

## 第 3 章

# 通勤ラッシュアワーにおける ピークロード問題\*

### 3-1 はじめに

朝の出勤ラッシュアワーにおける交通渋滞は、多くの都市で共通に見られる代表的な交通問題である。朝 7 時台から徐々に混雑が始まり、8 時 30 分から 9 時にかけて最も激しくなった後、9 時を過ぎて解消に向かうというのが、毎日のように繰り返される典型的なパターンである。このような道路利用の時間的変動は資源配分上どのような点で問題なのか、またこれに対しどのような政策をとるべきか、などの問いに答えることが本章の目的である。

ラッシュアワーにおける混雑の時間変動は、人々のトリップ時刻選択の結果である。都心部にあるほとんどの企業は朝の 9 時に業務を開始するので、その時刻ちょうどにオフィスに到着することがすべての労働者にとって望ましい。しかし交通容量の制約があるので、そのような交通パターンは実現不可能である。したがって一部の労働者は、始業時刻よりも早くオフィスに到着することになる。オフィスに到着してもすぐに仕事を始められるわけではないので、始業時刻まで待機することになるが、この待機時間の機会費用をスケジューリン

---

\* 本章は、Mun (1999) およびそれを改訂した文 (2001) に基づいている。改訂に際しては桑原雅夫教授より重要なご指摘をいただき、モデルの再定式化と数値計算をやり直した。また Ken Small, Robin Lindsey の両教授からも貴重なコメントをいただいた。

グ費用と呼ぶ。個々の労働者は、早めにオフィスに着くよう出発すると、比較的交通混雑による遅れが少なく済むが、オフィスにおけるスケジューリング費用が大きくなるというトレードオフに直面する。

本章では、朝のラッシュアワーにおいて、各労働者が混雑とスケジューリング費用とのトレードオフを考慮して出発時刻を選択する行動を定式化し、時刻別道路利用の均衡解とその社会的効率性を分析する。

以下、3-2節ではまず通勤ラッシュアワーにおける労働者の出発時刻選択のモデルを提示し、均衡および最適な出発時刻分布を求める問題を定式化する。3-3節では、ラッシュアワーの問題について従来から研究されてきた代表的なモデル、すなわち Henderson (1981) によるフロー混雑モデル、および Vickrey (1969), Arnott *et al.* (1990a) によるボトルネック・モデルに基づく分析を紹介する。そして3-4節では、第2章で定式化した交通渋滞の動的モデルに基づいて同じ問題を分析し、このモデルが従来のモデルを特殊ケースとして含むという意味でより一般的であることを示す。3-5節では、数値シミュレーションを通じて、均衡および最適な道路利用のパターンと経済厚生の関係について分析する。

## 3-2 通勤ラッシュアワーにおける均衡と最適

### 3-2-1 出発時刻選択と均衡

毎朝、 $N$  人の労働者が郊外の住宅地から業務地区 (CBD) にある勤務先まで車で通勤するものとする。通勤費用は、トリップ時間費用とスケジューリング費用および道路料金 (課される場合) から成る。トリップ時間費用は、住宅地から勤務先までのトリップのため道路を走行する時間に関する機会費用である。スケジューリング費用は、始業時刻よりも職場に早く着いたり、遅く着くことによって発生する。前者の場合は始業時刻までの待ち時間による機会費用、後者の場合は遅刻によるペナルティである。時刻  $t$  に自宅を出発したドライバーの通勤費用  $C(t)$  は次のように表される。

$$C(t) = \alpha T(t) + \beta(\hat{t} - t - T(t)) + \tau(t), \quad \text{if } t + T(t) \leq \hat{t}$$

(3-1a)

$$C(t) = \alpha T(t) + \gamma(t + T(t) - \hat{t}) + \tau(t), \quad \text{if } t + T(t) > \hat{t} \quad (3-1b)$$

ここで  $T(t)$  はトリップに要する時間、 $\tau(t)$  は通行料金である。そして  $\alpha$  は走行時間の金銭的評価値、 $\beta$ 、 $\gamma$  はそれぞれ、早着による待機時間の価値、遅刻時間当たりペナルティである。なお  $\beta < \alpha < \gamma$  を仮定する<sup>1)</sup>。また  $\hat{t}$  は始業時刻である。本章では、CBDにある全企業の始業時刻が同一であると仮定する。 $t + T(t)$  は時刻  $t$  に出発した人が職場に着く時刻なので、(3-1a) は早着する場合の通勤費用、(3-1b) は遅刻する場合の通勤費用である。

各通勤者は通勤費用を最小化するように出発時刻を選択する。労働者は始業時刻ちょうどに職場に着けばスケジューリング費用はかからない。しかしすべての労働者が始業時刻ちょうどに着くことは不可能なので、大半の者は始業時刻の前か後に着くことになる。均衡は、どの個人も出発時刻を変更する誘因を持たなくなるような状態と定義される。そのような状態は、出発時刻にかかわらず通勤費用が一定であるとき達成される。したがって均衡条件は次のように書ける。

$$\alpha T(t) + \beta(\hat{t} - t - T(t)) + \tau(t) = C^*, \quad \text{if } t_1 \leq t \leq \hat{t} - T(t) \quad (3-2a)$$

$$\alpha T(t) + \gamma(t + T(t) - \hat{t}) + \tau(t) = C^*, \quad \text{if } \hat{t} - T(t) < t \leq t_2 \quad (3-2b)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} Q(t) dt = N \quad (3-2c)$$

ここで  $t_1$ 、 $t_2$  は、それぞれ、 $N$  人のドライバーのうち最も早く出る者、最も遅く出る者の出発時刻である。すなわちラッシュアワーの開始時刻、終了時刻である。また  $Q(t)$  は時刻  $t$  に住宅地を出発する労働者の数であり、それは道路の入り口における交通量に等しい。 $Q(t)$  の単位は (人/分) であり、出発率とも呼ばれる。そして  $C^*$  は、均衡時に各ドライバー間で等しくなる通勤費用である。(3-2c) 式の左辺はラッシュアワーの間に出発した労働者の総数である。

いま道路の通行料金が課されない、すなわち  $\tau(t) = 0$  であるものとする。そ

1)  $\beta < \alpha$  は、オフィスにいれば車の中で過ごすよりも何かしら有用なことが行えるということを考慮すると妥当である。また遅刻によるペナルティは旅行時間より高い。すなわち  $\alpha < \gamma$  も自然な仮定である。以上の関係は、Small (1982) による実証研究でも確認されている。

して (3-2a), (3-2b) 式の両辺を時間に関して微分すると, 次の式が得られる.

$$\dot{T}(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{\alpha - \beta}, & \text{if } t_1 \leq t \leq \tilde{t} - T(t) \\ -\frac{\gamma}{\alpha + \gamma}, & \text{if } \tilde{t} - T(t) < t \leq t_2 \end{cases} \quad (3-3)$$

これは無料金均衡の条件式である.  $\dot{T}(t)$  はトリップ時間の時刻に関する導関数であるが, その具体的な形は, 交通混雑のモデルをどのように定式化するかに依存する.

### 3-2-2 最適な道路利用

総トリップ数が与えられているので, 社会的に最適な道路利用はラッシュアワー中の総通勤費用を最小化することである. したがって, 目的関数は次のように書ける.

$$V = \int_{t_1}^{\tilde{t}} C^1(t) Q(t) dt + \int_{\tilde{t}}^{t_2} C^2(t) Q(t) dt \quad (3-4a)$$

ここで

$$C^1(t) = \alpha T(t) + \beta(\tilde{t} - t - T(t)) \quad (3-4b)$$

$$C^2(t) = \alpha T(t) + \gamma(t + T(t) - \tilde{t}) \quad (3-4c)$$

上式における  $C^1(t)$ ,  $C^2(t)$  は, それぞれ始業時刻よりも早く着く者, 遅く着く者の通勤費用である. また  $\tilde{t}$  は, ちょうど始業時刻に着く者が自宅を出発する時刻である. すなわち  $\tilde{t} + T(\tilde{t}) = \hat{t}$  が成り立つ. 解くべき問題は, (3-2c) 式の制約のもとで総通勤費用を最小化するような交通量の時間配分  $Q(t)$  を求めることである.

## 3-3 交通混雑のモデルとピークロード問題

朝のラッシュアワーにおけるピークロード問題については, 混雑のモデル化に際して, 大別すると2通りのアプローチがなされており, それらは混雑料金の効果に対して異なった結論を導いている. Henderson (1981) は, 道路の走行費用が交通量の単調増加関数であると仮定したモデルに基づいてこの問題を分析した. 彼は, 混雑料金を導入した場合, 無料金均衡に比べ社会的最適解に

におけるラッシュアワーの長さが長くなる、すなわち出発時刻分布がより分散することを示した。その結果、混雑料金を課すことによってドライバーの厚生は悪化する。一方、Vickrey (1969) および Arnott *et al.* (1990a) らは、ボトルネックにおける待ち行列として混雑をモデル化している。このモデルでは、無料金均衡と社会的最適解におけるラッシュアワーの長さが等しくなり、ドライバーの厚生、すなわちドライバーの負う私的費用は混雑料金を課しても変化しないという結果が得られる。

上の2通りのモデルによる分析結果は大きく異なっている。以下では、これらについて詳細に検討することにする<sup>2)</sup>。

### 3-3-1 Henderson のフロー混雑モデル

Henderson (1981) は、トリップ時間が交通量の単調増加関数であると仮定してピークロード問題を分析した。すなわち、トリップ時間を次のように定式化する。

$$T(t) = h(Q(t)), \quad h'(1) = 0, \quad h'(Q) > 0, \quad h''(Q) \geq 0$$

上の仮定に従えば、時刻の進行に伴うトリップ時間の推移は  $\dot{T}(t) = h'Q(t)$  となるが、これを無料金均衡の条件である (3-3) 式に適用すると、次が得ら

2) 同様の枠組みで通勤ラッシュアワーを取り扱った研究は、Mahmassani and Herman (1984), Newell (1988), Chu (1993, 1995), 坂下 (1994) らによっても行われている。Mahmassani and Herman (1984) は、速度-密度関係に基づいて定義された走行費用関数を用いたモデルを定式化している。このモデルは、均一な道路区間を対象としているにもかかわらず、均衡において渋滞が生じるとしている。しかし Newell (1988) も指摘したように、ボトルネックのない道路区間では渋滞は起こりえない。またこのようなモデルに基づく分析は、後で出発した車が早く目的地に到着するという奇妙な結果を導くことが、Chu (1993) によって指摘されている。Newell (1988) は、流体理論に沿って厳密に定式化されたモデルに基づいて利用者均衡および社会的に最適な出発時刻分布を導いている。しかし均一な道路区間を対象としているので、渋滞に関する分析は行われていない。坂下 (1994) は、Mahmassani and Herman (1984) とほぼ同様のモデルに基づいて最適な出発時刻分布を導いている。その結果、最適な交通量は時間を通じて一定であり、それは道路区間の容量に等しいという結果を得ている。さらに Chu (1995) は、Henderson のモデルにおける走行費用を到着地の交通量の関数として再定義し、同様の分析を行った。しかし交通流のモデルとしてそのような費用関数の正当性は疑問である。いずれにせよ、以上のモデルは、ボトルネックのない均一な道路区間を想定しており、渋滞現象を明示的に分析することはできない。

れる<sup>3)</sup>.

$$\dot{Q}(t) = \frac{\beta}{(\alpha - \beta)h'} > 0, \quad \text{if } t_1^* \leq t \leq \hat{t} - T(t) \quad (3-5a)$$

$$\dot{Q}(t) = -\frac{\gamma}{(\alpha + \gamma)h'} < 0, \quad \text{if } \hat{t} - T(t) < t \leq t_2^* \quad (3-5b)$$

ここに  $t_1^*$ ,  $t_2^*$  は、それぞれ、均衡におけるラッシュアワーの開始時刻と終了時刻である。上の式より早着時間帯には交通量が時間とともに増加し、遅着時間帯には減少する。上の式をさらにもう一度時間について微分すると、早着・遅着のいずれの場合でも  $\ddot{Q}(t) < 0$  となることがわかる。したがって、早着時間帯において交通量の増加率は時刻とともに逓減し、遅着時間帯では減少率が逓増する。

一方、最適な道路利用の条件は、上の  $T(t)$  を3-2-2項で定式化した問題に適用することにより求められる。すなわち

$$(\alpha - \beta)\{h + h'Q(t)\} + \beta(\hat{t} - t) = C^0, \quad \text{if } t_1^0 \leq t \leq \hat{t} - T(t) \quad (3-6a)$$

$$(\alpha + \gamma)\{h + h'Q(t)\} + \gamma(t - \hat{t}) = C^0, \quad \text{if } \hat{t} - T(t) < t \leq t_2^0 \quad (3-6b)$$

ここで  $t_1^0$ ,  $t_2^0$  は、それぞれ、最適なラッシュアワーの開始時刻と終了時刻である。無料金均衡の場合と同様に (3-6) 式の両辺を時間で微分すると、次が得られる。

$$\dot{Q}(t) = \frac{\beta}{(\alpha - \beta)(2h' + h''Q(t))} > 0, \quad \text{if } t_1^0 \leq t \leq \hat{t} - T(t) \quad (3-7a)$$

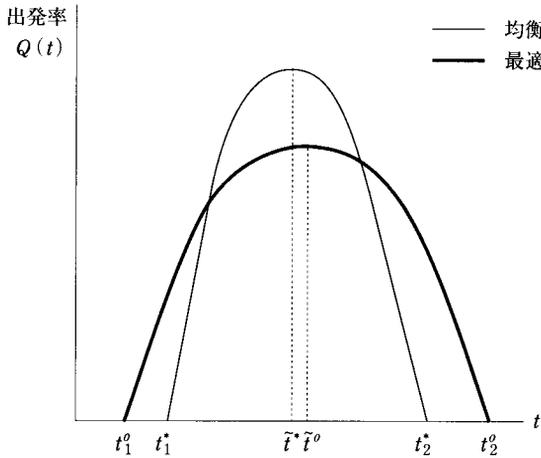
$$\dot{Q}(t) = -\frac{\gamma}{(\alpha + \gamma)(2h' + h''Q(t))} < 0, \quad \text{if } \hat{t} - T(t) < t \leq t_2^0 \quad (3-7b)$$

(3-5) の場合と同様、上の式についても  $\ddot{Q}(t) < 0$  となる。したがって、出発率関数  $Q(t)$  の形状は無料金均衡と同様である。

このような最適解を分権的に達成するための混雑料金は、(3-6) 式を (3-2) 式と対応させることにより、次のように求められる。

3) Henderson (1981) におけるスケジューリング費用は、本章の3-2節で定式化したものとは異なる。彼はオフィスへの希望到着時刻との乖離ではなく、自宅での希望出発時刻との乖離についてスケジューリング費用を定義している。また、スケジューリング費用関数が希望出発時刻を中心にして対称的な形を仮定している。しかしこのような違いは、結果に本質的な影響を与えないので、比較が容易になるように3-2節の定義に沿って定式化している。

図 3-1 Henderson のモデルによる均衡と最適



$$\tau(t) = \begin{cases} (\alpha - \beta) h'Q(t), & \text{if } t_1^0 \leq t \leq \tilde{t} - T(t) \\ (\alpha + \gamma) h'Q(t), & \text{if } \tilde{t} - T(t) < t \leq t_2^0 \end{cases} \quad (3-8)$$

上の式において  $h'Q(t)$  は時刻  $t$  に出発する労働者が 1 人増えることにより、その時刻に道路を利用するすべての者が被る旅行時間の増加分である。最適な混雑料金はこのような混雑の外部効果に等しくなるよう設定する必要がある。なお、最初に出発する通勤者にとっては  $\tau(t) = 0$  である。

図3-1には、以上の分析をふまえて無料金均衡および社会的最適のもとでの出発率の時間変動が描かれている。図では社会的最適のもとでの出発率曲線の勾配が無料金均衡のときよりも緩やかに描かれている。これは (3-7) 式を (3-5) 式と比較すると、社会的最適のもとでの  $Q(t)$  の絶対値が無料金均衡のもとでのそれよりも、あらゆる時刻において小さくなるからである。この関係と、両ケースとも曲線の下側の面積が  $N$  に等しいことを考慮すると、社会的最適の出発分布は無料金均衡の場合よりも前後に広がらねばならない。したがって、ラッシュアワーは社会的最適の方が早く始まり、遅くまで続く。すなわち  $t_1^0 < t_1^*$ 、 $t_2^0 > t_2^*$  である。このことは社会的最適のもとでのラッシュアワーが無料金均衡の場合よりも長いことを意味する。また図では  $\tilde{t}^* < \tilde{t}^0$  となっているが、これは  $Q(\tilde{t}^*) > Q(\tilde{t}^0)$  であることを考慮して、 $\tilde{t}^* + T(\tilde{t}^*) = \tilde{t}$  と

$\tilde{t}^0 + T(\tilde{t}^0) = \hat{t}$  を比較すれば明らかである。

ラッシュアワーの長さは私的厚生水準と密接な関係がある。ラッシュアワーの開始時刻  $t_1$  において最初に住宅地を出発する者は、他の車の影響をまったく受けないので自由走行速度でトリップを行うことができる。したがって(3-2)式と(3-6)式に  $\tau(t) = 0$ ,  $h'(1) = 0$  を適用すると、次の関係が得られる。

$$(\alpha - \beta)h(1) + \beta(\hat{t} - t^*) = C^*$$

$$(\alpha - \beta)h(1) + \beta(\hat{t} - t^0) = C^0$$

すでに述べた  $t^0 < t^*$  の関係を上の2式に適用して比較することにより、 $C^0 > C^*$  となることがわかる。 $C^0$  は最適における料金込みの通勤費用なので、混雑料金を導入した場合の私的通勤費用は無料金均衡のもとでの費用よりも大きい。混雑料金の導入により利用者の私的厚生は低下するのである。この結果は第1章で示した標準的な静学モデルで得られた結果と同様である。

Henderson のモデルは、本質的には静学的な混雑モデルに時間の次元を追加したものすぎず、真の意味では動学モデルとはいえない。また交通流の物理的法則をふまえて考察すれば、このモデルにおける均衡の存在可能性がきわめて限定されることが明らかになる。以下ではこの点について検討しよう。

静的モデルにおいては交通量  $Q$  に対してさまざまな解釈が可能であるが<sup>4)</sup>、ここで対象とするように、連続時間のラッシュアワーの問題における  $Q(t)$  は、時刻  $t$  前後の非常に短い時間に流入する単位時間当たり車の台数(あるいは時刻  $t$  における瞬間的な流入率)と解釈するほかない。これは第2章で述べたような交通流理論における交通量の定義と一致する。このときトリップ時間が流入交通量の単調増加関数であるということは、図2-1の  $Q-V$  曲線における上半分の関係のみを想定することを意味する。したがって、Henderson モデルのトリップ所要時間を交通流理論に従って定義すると次のように書ける。

$$T(t) = \frac{L}{V_N(Q(t))}$$

そしてトリップ時間の時間的推移は

4) たとえば1日の総交通量、ピーク交通量、あるいは定常的に流入する交通量など。

$$\dot{T}(t) = -\frac{L}{\{V_N(Q(t))\}^2} \frac{dV_N}{dQ} \dot{Q}(t) \quad (3-9)$$

となる。

均衡条件 (3-3) 式によると、早着時間帯において  $T(t)$  は一定の率で増加し続けねばならない。ところが上の式により求められる  $T(t)$  には上限があり、それは流入交通量の上限  $W_a$  (道路区間の容量) に対する  $L/V_N(W_a)$  に等しい。総交通量  $N$  が大きい場合、式 (3-2c) よりラッシュアワーが長くなるので、 $T(t)$  の増加する時間帯の途中でこの上限に達してしまう可能性がある。遅着時間帯においても同様である。このとき式 (3-2c) を満たし、かつすべての出発時刻において通勤費用が等しくなるような均衡は存在しえない。すなわち Henderson のモデルでは無料金均衡の存在しないケースが広範に生じるのである。混雑水準が各時刻の交通量のみ依存して単調増加するというモデルは、所要時間の増加が主たる要因である道路混雑を表すモデルとしては不適切であるが、混雑による疲労や不快が主たる要因である公共交通機関の混雑には適用可能である<sup>5)</sup>。

### 3-3-2 Vickrey 型のボトルネック・モデル

このモデルは Vickrey (1969) において初めて定式化されたが、経済学者の間で広く知られるようになったのは、Arnott *et al.* (1990a) によって再検討がなされて以降である。以下の説明は、Arnott らの記述に基づくものである。

住宅地と CBD は 1 本の道路で結ばれており、道路には CBD の直前にボトルネックがあるものとする。車は自宅からボトルネック地点までを一定速度で走行することができる。したがってこの区間の走行時間は一定値であり、 $T_f$  と表記する。交通量がボトルネック容量  $W_b$  を超過する場合にはボトルネック後方に待ち行列が発生する。時刻  $t$  に出発した場合のトリップ所要時間  $T(t)$  は次のように定義される。

$$T(t) = T_f + \frac{M(t)}{W_b} \quad (3-10)$$

ここで  $M(t)$  は (車の台数で測った) 待ち行列の長さである。したがって、

5) 奥村・小林・田中 (1999) は鉄道混雑に対してそのようなモデルを適用している。

上の式の右辺第2項は待ち行列の中で過ごす時間を表す。

時刻  $t$  に出発した人が経験する待ち行列の長さは次のように求められる。

$$M(t) = \int_{t_q}^t [Q(s) - W_b] ds \quad (3-11)$$

ここで、 $t_q$  は待ち行列が発生する時刻であり、 $Q(t)$  は時刻  $t$  に住宅地を出発するトリップ数である。(3-11) 式を (3-10) 式に代入して得られた式を時間  $t$  に関して微分することにより、下記のようにトリップ時間の時間推移が得られる。

$$\dot{T}(t) = \frac{\dot{M}(t)}{W_b} = \frac{Q(t) - W_b}{W_b} \quad (3-12)$$

この式を無料金均衡の条件式 (3-3) に代入すると、各時刻の出発率が次のように求められる。

$$Q(t) = \frac{\alpha W_b}{\alpha - \beta}, \quad \text{if } t_1 \leq t \leq \tilde{t} \quad (3-13a)$$

$$Q(t) = \frac{\alpha W_b}{\alpha + \gamma}, \quad \text{if } \tilde{t} < t \leq t_2 \quad (3-13b)$$

ここで  $t_1$  は最初の通勤者の出発時刻、 $t_2$  は最後の通勤者の出発時刻である<sup>6)</sup>。また  $\tilde{t}$  は始業時刻ちょうどに着く通勤者が自宅を出発する時刻であり、 $\tilde{t} + T(\tilde{t}) = \hat{t}$  を満たす。上の式からわかるように、早着時間帯においては  $Q(t) > W_b$  なので、待ち行列が形成される。時刻  $t_1$  に出発する最初の通勤者は待ち行列に遭わないため、通勤費用は次のようになる。

$$C(t_1) = (\alpha - \beta) T_f + \beta(\hat{t} - t_1) \quad (3-14)$$

均衡が達成されたとき、任意の出発時刻  $t$  において  $C(t) = C(t_1) = C^*$  が成り立つので、 $t_1$  が求められれば、均衡通勤費用  $C^*$  が得られる。そのためには、下の方程式を  $t_1$ 、 $t_2$ 、 $\tilde{t}$  について解かねばならない。

$$N = \int_{t_1}^{t_2} Q(t) dt \quad (3-15a)$$

$$\tilde{t} + T(\tilde{t}) = \hat{t} \quad (3-15b)$$

$$M(t_2) = 0 \quad (3-15c)$$

式 (3-15a) は、 $t_1$  と  $t_2$  の間に家を出た通勤者の合計が  $N$  であることを意

6) 均衡において、 $t_1$  は式 (3-11) の  $t_q$  (待ち行列が形成され始める時刻) と一致する。

味し、式 (3-15c) は、時刻  $t_2$  に出発（すなわち最後に出発）した者が待ち行列に遭わないことを求めている。  $M(t_2) > 0$  だと、出発時刻を遅らせることによって通勤時間を節約できるので、均衡とはならないからである<sup>7)</sup>。

上の方程式を解くことにより次が得られる。

$$t_1 = \hat{t} - \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N}{W_b} - T_f \quad (3-16a)$$

$$\tilde{t} = \hat{t} - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \frac{N}{W_b} - T_f \quad (3-16b)$$

$$t_2 = \hat{t} + \frac{\beta}{\beta + \gamma} \frac{N}{W_b} + T_f \quad (3-16c)$$

式 (3-14) と (3-16a) より、次のように均衡通勤費が得られる。

$$C^* = \alpha T_f + \frac{\beta \gamma}{\beta + \gamma} \frac{N}{W_b} \quad (3-17)$$

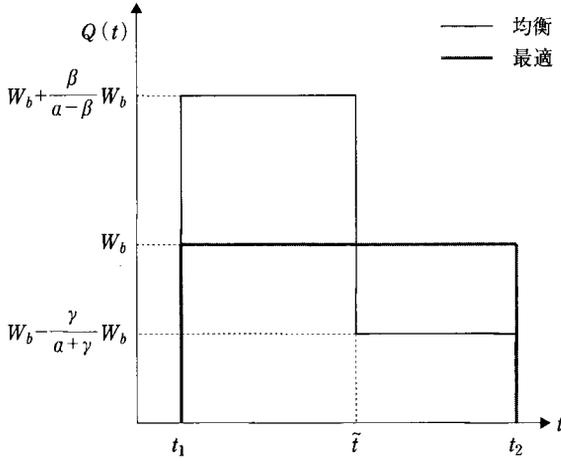
次は社会的に最適な道路利用を、Arnott *et al.* (1990a) に倣ってヒューリスティックに導くことにする<sup>8)</sup>。

まず、待ち行列はまったくの死重損失なので、待ち行列の発生を完全に防止する必要がある。待ち行列があろうがなかろうがボトルネックを通過する台数はたかだか  $W_b$  なので、待ち時間を減らしてもスケジューリング費用は不変だからである。したがって出発率は  $W_b$  を超えてはならない。待ち行列が存在しないとき、総通勤費用は総スケジューリング費用+一定値 (=  $\alpha N T_f$ ) になるので、総スケジューリング費用を最小化することが社会の目的となる。そのためには始業時刻  $\hat{t}$  を中心としてボトルネックは完全利用されねばならない。さもないとラッシュアワーが前後に広がって、総スケジューリング費用が増加してしまうからである。したがって出発率は  $W_b$  を下回ってはならない。以上からラッシュアワーの間、出発率をボトルネック容量  $W_b$  に等しくすることが

7) 仮に  $M(t_2) > 0$  としよう。ラッシュアワーの終了直後、 $t_2$  から  $t_2 + dt$  の間は車が流入しないので、その間に待ち行列はボトルネック容量に等しい率で減少する。そこで  $\dot{M}(t_2) = -W_b$  を (3-12) 式に適用すると、 $\dot{T}(t_2) = -1$  となる。このとき  $\dot{C}(t_2) = -\alpha < 0$  となるが、これは出発時刻を  $t_2 + dt$  に遅らせることによって通勤費用が減少することを意味する。これは均衡の定義と矛盾する。

8) 3-4-2項で示すような最適制御理論を適用することによって、同様の解を厳密に導くことができる。

図 3-2 ボトルネック・モデルにおける均衡と最適



最適である。

さらに、ラッシュアワー開始時刻と終了時刻におけるスケジューリング費用は等しくならねばならない。すなわち

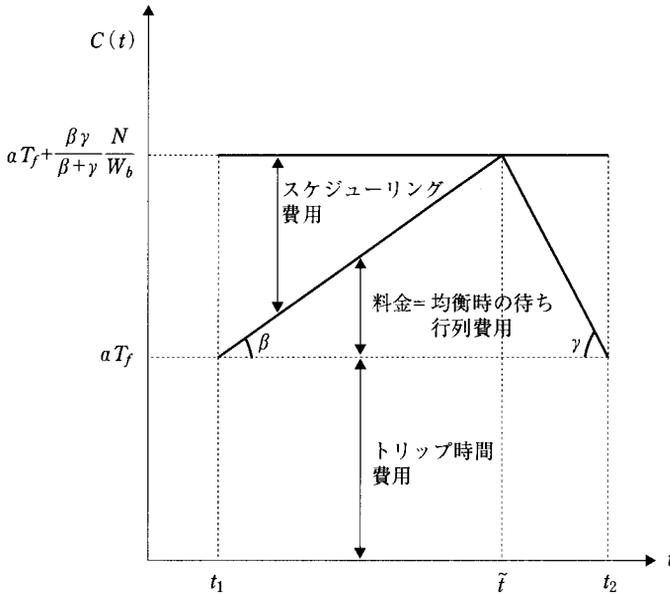
$$\beta(\hat{t} - t_1 - T_f) = \gamma(t_2 + T_f - \hat{t}) \quad (3-18)$$

もし等しくなければ、小さい方にトリップを再配分することによって総スケジューリング費用を低下させることができる。なお (3-18) 式は、無料金均衡においても成立していたことに注意されたい。このことは無料金均衡と社会的最適におけるラッシュアワーの長さは等しいことを意味する。

図3-2は、以上の分析に基づいて無料金均衡および社会的最適のもとでの出発率の分布を描いたものである。

社会的に最適な道路利用を分権的に達成するためには時刻ごとに変動するピークロード料金を課すればよい。最適では出発率がボトルネック容量に等しくなることはすでに述べたが、そのときトリップ時間費用は一定になる。一方、出発時刻が始業時刻に近づくほどスケジューリング費用は小さくなる。分権的均衡では料金を含めた通勤費用が出発時刻にかかわらず一定にならねばならないので、最適な料金は (スケジューリング費用 + 料金) が一定となるように設定すればよい。最適ピークロード料金およびスケジューリング費用の時間的推移を図3-3に示す。早着時間帯では始業時刻に近づくほどスケジューリング費

図 3-3 トリップ時間費用, スケジューリング費用, 料金の時間変動



用が減少するので、それと同じ率（単位時間当たり  $\beta$ ）で料金が上昇する。同様に遅着時間帯では  $\gamma$  に等しい率で時間とともに減少する。したがって、時刻ごとの料金スケジュールは以下のとおりである。

$$\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ a - \beta(\tilde{t} - t), & t_1 \leq t < \tilde{t} \\ a - \gamma(t - \tilde{t}), & \tilde{t} \leq t \leq t_2 \\ 0, & t_2 < t \end{cases} \quad (3-19)$$

ここに  $a = \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \cdot \frac{N}{W_b}$  である。  $a$  は、  $t < t_1$  または  $t_2 < t$  に出発する誘因をなくさせると同時に料金が非負であるという条件から導かれた。最適料金を課したときの均衡通勤費用は  $aT_f + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma} \cdot \frac{N}{W_b}$  であるが、これは (3-17) 式に示した無料料金均衡のときの通勤費用と等しい。すなわちボトルネック混雑の場合、料金によって通勤者の私的厚生を悪化させることなく混雑の経済損失を解

消することができる。これはフロー混雑に基づく Henderson の分析とは大きく異なる結論である。

### 3-4 交通渋滞の動的モデルによる分析

第2章では、流体理論に基づいて交通渋滞の動学モデルを定式化した。前節で紹介した2通りのモデル、すなわちフロー混雑のモデルとボトルネック・モデルはそれぞれ無関係に見えるが、いずれも第2章のモデルの特殊ケースである。以下ではこのことを示すとともに、朝のラッシュアワーにおける道路利用の均衡と最適について分析する。

#### 3-4-1 トリップ時間に関する動学

渋滞が存在するとき、時刻  $t$  に出発する者のトリップ所要時間は第2章の(2-9)式により与えられたが、それを下に再掲する。

$$T(t) = \frac{J(t)}{V_j(W_b)} + \frac{L - J(t)}{V_N(Q(t))}$$

右辺第1項は渋滞区間を走行する時間、第2項は非渋滞区間を走行する時間である。上式を時間について微分することにより、次が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{T}(t) &= \frac{\partial T}{\partial Q} \dot{Q}(t) + \frac{\partial T}{\partial J} \dot{J}(t) \\ &= -\frac{L - J(t)}{\{V_N(Q(t))\}^2} \frac{dV_N}{dQ} \dot{Q}(t) + \left( \frac{1}{V_j(W_b)} - \frac{1}{V_N(Q(t))} \right) \dot{J}(t) \\ &= -\frac{L - J(t)}{\{V_N(Q(t))\}^2} \frac{dV_N}{dQ} \dot{Q}(t) + \frac{Q(t) - W_b}{W_b} \end{aligned} \quad (3-20)$$

最後の式は、前章の(2-12)式を代入することによって得られたものである。渋滞列が存在しない場合 ( $J(t)=0$ )、上式の右辺第2項は消え、そのときこのモデルは、Hendersonによるフロー混雑のモデルに基づいて導いた(3-9)式と一致する。一方、非渋滞区間における走行速度が交通量に依存しないと仮定すれば、 $dV_N/dQ=0$ なので、右辺第1項が消え、そのときVickreyタイプのボトルネック・モデル((3-12)式)と一致する。すなわち、本モデルはHendersonモデルとVickreyモデルを特殊ケースとして含んでいる。

無料金均衡のもとでの時刻別交通量は、上式を (3-3) 式に適用し、それを  $Q(t)$  について解くことにより求められる。

### 3-4-2 最適な道路利用とピークロード料金

最適な道路利用とは、3-2-2項で定義したように、総通勤費用を最小化する時刻別流入交通量（出発人数）とラッシュアワーの時間帯（開始時刻、終了時刻）の組合せとして求められる。

$$\min_{Q(t), t_1, t_2, \hat{t}} \int_{t_1}^{\hat{t}} C^1(t) Q(t) dt + \int_{\hat{t}}^{t_2} C^2(t) Q(t) dt \quad (3-21a)$$

$$\text{ここに } C^1(t) = \alpha T(t) + \beta(\hat{t} - t - T(t)),$$

$$C^2(t) = \alpha T(t) + \gamma(t + T(t) - \hat{t})$$

最適制御問題として解く。制御変数は各時点  $t$  における出発台数  $Q(t)$  であり、状態変数は渋滞長  $J(t)$  と、時刻  $t$  までに出発した累積人数  $D(t)$  である。 $J(t)$  および  $D(t)$  に関する状態方程式は次のとおり<sup>9)</sup>。

$$\dot{J}(t) = -G(t) = \begin{cases} -\frac{W_b - Q(t)}{K_J(W_b) - \frac{W_b}{V_N(Q(t))}}, & \text{if } J(t) > 0, \text{ or } Q(t) \geq W_b \\ 0, & \text{if } J(t) = 0, \text{ and } Q(t) < W_b \end{cases} \quad (3-21b)$$

$$\dot{D}(t) = Q(t) \quad (3-21c)$$

また境界条件は

$$J(t_1) = 0, \quad (3-21d)$$

$$D(t_1) = 0, \quad D(t_2) = N \quad (3-21e)$$

そして渋滞長の非負条件が加わる。

$$J(t) \geq 0 \quad (3-21f)$$

この問題は、(3-21a) に示した目的関数からもわかるように、始業時刻に対する早着（添え字 1）と遅着（添え字 2）という 2 通りの状況を結合した 2-Stage 最適制御問題（Tomiyama (1985)）になっている。(3-21a) における  $\hat{t}$  は switching time と呼ばれ、1つの制御パラメータである。最適条件の詳細

9)  $\dot{J}(t)$  に関する式は、第2章の (2-15) 式を再掲したものである。

細については章末の付論で説明している。

最適解において渋滞は生じない。それは渋滞が生じた場合よりも短い走行時間で、同量の交通を処理するような解を（渋滞なしの状況で）見つけることができるからである。したがって次の2通りの交通状況のみが可能であり、それぞれについて最適条件が導出される。

$$\text{Phase A: } J(t) = 0 \quad \text{and} \quad Q(t) < W_b$$

$$\text{Phase B: } J(t) = 0 \quad \text{and} \quad Q(t) = W_b$$

Phase Aは、流入交通量（＝出発率）がボトルネック容量よりも低い状況であり、Phase Bはボトルネック容量とちょうど等しい交通量がしばらく継続するような状況である。最適条件を分析することによって、Phase Aが実現している間、早着の場合は  $\dot{Q}(t) > 0$  (for  $t < \tilde{t}$ ) であり、遅着の場合は  $\dot{Q}(t) < 0$  (for  $t > \tilde{t}$ ) となることがわかる（付論を参照）。このことから、早着の場合は交通量が単調に増加するが  $W_b$  を超えることはないので、Phase Bが生じるとすればそれは必ずPhase Aの後である。したがって早着の場合、ラッシュアワーが始まるとまずPhase Aのもとで交通量が徐々に増え、ボトルネック容量  $W_b$  に等しくなった時点からPhase Bに移行する。そしていったんPhase Bになると、早着の間はPhase Aに戻ることはない。遅着の場合は以上と逆のプロセスで交通流の状態が遷移する。すなわち、Phase Bの後でPhase Aに移行する。

### 3-4-3 最適なピークロード料金

最適解を実現するように通勤者の出発分布を誘導するためには、出発時刻ごとに変動するピークロード料金を課すればよい。ピークロード料金が通勤者の分権的な出発時刻選択と整合的であるためには、各時刻において次の条件が成り立たねばならない。

$$(\alpha - \beta) T(t) + \beta(\tilde{t} - t) + \tau(t) = C^0 \quad \text{for } t_1^0 \leq t \leq \tilde{t} \quad (3-22a)$$

$$(\alpha + \gamma) T(t) + \gamma(t - \tilde{t}) + \tau(t) = C^0 \quad \text{for } \tilde{t} < t \leq t_2^0 \quad (3-22b)$$

ここで  $C^0$  は最適ピークロード料金のもとで均衡が達成されたときの私的通勤費である。なお料金は非負の値を持つものとする。上で議論したPhase間の順序関係を考慮しながら、付論で導いた最適条件と(3-22)式を対応させる

ことにより、次のような最適料金スケジュールが得られる。

$$\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq t_1 \\ (\alpha - \beta) E_s(Q(t)), & \text{for } t_1 < t \leq t'_1 \\ (\alpha - \beta) E_s(W_b) + \beta(t - t'_1), & \text{for } t'_1 \leq t \leq \tilde{t} \\ (\alpha + \gamma) E_s(W_b) + \gamma(t'_2 - t), & \text{for } \tilde{t} \leq t \leq t'_2 \\ (\alpha + \gamma) E_s(Q(t)), & \text{for } t'_2 \leq t < t_2 \\ 0, & \text{for } t_2 \leq t \end{cases} \quad (3-23)$$

ここで  $E_s(Q(t)) = Q(t) \frac{\partial T(t)}{\partial V_N} \frac{dV_N}{dQ(t)}$  である。また  $t_1$ ,  $t_2$  は、それぞれ早着時に Phase A から B に移行する時刻、および遅着時に Phase B から A に移行する時刻である。 $E_s(Q(t))$  は、第2章で定義した静学的外部効果である。すなわち非渋滞区間において交通量が  $Q(t)$  のとき、1台の交通量増加が、同時に道路を利用する他の車両の速度を低下させる効果である。上の式より、Phase A が実現している間 ( $t_1 < t \leq t'_1$  または  $t'_2 \leq t < t_2$ )、料金は静学的外部効果の値に等しい。この原則は Henderson によるフロー混雑モデルから導いた (3-8) 式と同様である。一方、Phase B が実現している間 ( $t'_1 \leq t \leq t'_2$ )、 $E_s(W_b)$  は一定値なので、料金は  $\beta$  あるいは  $\gamma$  の率で線形に推移する。この性質は、Vickrey 型のボトルネック・モデルから導かれた (3-19) 式と同様である。したがって本稿における最適ピークロード料金は、Henderson 型 (Phase A) と Vickrey 型 (Phase B) の解を特殊ケースとして含むものである。Henderson 型の料金は静学的外部効果を内部化する一方、Vickrey 型の料金は渋滞の発生 (すなわち動学的外部効果) を完全に防止する。なお (3-23) 式に示したように料金は非負であり、どの通勤者も  $t < t_1$  や  $t > t_2$  の時間帯に出発する誘因を持たない。

### 3-5 均衡解および最適解のシミュレーション分析

#### 3-5-1 関数の特定化とパラメータの設定

まず交通量-速度の関係式は、第2章で導いた式 (2-4) を用いる。

$$V_N(Q) = \frac{V_f}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{Q}{W_a}} \right)$$

$$V_f(Q) = \frac{V_f}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{Q}{W_a}} \right)$$

ここで  $V_f$  は自由走行速度である。

道路区間の交通条件については、次のようにパラメータを設定した。

道路区間の長さ： $L=20$ (km)

道路区間の交通容量： $W_a=3600$ (台/時) $=60$ (台/分)

ボトルネックの交通容量： $W_b=2400$ (台/時) $=40$ (台/分)

自由走行速度： $V_f=80$ (km/時)

これらの値は、日本の名神高速道路を対象とした実証研究 (Makigami *et al.* (1984)) の結果を参考にしている。

トリップ時間の金銭的評価値  $\alpha$  は、日本交通政策研究会 (1988) による計測例を参考に、2000円/時とした。早着および遅着の時間価値に関しては、日本を対象として本モデルと整合的な計測を行った例を知らない。そこで、しばしば引用される Small (1982) の計測例におけるトリップ時間価値との比率を参考にし  $\beta/\alpha=0.4$ 、 $\gamma/\alpha=2.1$  とした。

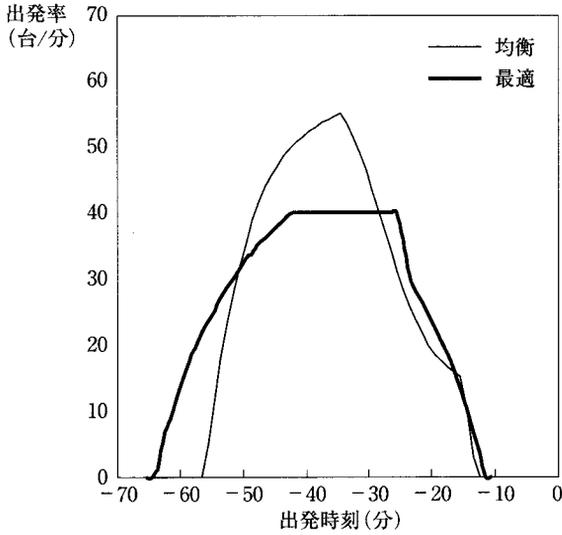
### 3-5-2 均衡解と最適解の比較

図3-4には、総通勤者数  $N$  が1500と4000の2通りのケースについて、均衡解と最適解のもとでの出発時刻分布をプロットしている。

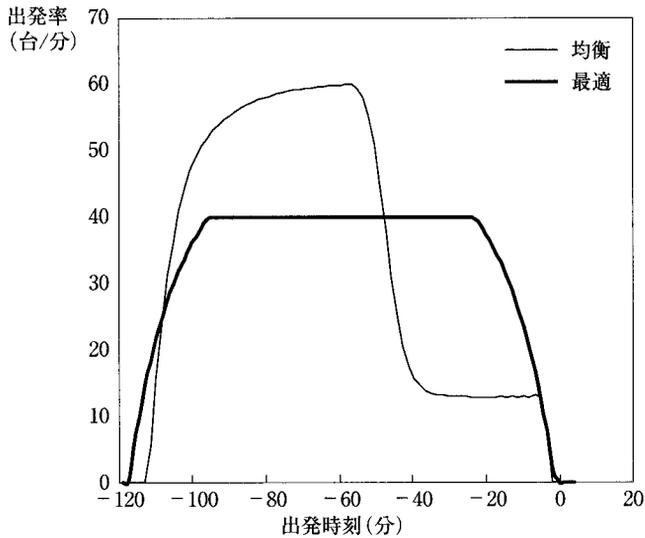
いずれのケースにおいても、均衡における交通量は、ある時刻からボトルネック容量を超過しており、渋滞が発生している。しかし最適では、ボトルネック容量に達するまでは単調に増加するものの、そこまで達すればボトルネック容量に等しい率で出発する状態が継続する。図3-4(a)における出発分布の形状は Henderson (1981) が導いたもの (図3-1) と似ている。この場合、総交通量が少なく渋滞は軽微なので、非渋滞領域における混雑の影響が支配的なのである。一方、図3-4(b)の出発分布は Vickrey 型のボトルネック・モデルによって導いたもの (図3-2) によく似ている。すなわち早着時間帯においては一定の高い出発率が続き、遅着時間帯にスイッチした直後から一定の低い率で

図 3-4 均衡および最適な出発分布

(a)  $N=1,500$

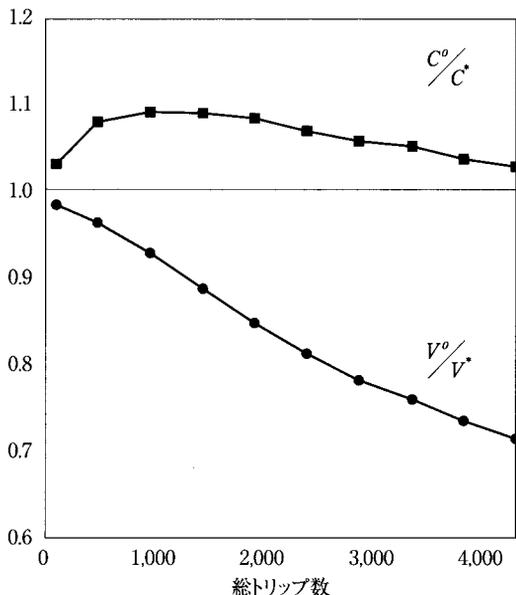


(b)  $N=4,000$



(注) 出発時刻は始業時刻を0に基準化している。

図 3-5 総トリップ数と最適/均衡における  
総通勤費



出発する状態が継続する。この場合は、激しい渋滞が生じるので、ボトルネックからの渋滞列において費やす時間の項が支配的となったためである。

本モデルにおいては総トリップ数が固定されているので、道路利用に関する社会的厚生は総通勤費用（(3-4)式において定義された $V$ ）で表される。一方、利用者の私的厚生は私的トリップ費用（均衡解のもとでは(3-2)式の $C^*$ 、最適解のもとでは料金込みの額である(3-22)式の $C^0$ ）で表される。図3-5には、総トリップ数の変化が無料金均衡と社会的最適のもとの私的厚生および社会的厚生に及ぼす影響を图示している。

図を見ると、 $C^0/C^*$ の値は常に1より大きい、すなわち私的厚生は混雑料金導入により低下する。しかしその程度は総トリップ数に依存して変動する。総トリップ数の小さい場合には混雑の水準が低いので混雑料金の額も小さく、私的厚生の低下は小さい。一方、総トリップ数がかなり大きい場合には、無料金均衡で渋滞が激しくなるので、混雑料金による渋滞防止効果が大きく、最適なピークロード料金導入による私的厚生の低下割合が減少する。社会的厚生の

改善度を示す  $V^0/V^*$  の値は総トリップ数が増加するに従い、単調に低下している。すなわち渋滞の激しい状況であるほど、混雑料金導入による社会的トリップ費用の節約額が大きくなる。したがって渋滞の激しい状況では、混雑料金導入の効果は大きく、かつ私的厚生低下が相対的に少ないので、混雑料金導入が特に望ましい。

### 3-6 おわりに

本章では、動的な現象である交通渋滞を記述するモデルを、朝の通勤ラッシュアワーにおけるピークロード問題に適用し、利用者均衡と最適な道路利用を導いた。

ここで得られた結果は次のとおり。

- (1) 交通渋滞の動学モデルは、フロー混雑に基づく Henderson 流の解と、ボトルネックの待ち行列に基づく Vickrey 流の解を、それぞれ特殊ケースとして含む、統合モデルである。
- (2) 朝のラッシュアワーにおける最適な道路利用を達成するためには、時刻ごとに変動するピークロード料金を課す必要がある。このような料金の役割は、非渋滞流における静的外部効果を内部化すること、および渋滞の発生を抑止することである。
- (3) 均衡において生ずる渋滞が激しくなるほど、ピークロード料金による利用者の私的厚生減少は相対的に小さくなり、渋滞解消による社会的便益は大きくなる。

本章で導いたような、時々刻々と変動する料金システムを実施することは、現状では困難と思われる。したがって厳密には最適ではないが、実行可能な次善の料金システムを考案し、その効果を分析することが今後の課題としてあげられる。たとえば Arnott *et al.* (1990a) は、単純なボトルネック・モデルに基づいてではあるが、次善の料金として2段階に変動する料金制の効果を分析している。ただし次善のシステムが最適解に比べてどの程度有効かを評価するためにも、ここで導いた最適解は重要な情報になる。

## 付論：最適な道路利用の条件

目的関数 (3-21a) について、ハミルトニアンが次のように定義される。

$$\mathcal{H}^j(t) = -C^j(t)Q(t) - \Omega^j(t)G(t) + \lambda^j(t)Q(t), \quad j=1, 2 \quad (3A-1)$$

ここで  $\Omega^j(t)$  と  $\lambda^j(t)$  は、それぞれ、状態方程式 (3-21b) と (3-21c) に関する随伴変数である。上付き添え字  $j$  は早着 ( $j=1$ ) および遅着 ( $j=2$ ) 時間帯を表している。最大原理によれば、最適解は制約条件 (3-21f) のもとでハミルトニアンを最大化する。そこで下のようなラグランジアンを定義する。

$$\mathcal{L}^j(t) = \mathcal{H}^j(t) + \eta(t)J(t) \quad (3A-2)$$

ここに  $\eta(t)$  は渋滞長の非負条件 (3-21f) に関するラグランジュ乗数である。

早着時間帯 ( $j=1$ ) における1階の条件は次のとおり。

$$\begin{aligned} & -[(\alpha - \beta)T(t) + \beta(\bar{t} - t)] - (\alpha - \beta)Q(t) \frac{\partial T(t)}{\partial V_N} \frac{dV_N}{dQ(t)} \\ & - \Omega^1(t) \frac{dG(t)}{dQ(t)} + \lambda^1(t) = 0 \end{aligned} \quad (3A-3)$$

$$\eta(t)J(t) = 0, \quad \eta(t) \geq 0 \quad (3A-4)$$

また随伴変数  $\Omega^1(t)$ ,  $\lambda^1(t)$  は次の関係を満たさねばならない。

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}^1(t) &= - \frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial J(t)} \\ &= (\alpha - \beta)Q(t) \left\{ \frac{1}{V_j(W_b)} - \frac{1}{V_N(Q(t))} \right\} - \eta(t) \end{aligned} \quad (3A-5)$$

$$\lambda^1(t) = - \frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial D(t)} = 0 \quad (3A-6)$$

ラッシュアワーの開始時刻  $t_1$  は制御パラメータであるが、これに関する最適条件は

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(t_1) &= -[(\alpha - \beta)T(t_1) + \beta(\bar{t} - t_1)]Q(t_1) - \Omega^1(t_1)G(t_1) \\ &+ \lambda^1(t_1)Q(t_1) = 0 \end{aligned} \quad (3A-7)$$

遅着時間帯 ( $j=2$ ) に関する最適条件は早着の場合と基本的に同様であるが、式 (3A-3), (3A-5), (3A-7) はそれぞれ次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 & -[(\alpha+\gamma)T(t)+\gamma(t-\hat{t})]-(\alpha+\gamma)Q(t)\frac{\partial T(t)}{\partial V_N}\frac{dV_N}{dQ(t)} \\
 & -\Omega^2(t)\frac{dG(t)}{dQ(t)}+\lambda^2(t)=0
 \end{aligned} \tag{3A-3}'$$

$$\dot{\Omega}^2(t)=(\alpha+\gamma)Q(t)\left\{\frac{1}{V_j(W_b)}-\frac{1}{V_N(Q(t))}\right\}-\eta(t) \tag{3A-5}'$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^2(t_2) &= -[(\alpha+\gamma)T(t_2)+\gamma(t_2-\hat{t})]Q(t_2)-\Omega^2(t_2)G(t_2) \\
 & +\lambda^2(t_2)Q(t_2)=0
 \end{aligned} \tag{3A-7}'$$

Tomiyama (1985) によれば、スイッチング時刻  $\tilde{t}$  において下のような条件が成り立つ。

$$\Omega^1(\tilde{t})=\Omega^2(\tilde{t}) \tag{3A-8}$$

$$\lambda^1(\tilde{t})=\lambda^2(\tilde{t}) \tag{3A-9}$$

$$\mathcal{H}^1(\tilde{t})=\mathcal{H}^2(\tilde{t}) \tag{3A-10}$$

そして  $t_2$  における横断性条件は

$$\Omega^2(t_2)\geq 0, \quad J(t_2)\Omega^2(t_2)=0 \tag{3A-11}$$

(3A-6) より、随伴変数  $\lambda^j(t)$  の値は時間について一定の値をとるので、これを  $\lambda^j(t)=\bar{\lambda}$  のように書くことにする。また  $t_1$  において  $J(t_1)=0$  なので (3A-7) の右辺第3項は消え、下記のようになる。

$$(\alpha-\beta)T(t_1)+\beta(\hat{t}-t_1)=\bar{\lambda} \tag{3A-12}$$

上式の左辺はラッシュアワーで最も早く出発する通勤者の私的トリップ費用である。最初の通勤者は（前に誰もいないので）自由走行速度で運転することを考慮すれば、 $T(t_1)=L/V_f$  となる。一方、 $t_2$  においては、 $J(t_2)=0$  かどうかは明らかでない。しかし  $J(t_2)=0$  なら状態方程式 (3-21b) 式より  $G(t_2)=0$ 、 $J(t_2)>0$  だとしても横断性条件 (3A-11) より  $\Omega^2(t_2)=0$  なので、いずれにしても (3A-7)' の右辺第3項は消え、次が得られる。

$$(\alpha+\gamma)T(t_2)+\gamma(t_2-\hat{t})=\bar{\lambda} \tag{3A-12}'$$

また (3A-8)、(3A-9)、(3A-10) より、 $\tilde{t}+T(\tilde{t})=\hat{t}$  を得る。この式はスイッチング時刻に出発した通勤者は、ちょうど始業時刻に到着することを意味している。すなわちこの通勤者はスケジューリング費用を負わない。このことは定義から自明であるが、1つの最適条件として導かれるのである。

各時刻における出発率に関する最適条件については、以下で3通りの状況ご

とに説明する。

[Phase A]  $J(t)=0$  かつ  $Q(t)<W_b$

この状況では、状態方程式 (3-21b) より  $G(t)=0$  なので、最適条件 (3A-3) と (3A-3)'は次のようになる

$$(\alpha-\beta)T(t)+\beta(\hat{t}-t)+(\alpha-\beta)Q(t)\frac{\partial T(t)}{\partial V_N}\frac{dV_N}{dQ(t)}=\bar{\lambda} \quad (3A-13a)$$

for  $t_1 \leq t \leq \tilde{t}$

$$(\alpha+\gamma)T(t)+\gamma(t-\hat{t})+(\alpha+\gamma)Q(t)\frac{\partial T(t)}{\partial V_N}\frac{dV_N}{dQ(t)}=\bar{\lambda} \quad (3A-13b)$$

for  $\tilde{t} < t \leq t_2$

ここで左辺第1項と第2項の和は時刻  $t$  に出発した通勤者の私的交通費用であり、第3項はこの時刻に出発する通勤者がわずかに増加することによって、同時に走行するすべてのドライバーが被る（非渋滞流での）交通費用の増分である。この結果は、3-3-1項において Henderson モデルについて導いた条件と同様である。しかし本研究においてこの条件が成り立つのは1つの特殊ケースにすぎない。(3A-13a)において左辺第1項と3項は  $Q(t)$  とともに増加する一方、第2項は時間とともに減少する。このことから  $t < \tilde{t}$  の間は  $\dot{Q}(t) > 0$  となる。同様にして  $t > \tilde{t}$  の間は  $\dot{Q}(t) < 0$  を示すことができる。

[Phase B]  $J(t)=0$  かつ  $Q(t)=W_b$

このとき、ボトルネックの容量  $W_b$  に等しい交通量が道路に流入する状況がしばらく継続する。最適条件 (3A-3) と (3A-3)'は次のようになる。

$$(\alpha-\beta)T(t)+\beta(\hat{t}-t)+(\alpha-\beta)W_b\frac{\partial T(t)}{\partial V_N}\frac{dV_N}{dQ(t)}+\Omega^1(t)\frac{dG}{dQ}=\bar{\lambda} \quad (3A-14a)$$

for  $t_1 \leq t \leq \tilde{t}$

$$(\alpha+\gamma)T(t)+\gamma(t-\hat{t})+(\alpha+\gamma)W_b\frac{\partial T(t)}{\partial V_N}\frac{dV_N}{dQ(t)}+\Omega^2(t)\frac{dG}{dQ}=\bar{\lambda} \quad (3A-14b)$$

for  $\tilde{t} < t \leq t_2$

Phase A との違いは、左辺に第4項が加わったことである。上式の両辺を時間で微分し、交通量の時間変化がないことを考慮することによって、次を得

る。

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}^1(t) &= \frac{\beta}{dG/dQ} & \text{for } t_1 < t \leq \tilde{t} \\ \dot{\Omega}^2(t) &= -\frac{\gamma}{dG/dQ} & \text{for } \tilde{t} < t < t_2\end{aligned}\tag{3A-15}$$

なお、交通量が  $W_b$  に等しく一定なので  $dG/dQ$  も定数であり、 $\dot{\Omega}(t)$  も一定になる。すなわち (3A-14) 式の左辺第4項はスケジューリング費用の変化と同率で変化する。

[Phase C]  $J(t) > 0$

この状況では (3A-3)、(3A-3)'は次のようになる。

$$\begin{aligned}(a-\beta)T(t) + \beta(\hat{t}-t) + (a-\beta)Q(t)\frac{\partial T(t)}{\partial V_N} - \frac{dV_N}{dQ(t)} + \Omega^1(t)\frac{dG}{dQ} &= \bar{\lambda} \\ \text{for } t_1 \leq t \leq \tilde{t}\end{aligned}\tag{3A-16a}$$

$$\begin{aligned}(a+\gamma)T(t) + \gamma(t-\hat{t}) + (a+\gamma)Q(t)\frac{\partial T(t)}{\partial V_N} - \frac{dV_N}{dQ(t)} + \Omega^2(t)\frac{dG}{dQ} &= \bar{\lambda} \\ \text{for } \tilde{t} < t \leq t_2\end{aligned}\tag{3A-16b}$$

第4項は、第2章で示されたと同様の動学的外部効果を表している。実は、この Phase C が最適解として実現することはない。このことに関する直感的説明は以下のとおりである。Phase C のように渋滞が生じた場合、ボトルネックから流出する交通量は  $W_b$  であり、渋滞列の中では速度が  $V_j(W_b)$  である。ところが Phase B のように、流入交通量が  $W_b$  に等しい場合、ボトルネックから流出する交通量も  $W_b$  である。このとき流出交通量が等しいので総スケジューリング費用は Phase B と同じであるが、渋滞が生じていないので速度 ( $=V_N(W_b)$ ) は高い。したがって Phase C のように、出発率  $Q(t)$  が  $W_b$  を超え、渋滞が生じるような状況は総通勤費用を最小化しない。

ところで、Phase A の状況では、必ず  $\dot{Q} > 0$  ( $t < \tilde{t}$ )、 $\dot{Q} < 0$  ( $t > \tilde{t}$ ) となることを上で述べた。早着の場合、Phase A で流入交通量が単調に増加して  $W_b$  に達すると Phase B に移行するが、早着時間帯内で Phase A に再び戻ることはない。同様の理由で、遅着の場合は必ず Phase B の後で Phase A に移行する。