対相互作用模型の対角化と基底状態について

信州大学理学部・佐々木　格，宇佐美　京介
Itaru Sasaki and Kyosuke Usami
Department of Mathematics, Shinshu University

1　復習・主結果

この解説文は「RIMS 講究録量子場の数理とその周辺 2019」の佐々木の講究録の続きである[*1]。

フォック空間と関連する事柄についての定義や記号は教科書 [1], [5] にしたがう。$\mathscr{H}$ を可分な複素ヒルベルト空間とし，フォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上に作用するハミルトニアン

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi_{\mathrm{S}}(g_n)^2 \tag{1}$$

を考える。これによって定義される量子場の模型を対相互作用模型という。

ハミルトニアンを定める T, λ_n, g_n に対して，次の条件を定める：

(B1) $T > 0$。つまり T は非負で単射な自己共役作用素である。
(B2) $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $g_n \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$, $n = 1, 2, \cdots$
(B3) $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{-1/2} g_n\|^2 < \infty$
(B4) $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T^{1/2} g_n\|^2 < \infty$
(B5) ある $\varepsilon > 0$ があって，次の作用素の等式が成り立つ：

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|T^{-1/2} g_n\right\rangle \left\langle T^{-1/2} g_n\right| \geq \varepsilon$$

(B6) 次を満たす $\mathscr{H}$ 上の共役子 J が存在する：

$$JTJ = T, \qquad J g_n = g_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

---

*1 論文 [7] の後半の解説でもある。講演内容は松澤泰道氏 (信州大学) との共同研究に基づく。

定理 1. 仮定 (B1)–(B6) のもとで，H は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役かつ $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の任意の芯上で本質的に自己共役である。

(B1)–(B6) を仮定し，

$$S := \left(T^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|T^{1/2} g_n\right\rangle \left\langle T^{1/2} g_n\right|\right)^{1/2} \tag{2}$$

とすると (B5) より $S > 0$ である。作用素 $X, Y \in \mathcal{B}(\mathscr{H})$ を

$$X := \frac{1}{2}\left(\overline{T^{-1/2}S^{1/2}} + \overline{T^{1/2}S^{-1/2}}\right), \qquad Y := \frac{1}{2}\left(\overline{T^{-1/2}S^{1/2}} - \overline{T^{1/2}S^{-1/2}}\right) \tag{3}$$

によって定義し，$B(f) := \overline{A(Xf) + A(JYf)}$ とおくと，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U で

$$UB(f)U^* = A(f), \qquad f \in \mathscr{H} \tag{4}$$

を満たすものが存在する。この U を Bogoliubov 変換という。次が主定理である。

定理 2. (B1)–(B6) を仮定する。U を (4) を満たす Bogoliubov 変換とするとき

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E \tag{5}$$

となる。ここに，基底状態エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\overline{S - T}) \tag{6}$$

で与えられる。

主定理の証明のうち (5) を導出する対角化部分については，2019 年度の講究録で解説したのでそちらを参照していただきたい。本講究録では，次の第 2 節で (6) の導出を解説し，第 3 節で双極近似の Pauli-Fierz 模型を含む応用例について紹介する。

2 基底状態エネルギーの表示

この節では (6) の証明を行う。次は対角化 (5) の直接の帰結である。

命題 3. (B1)–(B6) を仮定する。このとき $\overline{YS^{1/2}}$ は Hilbert-Schmidt であり，

$$E = \langle \Omega, H\Omega \rangle - \|\overline{YS^{1/2}}\|_{\mathrm{HS}}^2. \tag{7}$$

Proof. まず，定理 2 から $H = U^* d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)U + E$ であり，これの真空期待値を取れば

$$E = \langle \Omega, H\Omega \rangle - \langle U\Omega, d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)U\Omega \rangle$$

となる（ここで定理 1 より $\Omega \in \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) = \mathrm{dom}(H)$ であることに注意）。つぎに，$S \geq 0$ なので $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathrm{dom}(S)$ を $\mathscr{H}$ の CONS とするとき

$$\langle U\Omega, d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)U\Omega \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \|A(S^{1/2}e_k)U\Omega\|^2 < \infty$$

が成り立つ。ここで (4) を使うと

$$\begin{aligned}\|A(S^{1/2}e_k)U\Omega\| &= \|U^*A(S^{1/2}e_k)U\Omega\| = \|B(S^{1/2}e_k)\Omega\| = \|A^*(JYS^{1/2}e_k)\Omega\| \\ &= \|JYS^{1/2}e_k\| = \|YS^{1/2}e_k\|\end{aligned}$$

となる。したがって，$\overline{YS^{1/2}}$ は Hilbert-Schmidt であり，(7) が成り立つ。 □

H の具体形 (1) を使って (7) を計算すると

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|\Phi_{\mathrm{S}}(g_n)\Omega\|^2 - \|\overline{YS^{1/2}}\|_{\mathrm{HS}}^2 \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \|g_n\|^2 - \mathrm{tr}(\overline{YSY^*}) \end{aligned} \tag{8}$$

となる。ここで $\overline{YS^{1/2}}(\overline{YS^{1/2}})^* = \overline{YSY^*}$ を用いた[*2]。

$\mathrm{tr}(\overline{YSY^*})$ を計算するために補題を用意する。

補題 4. (B1)–(B6) を仮定する。このとき，任意の $-1/2 \leq p, q \leq 1/2$ を満たす p, q に対して $T^p(S-T)T^q$ は稠密に定義された有界作用素であり，$\overline{T^p(S-T)T^q}$ はトレース型作用素である。

Proof. 証明の方針は S を $S = (2/\pi)\int_0^{\infty}(S^2+t^2)^{-1}t^2 dt$ と S^2 のレゾルベントで表わし，$S-T$ を積分表示することと，S^pT^{-p} が有界であることを適切に用いることである。詳細は [7] の Lemma 6.2 の証明を参照していただきたい。 □

---

*2 これは自明ではないが，今の仮定のもとでは $Y^* \mathrm{dom}(S) \subset \mathrm{dom}(S)$ が成り立ち，YSY^* が稠密に定義されることから示すことができる。

さて，Y の定義にしたがって，$\overline{YSY^*}$ を変形しよう。$\mathrm{dom}(T^k)=\mathrm{dom}(S^k)$ $(k=1,2)$ に注意すると，$\mathrm{dom}(T^2)\cap\mathrm{dom}(T^{-1/2})$ 上で

$$\begin{aligned}\overline{YSY^*}=YSY^*&=\frac{1}{4}\bigl(T^{-1/2}S^{1/2}-T^{1/2}S^{-1/2}\bigr)S\bigl(S^{1/2}T^{-1/2}-S^{-1/2}T^{1/2}\bigr)\\&=\frac{1}{4}\bigl(T^{-1/2}S^2T^{-1/2}-T^{-1/2}ST^{1/2}-T^{1/2}ST^{-1/2}+T\bigr)\\&=\frac{1}{4}\Bigl\{T^{-1/2}WT^{-1/2}+T^{-1/2}(T-S)T^{1/2}+T^{1/2}(T-S)T^{-1/2}\Bigr\}\end{aligned}$$

となる。最後の等式で $W:=\sum_{n=1}^{\infty}|T^{1/2}g_n\rangle\langle T^{1/2}g_n|$ として $S^2=T^2+W$ となることを使った。$\overline{T^{-1/2}WT^{-1/2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n|g_n\rangle\langle g_n|$ であり，これのトレースは $\sum_{n=1}^{\infty}\|g_n\|^2$ なので，(8) は

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\|g_n\|^2-\frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\|g_n\|^2+\mathrm{tr}\bigl(\overline{T^{-1/2}(T-S)T^{1/2}}+\overline{T^{1/2}(T-S)T^{-1/2}}\bigr)\right)\\&=\frac{1}{4}\mathrm{tr}\bigl(\overline{T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}}\bigr)+\frac{1}{4}\mathrm{tr}\bigl(\overline{T^{1/2}(S-T)T^{-1/2}}\bigr)\\&=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\bigl(\overline{T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}}\bigr)\end{aligned}\tag{9}$$

となる。上式の変形では，補題 4 により $\overline{T^{\pm1/2}(S-T)T^{\mp1/2}}$ がトレース型となることを用いた。さて，上のトレースを安易に

$$\mathrm{tr}\bigl(T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}\bigr)=\mathrm{tr}\bigl((S-T)T^{1/2}T^{-1/2}\bigr)=\mathrm{tr}(S-T)$$

と計算するのは論理的に誤りであり，式変形は慎重に議論する必要がある。補題 4 で $p=0,-1/2$ とすれば $\overline{(S-T)T^{1/2}}$ の値域は $\mathrm{dom}(T^{-1/2})$ に含まれ，

$$\overline{T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}}=T^{-1/2}\overline{(S-T)T^{1/2}}$$

が成り立つ[*3]。同様に，作用素の等式

$$\overline{T^{1/2}(S-T)}=T^{1/2}\overline{(S-T)}$$

も成り立つ。補題 4 より $\overline{(S-T)T^{1/2}}$ はトレース型作用素なので，$\mu_m>0$ と正規直交系 $\{e_m\}_m,\{f_m\}_m$ を用いて，それを

$$\overline{(S-T)T^{1/2}}=\sum_m\mu_m|e_m\rangle\langle f_m|$$

[*3] なぜなら $h\in\mathscr{H}$ に対して，$h_n\in\mathrm{dom}(T^{3/2})$ で $h_n\to h$, $(S-T)T^{1/2}h_n\to\overline{(S-T)T^{1/2}}h$ となるものを取れば，$T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}h_n$ は Cauchy 列である。したがって，$T^{-1/2}$ の閉性より $\overline{(S-T)T^{1/2}}h\in\mathrm{dom}(T^{-1/2})$ かつ $\overline{T^{-1/2}(S-T)T^{1/2}}h=T^{-1/2}\overline{(S-T)T^{1/2}}h$ となるから。

と表すことができる。ここから，

$$\overline{(S-T)T^{1/2}}f_m = \mu_m e_m, \qquad \left(\overline{(S-T)T^{1/2}}\right)^* e_m = \mu_m f_m,$$

と

$$\begin{aligned} &(\{f_m\}_m)^\perp \subset \ker(\overline{(S-T)T^{1/2}}), \\ &(\{e_m\}_m)^\perp \subset \ker\left(\left(\overline{(S-T)T^{1/2}}\right)^*\right) = \ker(T^{1/2}(\overline{S-T})) = \ker(\overline{S-T}) \end{aligned}$$

がしたがう。以上を用いると (9) は次のように変形することができる：

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\;\mathrm{tr}\big(T^{-1/2}\overline{(S-T)T^{1/2}}\big) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_m \left\langle f_m, T^{-1/2}\overline{(S-T)T^{1/2}}f_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_m \left\langle f_m, T^{-1/2}\mu_m e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_m \left\langle \mu_m f_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_m \left\langle \left(\overline{(S-T)T^{1/2}}\right)^* e_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_m \left\langle \overline{T^{1/2}(S-T)} e_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_m \left\langle T^{1/2}\overline{(S-T)} e_m, T^{-1/2} e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_m \left\langle \overline{(S-T)} e_m, e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_m \left\langle \overline{(S-T)} e_m, e_m \right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\overline{S-T}). \end{aligned}$$

したがって，$E = (1/2)\mathrm{tr}(\overline{S-T})$ である。（証明終）

3　例

主定理を用いて，以下の量子場の模型の対角化を解説を行う。

(1) 単純な対相互作用模型 (場の 2 次の相互作用が一項だけの場合)

(2) 調和振動子とボース場の結合模型
(3) x^2 ポテンシャルを持つ双極近似の Pauli-Fierz 模型
(4) 並進不変な双極近似の Pauli-Fierz 模型

(4) の場合はハミルトニアンの対角化だけでなく，基底状態が存在する（または存在しない）為の条件についての結果も紹介する。

上の例の対角化には先行研究があり，新井 [2, 3, 4, 6] によって議論されている。それらでは，ハミルトニアンの対角化する Bogoliubov 変換を構成する為に散乱理論が使われたが，定理 2 を用いることでより機械的に対角化することができる。ただし，対角化後の 1 粒子ハミルトニアンのスペクトル解析は別に行わなければならない。

3.1 単純な対相互作用模型

$T > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $g \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ を仮定し，ハミルトニアン

$$H = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{\lambda}{2}\Phi_{\mathrm{S}}(g)^2 \tag{10}$$

を考える。この模型を対角化するためには，(B1)–(B6) を確かめればよい。明らかに (B1)–(B4) は成り立つ。この模型では (B6) は次の補題から自動的に従う。

補題 5. 可分な複素ヒルベルト空間 $\mathscr{K}$ 上の任意の自己共役作用素 A と $h \in \mathscr{K}$ に対して，$AJ = JA$, $Jh = h$ を満たす $\mathscr{K}$ 上の共役子 J が必ず存在する。

Proof. 証明のアイディアは次のとおりである。まず，A を掛け算作用素にユニタリ変換し $A \to \hat{A}(m)$，$h \to \hat{h}(m)$ とする。つぎに $\hat{h}(m)$ の偏角の複素共役による掛け算を行い $\hat{h}(m) \to |\hat{h}(m)|$ とする。この操作もユニタリであり $\hat{A}(m)$ は不変である。このとき，$\hat{A}(m)$ と $|\hat{h}(m)|$ は実数値なので複素共役で不変である。複素共役をとる共役子，偏角の掛け算とユニタリ変換で戻る操作の合成を J とすれば，これは $\mathscr{K}$ 上の共役子であり補題の条件を満たすものである。詳細は [7] を参照。 □

条件 (B5) は，

$$1 + \lambda \, |T^{-1/2}g\rangle \, \langle T^{-1/2}g| > \varepsilon \tag{11}$$

となる $\varepsilon > 0$ が存在することであるが，これは

$$1 + \lambda \|T^{-1/2}g\|^2 > 0 \tag{12}$$

と同値であることは簡単に確かめられる。したがって次の定理を得る

定理 6. $1+\lambda\|T^{-1/2}g\|^2>0$ とする。このとき，(B5) が成立する。したがって，(10) で定義される H は下に有界な自己共役作用素であり，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U で次を満たすものが存在する。

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}\Big(\sqrt{T^2+\lambda\,|T^{1/2}g\rangle\,\langle T^{1/2}g|}\Big)+E, \tag{13}$$

ここで E は H の基底状態エネルギーであり

$$E=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\Big(\sqrt{T^2+\lambda\,|T^{1/2}g\rangle\,\langle T^{1/2}g|}-T\Big) \tag{14}$$

である。

3.2 調和振動子とボース場の結合模型

ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上に作用するハミルトニアン

$$H:=\frac{1}{2}(p^2+\omega^2x^2)\otimes 1+1\otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)+\lambda x\otimes\Phi_{\mathrm{S}}(g) \tag{15}$$

を考える。ここで $p=-id/dx$, x は掛け算作用素，$\lambda\in\mathbb{R}$ と $\omega>0$ は定数であり，$T>0$ は $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素である。$g\in\mathrm{dom}(T^{1/2})\cap\mathrm{dom}(T^{-1/2})\setminus\{0\}$ とすれば，定義域について，

$$\mathrm{dom}(x\otimes\Phi_{\mathrm{S}}(g))\supset\mathrm{dom}(x^2\otimes 1)\cap\mathrm{dom}(1\otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)) \tag{16}$$

なので，$\mathrm{dom}(H)=\mathrm{dom}(p^2+x^2)\cap\mathrm{dom}(1\otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ である。

定理 7. $|\lambda|<\omega\|T^{-1/2}g\|^{-1}$ とする。このとき，H は自己共役であり，ユニタリ作用素 $L^2(\mathbb{R})\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})\to\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}\oplus\mathscr{H})$ が存在して，

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}\left(\begin{pmatrix}\omega^2 & \lambda\,|1\rangle\,\langle T^{1/2}g| \\ \lambda\,|T^{1/2}g\rangle\,\langle 1| & T^2\end{pmatrix}^{1/2}\right)+E, \tag{17}$$

ここで，

$$E=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sqrt{\begin{pmatrix}\omega^2 & \lambda\,|1\rangle\,\langle T^{1/2}g| \\ \lambda\,|T^{1/2}g\rangle\,\langle 1| & T^2\end{pmatrix}^{1/2}-\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & T^2\end{pmatrix}}\right).$$

さて，ハミルトニアン (15) を対角化する為に，基本となるのは次の構造である：$\mathscr{H}_1,\mathscr{H}_2$ をヒルベルト空間とするとき，2 つのフォック空間 $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2)$ と

$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_1)\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}_2)$ の間には関係式

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{S}}(f_1 \oplus f_2) &\cong \overline{\Phi_{\mathrm{S}}(f_1)\otimes 1 + 1\otimes\Phi_{\mathrm{S}}(f_2)},\\ \Omega &\cong \Omega\otimes\Omega.\end{aligned}$$

を満たすような自然な同型が存在する [1, p.208]。

また，$L^2(\mathbb{R})$ 上の消滅作用素を $a = 2^{-1/2}(\omega^{1/2}x + i\omega^{-1/2}p)$ と定義すると，同型 $u : L^2(\mathbb{R}) \to \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C})$ で

$$uau^* = A(1), \qquad u(\omega/\pi)^{1/2}exp(-\omega x^2/2) = \Omega$$

となるものが存在する。この同型も $\cong$ で書けば，調和振動子のハミルトニアンと x は，それぞれ

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(p^2+\omega^2x^2) = \frac{\omega}{2}(a^*a+1) \cong d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega) + \frac{\omega}{2}\\ &x = \omega^{-1/2}(a+a^*)/\sqrt{2} \cong \omega^{-1/2}\Phi_{\mathrm{S}}(1)\end{aligned}$$

となる[*4]。したがって，ハミルトニアン (15) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}H &\cong d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega)\otimes 1 + 1\otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \omega^{-1/2}\lambda\Phi_{\mathrm{S}}(1)\otimes\Phi_{\mathrm{S}}(g) + \frac{\omega}{2}\\ &\cong d\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega\oplus T) + \frac{\omega^{-1/2}\lambda}{4}\Big\{\Phi_{\mathrm{S}}(1,g)^2 - \Phi_{\mathrm{S}}(1,-g)^2\Big\} + \frac{\omega}{2}\\ &= \tilde{H} + \frac{\omega}{2}.\end{aligned}$$

このとき，$\tilde{H}$ はハミルトニアン (1) の形であり，記号の対応は

$$T \to \omega\oplus T, \qquad \lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{\omega^{-1/2}\lambda}{2}, \qquad g_1 = (1,g), \qquad g_2 = (1,-g)$$

である。定理 7 の証明のためには (B1)–(B6) を確認すればよいが，(B1)–(B4) は自明，(B5) も補題 5 から成り立つ。いまの場合，(B5) は

$$K := 1 + \lambda_1 \left|(\omega,T)^{-1/2}g_1\right\rangle \left\langle(\omega,T)^{-1/2}g_1\right| - \lambda \left|(\omega,T)^{-1/2}g_2\right\rangle \left\langle(\omega,T)^{-1/2}g_2\right| > 0$$

である。K は部分空間 $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}T^{-1/2}g$ を簡約し，直交部分は恒等作用素である。簡約部分は 2×2 行列

$$\begin{pmatrix} 1 & \omega^{-1}\lambda\|T^{-1/2}g\| \\ \omega^{-1}\lambda\|T^{-1/2}g\| & 1\end{pmatrix}$$

[*4] 作用素の閉包の記号は省略した。

となる。したがって，これの固有値問題を解けば，λ が定理の条件を満たすことと，上の行列は正定値が正定値であることが同値であることがわかる。したがって (B5) が成り立つ。

3.3　x^2 ポテンシャルを持つ双極近似の Pauli-Fierz 模型の対角化

$L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ に作用するハミルトニアン

$$H := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(p_j\otimes 1 + 1\otimes\Phi_{\mathrm{S}}(g_j))^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\omega_j^2 x_j^2\otimes 1 + 1\otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \tag{18}$$

を考える。ここで $\omega_j > 0$ は定数，$T > 0$，$g_1, \cdots, g_d \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ とする。$p_j = -i\partial/\partial x_j$ である。

定理 8. $\mathscr{H}$ 上の共役子 J が存在して $TJ = JT$, $Jg_j = g_j$，$j = 1, \cdots, d$ とする。このとき，H は自己共役であり，ユニタリ作用素 $U : L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H}) \to \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathbb{C}^d \oplus \mathscr{H})$ が存在して

$$UHU^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}\left(\sqrt{\mathrm{diag}(\omega_1^2, \cdots, \omega_d^2) \oplus T^2 + W}\right) + E \tag{19}$$

となる。ここで

$$E = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\sqrt{\mathrm{diag}(\omega_1^2, \cdots, \omega_d^2) \oplus T^2 + W} - \mathrm{diag}(\omega_1, \cdots, \omega_d) \oplus T\right) + \sum_{j=1}^{d}\frac{\omega_j}{2}, \tag{20}$$

であり，W は $\mathbb{C}^d \oplus \mathscr{H}$ 上の作用素で

$$W := \sum_{j=1}^{d}\begin{pmatrix} 0 & \omega_j\,|e_j\rangle\,\langle T^{1/2}g_j| \\ \omega_j\,|T^{1/2}g_j\rangle\,\langle e_j| & |T^{1/2}g_j\rangle\,\langle T^{1/2}g_j| \end{pmatrix} \tag{21}$$

と定義されるものである。

定理 8 の証明は，定理 7 のそれとほぼ同じであるが，共役子 J に関する部分に少し注意しておく。J_0 を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の単に複素共役を取る共役子とすると，$J_0 x = J_0 x$ だが $J_0 p = -pJ_0$ である。したがって，(18) をそのまま (1) の形にしたときに，T と g_n を同時に不変にする共役子を見つけづらい。これを回避するために，調和振動子のハミルトニアンがフーリエ変換で不変であることを利用する。フーリエ変換では $p_j \leftrightarrow x_j$ となり，調和振動子のハミルトニアンは不変であり，$p_j\otimes\Phi_{\mathrm{S}}(g_j) \leftrightarrow x_j\otimes\Phi_{\mathrm{S}}(g_j)$ とな

る。すると，粒子と場の相互作用項は前節と同じ形を取る。したがって，共役子に関する議論を前小節と同じに行うことができる[*5]。

3.4 並進不変な双極近似の Pauli-Fierz 模型

$L^2(\mathbb{R}^d, dx)\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のハミルトニアン

$$H := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(p_j\otimes 1 + 1\otimes\Phi_{\mathrm{S}}(g_j)\right)^2 + 1\otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \tag{22}$$

を考える。これは前小節で $\omega_j = 0$ $(j = 1, \ldots, d)$ としたものである。$T > 0$ は自己共役，$g_j \in \mathrm{dom}(T^{1/2}) \cap \mathrm{dom}(T^{-1/2})$ $(j = 1, \cdots, d)$ と仮定する。

$\mathscr{F}_d$ を $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ から $L^2(\mathbb{R}^d, dP)$ へのフーリエ変換とし，H を変換すると $p_j = -i\partial/\partial x_j$ は変数 P_j による掛け算作用素となる。そこで $P = (P_1, \cdots, P_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上の作用素

$$H(P) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\left(P_j + \Phi_{\mathrm{S}}(g_j)\right)^2 + 1\otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \tag{23}$$

$$= d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\Phi_{\mathrm{S}}(g_j)^2 + \sum_{j=1}^{d}P_j\Phi_{\mathrm{S}}(g_j) + \sum_{j=1}^{d}\frac{P_j^2}{2} \tag{24}$$

を定義する。

以下，$H(P)$ を対角化するために，TJT, $Jg_j = g_j$, $j = 1, \cdots, d$ となる $\mathscr{H}$ 上の共役子が存在すると仮定する。

$$H_0 := d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}\Phi_{\mathrm{S}}(g_j)^2 \tag{25}$$

は $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ 上で自己共役であり，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(\mathscr{H})$ 上のユニタリ作用素 U で

$$UH_0U^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + E, \qquad S := \sqrt{T^2 + \sum_{j=1}^{d}|T^{1/2}g_j\rangle\langle T^{1/2}g_j|}, \tag{26}$$

[*5] 論文 [7] では，より直接に共役子を構成しているが，フーリエ変換を使った議論のほうがわかりやすいかもしれない。

$E = \mathrm{tr}(\overline{S-T})/2$ となるものが存在する。このとき, $U\Phi_{\mathrm{S}}(g_j)U^* = \Phi_{\mathrm{S}}(S^{-1/2}T^{1/2}g_j)$ なので

$$UH(P)U^* = d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + \Phi_{\mathrm{S}}\Big(S^{-1/2}T^{1/2}\sum_{j=1}^{d} P_j g_j\Big) + \sum_{j=1}^{d}\frac{P_j^2}{2} + E \tag{27}$$

となる。$S^{-1/2}T^{1/2}g_j \in \mathrm{dom}(S^{-1/2})$ なので，$UH(P)U^*$ は $\mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)) = \mathrm{dom}(d\Gamma_{\mathrm{b}}(T))$ 上で自己共役であることに注意する。(27) は van-Hove 模型*6なので対角化可能性は赤外正則条件を調べる事と同値である。ここでは，$H(P)$ の基底状態の存在に関する結果を紹介する。

定理 9. 次の 2 つは同値である。

(a) すべての $P \in \mathbb{R}^d$ について $H(P)$ の基底状態が存在する。
(b) $g_j \in \mathrm{dom}(T^{-1}), j = 1, \cdots, d$.

Proof. 各 $P \in \mathbb{R}^d$ について $H(P)$ が基底状態を持つことの必要十分条件は

$$S^{-1/2}T^{1/2}\sum_{j=1}^{d} P_j g_j \in \mathrm{dom}(S^{-1}) \tag{28}$$

である*7。これは明らかに

$$T^{1/2}\sum_{j=1}^{d} P_j g_j \in \mathrm{dom}(S^{-3/2}) \tag{29}$$

と同値である。もし，

$$\mathrm{dom}(S^{-3/2}) = \mathrm{dom}(T^{-3/2}) \tag{30}$$

が成り立てば，(b)→(a) がしたがう。(30) は非自明であり，おそらく一般には不成立と思われる。しかし $g_j \in \mathrm{dom}(T^{-1})$ $(j = 1, \cdots, d)$ の仮定のもとで (30) を示すことができる ([7, Lemma B.1])。

一方，(a) を仮定すれば，(29) から各 j について $T^{1/2}g_j \in \mathrm{dom}(S^{-3/2})$ となる。(30) が成り立てば $g_j \in \mathrm{dom}(T^{-3/2})$ となるので (b) がしたがうのだが，いまの条件のもとでは (30) を直接示すのはおそらく難しい。(b) を示すためにはより込み入った議論が必要になる。詳細は [7, Theorem 7.5] に譲る。 □

---

*6 [1](下) p.241
*7 文献については [7] を参照

上の結果では，g_j には一般性をもたせていたが，より現実的な Pauli-Fierz 模型では，g_j は偏極ベクトルで作られ，関係式

$$\left\langle T^{-1/2}g_j, T^{-1/2}g_\ell \right\rangle = \|T^{-1/2}g_1\|^2\delta_{j\ell}, \qquad j,\ell = 1,\cdots,d \tag{31}$$

が成り立つ。この条件のもとでは，より強い次の結果が成り立つ。

定理 10. 条件 (31) を仮定する。このとき，任意の $P \in \mathbb{R}^d$ に対して $H(P)$ の基底状態エネルギー $E(P)$ は

$$E(P) = \frac{1}{2(1+\|T^{-1/2}g_1\|^2)}\sum_{j=1}^{d} P_j^2 + E \tag{32}$$

となる。さらに次は同値である。

(i) $H(P)$ は基底状態を持つ。
(ii) $\sum_{j=1}^d P_j g_j \in \mathrm{dom}(T^{-1})$.

Proof. アイディアだけ紹介する。$A = 1 + \sum_{j=1}^d |T^{-1/2}g_j\rangle\langle T^{-1/2}g_j|$ とおくと，$S^2 = TAT$ であり，直交性 (31) のもとでは，逆作用素が

$$A^{-1} = 1 - \frac{1}{1+\|T^{-1/2}g_1\|^2}\sum_{j=1}^{d} |T^{-1/2}g_j\rangle\langle T^{-1/2}g_j|$$

と求まる。したがって $S^{-2} = T^{-1}A^{-1}T^{-1}$ から S^{-2} を g_j を用いて具体的に表すことができる。$g := \sum_{j=1}^d P_j g_j$ とおくとき $H(P)$ が基底状態を持つことと $T^{1/2}g \in \mathrm{dom}(S^{-3/2})$ は同値だが，もしこれが成り立つとすると，上の S^{-2} の具体形から $T^{-1}g$ を

$$T^{-1}g = \frac{1}{1+\|T^{-1/2}g_1\|^2}(S^{-1/2}T^{1/2})^* S^{-3/2}T^{1/2}g$$

と具体的に表すことができ，ここから (ii) $g \in \mathrm{dom}(T^{-1})$ がしたがう。逆も，S^{-2} の表示を使い $S^{-1/2}T^{1/2}$ が有界であることに注意すればよい。 □

定理 9 の条件 (a) はすべての $P \in \mathbb{R}^d$ に関するものだが，定理 10 の条件 (i) や (ii) は固定した $P \in \mathbb{R}^d$ に関するものである事に注意。

4 最後に

この研究は JSPS 科研費 16K17612，20K03628 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] 新井朝雄, フォック空間と量子場（上，下），増補改訂版, 日本評論社, 2017

[2] A. Arai, On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field. I, *J. Math. Phys.*, **22**, 2539–2548, (1981)

[3] A. Arai, Rigorous theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics, *J. Math. Phys.*, **24**, 1896–1910, (1983)

[4] A. Arai, A note on scattering theory in non-relativistic quantum electrodynamics, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **16**, 49–70, (1983)

[5] A. Arai, *Analysis on Fock spaces and Mathematical theory of quantum fields*, World Scientific, (2018)

[6] K. Asahara and D. Funakawa, Spectral analysis of an abstract pair interaction model, to appear in *Hokkaido Math. J.*, arXiv:1807.08408v1

[7] Y. Matsuzawa, I. Sasaki, K. Usami, Explicit diagonalization of pair interactin models, *Anal. Math. Phys.*, to appear, (2021)