にある全ての $f(s,\chi)$ の複素零点が $\sigma = 1/2$ 上にあるための必要充分条件は，$L(s,\chi)$ の *GRH* が正しいことである．次に原始的な実でない *Dirichlet* 指標 χ を任意に一つ固定する．このとき次を充たす $\eta > 0$ が存在する．$1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1+\eta$ を充たす任意の σ_1 と σ_2 に対して，正の数 C_1, C_2 と T_0 が存在して，$T \geq T_0$ ならば次が成り立つ．

$$C_1 T \leq N_{f(s,\chi)}(\sigma_1, \sigma_2, T) \leq C_2 T, \tag{3.1}$$

ただし $N_{f(s,\chi)}(\sigma_1,\sigma_2,T)$ は関数 $f(s,\chi)$ の長方形領域内 $\sigma_1 < \Re(s) < \sigma_2$, $|\Im(s)| \leq T$ における零点の個数である．

一つ目の関数等式の証明は $f(s,\chi)$ が $Q(s,r/q)$ の一次結合であることから得られるし，形を見抜いてしまえば Dirichlet L 関数の関数等式からも得られる．二つ目の関数等式の証明も同様である．実零点に関する結果と χ が実指標であるときの結果は $|G(\chi)| = \sqrt{q}$ という良く知られた事実が証明の鍵となる．χ が実でない指標であるときの結果は，Davenport-Heilbronn の方法とその拡張により証明される．

3.2 知られている結果とそれに関連する注意

Davenport-Heilbronn 関数は次のように定義される（[19, Section 10.25] などを参照）．まず 2 つの L 関数を

$$L_1(s) := \frac{1}{1^s} + \frac{i}{2^s} - \frac{i}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots, \qquad L_2(s) := \frac{1}{1^s} - \frac{i}{2^s} + \frac{i}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots.$$

により定義する．次に $0 < \theta < \pi/2$ と $\xi > 0$ を

$$\tan\theta := \xi, \qquad \xi := \left(\sqrt{5} - 1\right)^{-1}\left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2\right).$$

とする．このとき Davenport-Heilbronn 関数 $f(s)$ は次のように定義される．

$$f(s) := \frac{\sec\theta}{2}\left(e^{-i\theta}L_1(s) + e^{i\theta}L_2(s)\right).$$

この Davenport-Heilbronn 関数 $f(s)$ は関数等式

$$f(1-s) = 5^{s-1/2}\Gamma_{\sin}(s)f(s). \tag{3.2}$$

持ち，(3.1) で記述されるような零点密度を持つことが知られている．この Davenport-Heilbronn 関数の類似として，Vaughan [20] は次の関数を定義した．

$$\lambda(\chi) := \frac{G(\chi)}{i^{\kappa(\chi)}\sqrt{q}}, \qquad \kappa(\chi) := \begin{cases} 1 & \chi \text{ is odd}, \\ 0 & \chi \text{ is even}, \end{cases}$$

とおき，$\lambda(\chi) \neq \pm 1$ である場合，

$$V_+(s) := \frac{L(s,\chi) + \lambda(\chi)L(s,\overline{\chi})}{1 + \lambda(\chi)}, \qquad V_-(s) := \frac{L(s,\chi) - \lambda(\chi)L(s,\overline{\chi})}{1 - \lambda(\chi)}$$

を Vaughan 関数と定義する．Vaughan は関数等式

$$V_+(1-s) = q^{s-1/2}\Gamma_{\cos}(s - \kappa(\chi))V_+(s),$$
$$V_-(1-s) = -q^{s-1/2}\Gamma_{\cos}(s - \kappa(\chi))V_-(s).$$

を証明し，さらに (3.1) で記述されるような零点密度を持つことも示した．

多くの論文などで「$f(s)$ はリーマンゼータ関数とよく似た関数等式を充たす」という記述があるが，私はそれには同意しない．その理由は，まず第一に $5^{s-1/2}$ という余計な因

子がついていること，第二に，こちらのほうが重大であるが，ガンマ因子が $\Gamma_{\cos}(s)$ ではなく $\Gamma_{\sin}(s)$，つまり自明零点は負の偶数点ではなく負の奇数点であるというのが決定的である．Vaughan 関数も余分な因子 $q^{s-1/2}$ がついていることに注意する．しかし $f(s,\chi)$ にはそのような因子はついていないので，$\zeta(s)$ と全く同じ形の関数等式を持つ．即ち §1.2 で $Q(s,a)$ の関数等式について議論したが，その節で述べた条件 (ii) と (iii) を充たす．Davenport-Heilbronn 関数 $f(s)$ の実零点は負の奇数点上にしかないことが計算機で確認できるが，Vaughan 関数については実零点に関する主張はされていない．しかし $f(s,\chi)$ については Theorem 3.1 で述べたような実零点に関する結果がある．即ち $f(s,\chi)$ は χ が実でない指標を一つ固定したとき，実零点の様子は Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$ と一致するが，実でない零点は $L(s,\chi)$ とは全く異なる挙動をするという不思議な関数である（$L(s,\chi)$ は (3.1) で記述されるような零点密度を持たないことが知られている）．

4　実零点と複素零点

4.1　実零点

次の定理に現れる $0 < a_0 < 1/2$ は Mathematica 11.3 によると以下の値である．

$$\begin{aligned} a_0 = 0.&1183751396152722935827190345521191297147176999905\,3 \\ &14554591427859384268411483278906208314018589873082... \end{aligned} \tag{4.1}$$

Theorem 4.1. 次の 3 条件を充たす $a_0 \in (0,1/2)$ が存在する．
(1) 関数 $Q(\sigma,a_0)$ は $\sigma \in (0,1)$ において唯一の 2 重実零点を $\sigma = 1/2$ において持つ，
(2) 任意の $a \in (a_0,1/2]$ に対して，関数 $Q(\sigma,a)$ は $\sigma \in (0,1)$ で実零点を持たない，
(3) 任意の $a \in (0,a_0)$ に対し，$Q(\sigma,a)$ は $\sigma \in (0,1)$ で少なくとも一つの零点を持つ．

Corollary 4.2. 関数 $Q(s,a)$ の実零点が $\zeta(s)$ のように全て単根で負の偶数点のみに存在するための必要充分条件は $a_0 < a \leq 1/2$ である．

証明は古典的であるが，短くはない．証明の過程で $\zeta(s,a) \pm \zeta(s,1-a)$ などの実零点に関する性質も示す（[13] も参照）．実零点が完全に決定されているゼータ関数や L 関数は多くはない．リーマンゼータ関数の実零点については完全に決定されている．Hurwitz ゼータ関数の実零点はベルヌーイ多項式により特徴づけられるが，次数が大きいベルヌーイ多項式の値の決定は簡単ではないと考えられる．Dirichlet L 関数の実零点は重要な未解決問題である．ここでは Epstein ゼータ関数の実零点について少し詳しく述べる．

$B(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ を正定値整数係数二次形式, $r_B(n)$ を $B(x,y) = n$ を充たす

整数 x と y の解の個数とする．このとき Epstein ゼータ関数は

$$\zeta_B(s) := \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)} \frac{1}{B(x,y)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_B(n)}{n^s} \tag{4.2}$$

により定義される．この Epstein ゼータ関数の実零点については，Chowla と Selberg により証明なしでアナウンスされ，証明を論文として公表した Bateman と Grosswald による以下の結果がある．$\kappa > 0$ を

$$\kappa^2 := \frac{|d|}{4a^2} = \frac{4ac-b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

により定義する．$\kappa \ge \sqrt{3}/2$ とする．このとき，

$$\zeta_B(1/2) > 0 \quad \text{if} \quad \kappa \ge 7.00556$$

(つまり $4\kappa^2 = |d|/a^2 \ge 199.2$)，であり

$$\zeta_B(1/2) < 0 \quad \text{if} \quad \sqrt{3}/2 \le \kappa \le 7.00554$$

(つまり $3 \le 4\kappa^2 = |d|/a^2 \le 199.1$) が成り立つ．この結果と Epstein ゼータ関数が $s=1$ で極を持つことから，$\kappa \ge 7.00556$ であれば Epstein ゼータ関数は $(1/2,1)$ 内に実零点を持つ．$\sqrt{3}/2 \le \kappa \le 7.00554$ であるとき，$\sigma \in (0,1)$ において $\zeta_B(\sigma) < 0$ と予想はされていることを注意しておく．

この Epstein ゼータ関数の実零点に関する結果よりも，Theorem 4.1 は優れている．Theorem 4.1 では閾値 a_0 があり，$a = a_0$ では $Q(\sigma, a_0)$ は $\sigma = 1/2$ で 2 重解を持ち，$a < a_0$ では $Q(\sigma, a_0)$ は $\sigma \in (0,1)$ で零点を持ち，$a > a_0$ では $Q(\sigma, a_0)$ は $\sigma \in (0,1)$ で零点を持たない．Epstein ゼータ関数についてはそのような閾値は見つかっていない ($7.00554 < \kappa < 7.00556$ での実零点に関しては上の結果からでは何もわからない)．さらに，$\sqrt{3}/2 \le \kappa \le 7.00554$ であるとき，$\sigma \in (0,1)$ において $\zeta_B(\sigma) < 0$ も証明されいないが，$Q(s,a)$ については Theorem 4.1 (2) という主張がある．

4.2 複素零点

$Q(s,a)$ に関する RH を「$Q(s,a)$ の実でない零点は全て $\sigma = 1/2$ 上にある」と定義すると以下の命題が成り立つ．

Proposition 4.3. *RH* が正しい $\Longleftrightarrow$ $Q(s,1/2)$ の *RH* が正しい $\Longleftrightarrow$ $Q(s,1/3)$ の *RH* が正しい $\Longleftrightarrow$ $Q(s,1/4)$ の *RH* が正しい $\Longleftrightarrow$ $Q(s,1/6)$ の *RH* が正しい．

$Q(s,a)$, $a=1/2,1/3,1/4,1/6$ は「簡単な関数」$\times\zeta(s)$ の形になり，その簡単な関数の零点が全て $\sigma=1/2$ 上にあることを示すことにより，この命題は証明される．例外がこれだけしか存在しないことは，オイラーのトーシェント関数 $\varphi(n)$ の値が 2 以下となるのは $n=1,2,3,4,6$ に限られることからわかる．次の命題において $a=1/2,1/3,1/4,1/6$ が除外されているのもそのためである．

Proposition 4.4. $a\in\mathbb{Q}\cap(0,1/2)\setminus\{1/6,1/4,1/3\}$ を固定する．このとき次を充たす $\eta>0$ が存在する．$1/2<\sigma_1<\sigma_2<1+\eta$ を充たす任意の σ_1 と σ_2 に対して，正の数 C_1, C_2 と T_0 が存在して，$T\geq T_0$ ならば次が成り立つ．

$$C_1T\leq N_{Q(s,a)}(\sigma_1,\sigma_2,T)\leq C_2T,$$

ただし $N_{Q(s,a)}(\sigma_1,\sigma_2,T)$ は関数 $Q(s,a)$ の長方形領域内 $\sigma_1<\Re(s)<\sigma_2$, $|\Im(s)|\leq T$ における零点の個数である．

即ち $a\in\mathbb{Q}\cap(0,1/2)\setminus\{1/6,1/4,1/3\}$ である場合は，$Q(s,a)$ の RH は正しくない．§2 で述べたように $\zeta(s)$ と全く同じ関数等式を持つのにも拘わらず．証明は Davenport-Heilbronn の方法とその拡張による．関数等式から Riemann-von Mangoldt formula の類似も示されるが，ここでは省略する．

5　整数点での値

5.1　a が有理数である場合

n を自然数、r,q を互いに素である自然数で $0<r/q<1/2$ とする．このとき次の定理が成り立つ．

Theorem 5.1. 上の条件の下，

$$2Q(-n,r/q)=\frac{(-1)^n-1}{n+1}B_{n+1}(r/q)-\frac{2q^n}{n+1}\sum_{m=1}^{q}\cos(2\pi rm/q)B_{n+1}(m/q),$$

$$2Q(2n,r/q)=(-1)^{n+1}\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}\left(B_{2n}(r/q)+q^{2n-1}\sum_{m=1}^{q}\cos(2\pi rm/q)B_{2n}(m/q)\right).$$

つまり $Q(s,a)$ の負の整数点や正の偶数点における値は円周率やベルヌーイ多項式や 1 の冪根のみで記述されることになる．$Q(0,a)=\zeta(0)=-1/2$ であったことと，$Q(2n,r/q)\in\mathbb{Q}[e^{2\pi i/q}]\pi^{2n}$ であることを注意しておく．証明は関数等式や $\zeta(s,a)$ の負の整数点での値はベルヌーイ多項式を用いて書けることなどによる．

5.2 a が無理数である場合

$0<a<1$ に対し, 一般化されたオイラー多項式を $E_{c,n}(t)$

$$\frac{(1+c)e^{tz}}{e^z+c}=\sum_{n=0}^{\infty}E_{c,n}(t)\frac{z^n}{n!}, \qquad c:=-\exp(2\pi ia).$$

により定義する．これは志村 [18] により定義されたが、Apostol や Frobenius も同様な多項式を導入したことを注意しておく．$b:=-(1+c)^{-1}$ とおくとき初めの数個は次のようになる（[18, Section 4.1] 参照）

$$E_{c,0}(t)=1, \qquad E_{c,1}(t)=t+b, \qquad E_{c,2}=t^2+2bt+2b^2+b,$$
$$E_{c,3}(t)=t^3+3bt^2+(6b^2+3b)t+6b^3+6b^2+b, \qquad b:=-(1+c)^{-1}.$$

この多項式を用いて以下の定理を得る．

Theorem 5.2. n を自然数、$0<a\le 1/2$ とする．このとき

$$2Q(-n,a)=\frac{1-(-1)^n}{1+c^{-1}}E_{c,n}(0)-\frac{1-(-1)^n}{n+1}B_{n+1}(a),$$
$$2Q(2n,a)=\frac{(2\pi i)^{2n}E_{c,2n-1}(0)}{(1+c^{-1})(2n-1)!}-(-1)^n\frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_{2n}(a).$$

証明はやはり関数等式や $\zeta(s,a)$ の負の整数点での値はベルヌーイ多項式を用いて書けることなどによる．負の整数点と正の偶数点（又は奇数点）が明示的に記述できるのはリーマンゼータ関数と Dirichlet L 関数のみ（それらの多項式で書けるようなものは除く）であるので，この節で述べた定理も重要であると考えられる．

最期に

以上が 2020 年までに arXiv に公表された $Q(s,a)$ に関連する論文の概説である．これまでの議論から $Q(s,a)$ はゼータ関数として非常に優れたものであることがわかる．しかしながら，この $Q(s,a)$ の素晴らしさを理解を広めることに現在苦戦中である．この論説を全て読んだ方々は,「$Q(s,a)$ は種々のゼータらしい性質をもって面白い」と考えて下さる可能性もあるが，論文として投稿した場合,「個々の性質だけを取り出して論文にする」必要があるので，関数等式，臨界線上の零点，Davenport-Heilbronn 関数の類似，実零点と複素零点，整数点での値などの様々な性質が,「塵も積もれば山となる」のが $Q(s,a)$ の醍醐味であるが，それは伝わらないようである．つまり大局的に $Q(s,a)$ が理解されれ

ば，$Q(s,a)$ より面白いゼータ関数は多くはないことに同意する方々もいるかもしれないが，局所的にある性質だけ取り上げる，例えば臨界線上の零点だけしか判断材料としてない場合は，「lack of motivation」と判断されるようである．

この数学における「大局的理解と局所的理解」は大切と考えているので，Gonek, Haan と Ki [2] により証明された以下の定理で解説する．彼らの定理を大雑把に述べると，$L_1(s), L_2(s)$ を extended Selberg class の元とし，$L_1(\infty) = L_2(\infty) = 1$ であり，ある複素数 $c \neq 0$ に対し，$L_1(s) = c$ を充たす s の集合と $L_2(s) = c$ を充たす s の集合が一致していれば，$L_1(s) \equiv L_2(s)$ というものである．これはラングランズ予想「n 次元ガロア表現の L 関数は，$GL_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の保型表現の L 関数と一致する」の証明の大きな道具になる可能性がある．このように書くと彼らの定理は重要なものに思われるが，ここで古典的な Voronin の同時普遍性の系である次の結果を紹介する．0 でない複素数 c，互いに非同値な Dirichlet 指標 χ_1, χ_2 を任意に一組固定する．このとき充分大きい $T > 0$ に対して，

$$\sharp\{s : L(s,\chi_1) = L(s,\chi_2) = c,\ 1/2 < \Re(s) < 1,\ |\Im(s)| < T\} \gg T$$

が成り立つ．即ち 2 つの L 関数が全く一致していなくても，$L_1(s) = c$ かつ $L_2(s) = c$ を充たす s の集合の濃度は無限大である．そう考えると彼らの定理の仮定を充たす $c \neq 0$ と L 関数の組を挙げるのは殆ど不可能と感じられる（L 関数が有限オイラー積になっているような自明な場合は除く）．このように彼らの定理を「大域的」つまり Voronin の同時普遍性も含めた視点で見ると，「仮定が強すぎる」と結論せざる得ない（このような事実は既に [9] で指摘されている）．

話を $Q(s,a)$ に戻す．この論説の §2 を読んで，つまり $Q(s,a)$ の存在という新たな視点により「Hamburger の定理の偉大さを再認識した」という方々がいたら幸いである．つまり $Q(s,a)$ の関数等式により，Hamburger の定理は少しも仮定を緩めることはできないという新たな大域的理解を得ることになり，それが古典的な Hamburger の定理をより輝かせるということである．今の段階でも $Q(s,a)$ は充分魅力のある対象と著者は考えているが，それと同時にまだまだ磨き足りない感（さらに多くの数学と繋がる，つまりより大域的な研究対象になる可能性）もあるので，それが今後の課題である．

参考文献

[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1976.

[2] S. M. Gonek, J. Haan and H. Ki, Haseo, *A uniqueness theorem for functions in the extended Selberg class*, Math. Z. **278** (2014), no. 3-4, 995–1004.

[3] H. Hamburger, *Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion.* (German) Math. Z. **10** (1921), no. 3-4, 240–254.

[4] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line.* Math. Z. **10** (1921), no. 3-4, 283–317.

[5] E. Hecke, *Herleitung des Euler-Produktes der Zetafunktion und einiger L-Reihen aus ihrer Funktionalgleichung.* Math. Ann. **119** (1944). 266–287.

[6] M. Knopp, *On Dirichlet series satisfying Riemann's functional equation.* Invent. Math. **117** (1994), no. 3, 361–372.

[7] A. Laurinčikas and R. Garunkštis, *The Lerch zeta-function.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[8] T. Matsusaka, *Real zeros of the Hurwitz zeta function*, Acta Arithmetica, **183** (2018), no. 1, 53–62. (arXiv: 1610.07945).

[9] T. Nakamura and Łukasz Pańkowski, *Value distribution for the derivatives of the logarithm of L-functions from the Selberg class in the half-plane of absolute convergence*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **433** (2016), no. 1, 566–577.

[10] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **160** (2016), no. 1, 39–50.

[11] T. Nakamura, *Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval* $(-1,0)$. J. Math. Anal. Appl. **438** (2016), no. 1, 42–52.

[12] T. Nakamura, *Functional equation and zeros on the critical line of the quadrilateral zeta function.* to appear in J. Number Theory, arXiv:1910.09837.

[13] T. Nakamura, *On zeros of zeta functions composed by the Hurwitz and periodic zeta functions.* preprint, arXiv:1910.10430.

[14] T. Nakamura, *On the real and complex zeros of the quadrilateral zeta function.* preprint, arXiv:2001.01981.

[15] T. Nakamura, *The values of zeta functions composed by the Hurwitz and periodic zeta functions at integers*, preprint, arXiv:2006.03300.

[16] T. Nakamura, *L-functions with Riemann's functional equation and real zeros of Dirichlet L-functions*, preprint, arXiv:2008.02570.

[17] C. Siegel *Bemerkung zu einem Satz von Hamburger uber die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion.* Math. Ann. **86** (1922), no. 3-4, 276–279.

[18] G. Shimura, *Elementary Dirichlet series and modular forms.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2007

[19] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function,* Second edition. Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[20] R. C. Vaughan, *Zeros of Dirichlet series.* Indag. Math. (N.S.) **26** (2015), no. 5, 897–909.