Transcendence related to certain series and visualization via Mathematica

H. Nishibayashi, K. Sugimoto, M. Kawashima, K. Suzuki, S. Tonegawa,
Yukiko Washio, N. Hirata-Kohno (Nihon Univ.) and
Yusuke Washio (Buzan-J.H.S., Nihon Univ.)
日本大学大学院理工学研究科数学専攻 杉本 和希・西林 大樹,
日本大学生産工学部 川島 誠, 日本大学理工学部 鈴木 潔光・利根川 聡・
鷲尾 夕紀子・平田 典子, 日本大学豊山女子中学校高等学校 鷲尾 勇介

Abstract

In the present notes, we introduce a known fact that a series with coefficients of paperfolding sequence takes transcendental values at algebraic points in the disc of convergence. This result bridges, Diophantine approximations with dynamic active instructions, thanks to Mathematica. We may regard several arithmetical properties in question as visual ones, which leads us to find more.

Mathematics Subject Classification [2010]: 11J, 11F67, 11K60, 33C20

1 paperfolding sequence を係数に持つ級数

本稿では，paperfolding sequence と呼ばれる数列を係数に持つ級数を紹介する．また，その数論的な性質および，いくつかの動画の一部についても説明する．

なお，高遠節夫先生に今回も素晴らしい動画をお作りいただいた．皆様ぜひご覧ください．

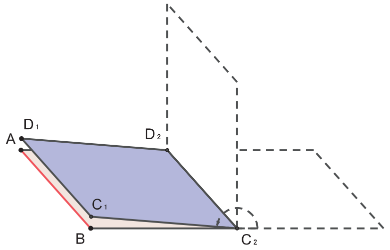
`https://s-takato.github.io/`

1.1 paperfolding sequence とは

まずは，そもそも紙を折るという操作でなされる paperfolding 数列の定義を与えよう．

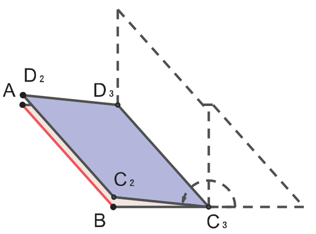
長方形の紙 $\mathrm{ABC_1D_1}$ を机の上に水平に置く．辺 AB は常に机にセロテープで貼り付けよう．

次に辺 $\mathrm{C_1D_1}$ を AB に重なるように折り，$\mathrm{ABC_1D_1}$ の半分の長方形 $\mathrm{ABC_2D_2}$ を作る．

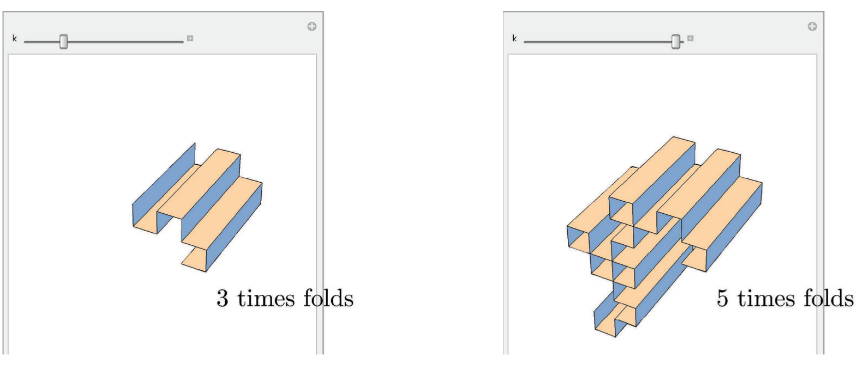


さらに辺 C_1D_1 を AB に重なるように折り，ABC_1D_1 の半分の長方形 ABC_2D_2 を作る．同様に，AB を固定しながら辺 C_2D_2 が AB に重なるように折り，ABC_2D_2 の半分の長方形 ABC_3D_3 を作る．

折り目が 90° になるように紙を開く．N 回折ると 2^N-1 個の折り目ができる．



下図は紙を 3 回折ったときと 5 回折ったときである．



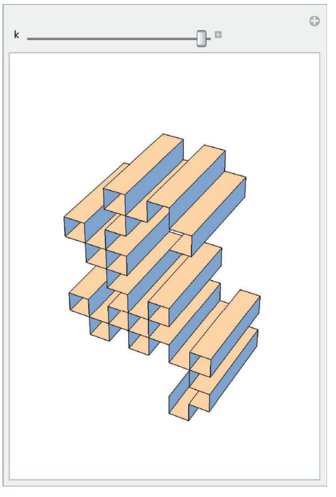
机の上から見たときの ▽ を谷折り，△ を山折り，▽ を最初の折り目とすると，以下のような図が得られる．

1st fold								▽							
2nd fold				▽				▽				△			
3rd fold		▽		▽		△		▽		▽		△		△	
4th fold	▽	▽	△	▽	▽	△	△	▽	▽	▽	△	△	▽	△	△

ここで △ に 0，▽ に 1 を対応させた数の並びから得られる数列は以下の通りである（紙の端には便宜上 1 を対応させる）． 1 は最初の折り目を表すものとする．

1st fold								1								1
2nd fold				1				1				0				1
3rd fold		1		1		0		1		1		0		0		1
4th fold	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1

この紙を折る動作を Mathematica 動画にしたものの一つが，下図である．スクロールの k は紙を折った回数に対応している．



定義 1 (paperfolding sequence) 以上の操作を繰り返して得られる 0 と 1 の並びの数列を，*paperfolding* 数列という．0 と 1 ではなく -1 と 1 を並べる場合もある．

この数列を $\{t_n\}$ とおくと，一般項は次の命題で得られる．

命題 1 $n = m \cdot 2^k$, k を非負整数，m を奇数と表すとすると，数列 $\{t_n\}$ は次で与えられる．

$$t_n = \begin{cases} 1 & (m \equiv 1 \mod 4) \\ 0 & (m \equiv 3 \mod 4). \end{cases}$$

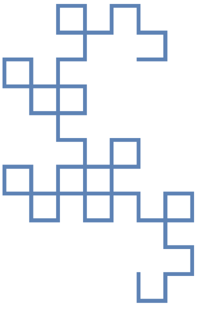
また，折り目が $\triangledown$ で点対称であったことから以下が分かる．

命題 2

$$t_n = \begin{cases} 1 & (\mathit{if}\ n = 2^k) \\ 1 - t_{2^k - n} & (\mathit{if}\ 2^{k-1} < n < 2^k). \end{cases}$$

別の言い方として，$11 \to 1101$, $01 \to 1001$, $10 \to 1100$, $00 \to 1000$ という変換による Automatic 数列（定義の詳細は [1] にある）と呼ばれるものの例：

$11 \to 1101 \to 11011001 \to 1101100111001001 \to \cdots$ と理解することもできる．紙の真正面から折り目を見ると，以下の図の状態をなしており，Dragon 曲線と呼ばれている．この曲線に関しては力学系の観点からの研究が多くなされている．



1.2 paperfolding 級数の整数論的な性質

さて，上記において定義した小数の極限である，paperfolding 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{10^n}$ を考えよう．M. Mendès France，A. J. van der Poorten らによって，この級数の様々な性質が調べられているが，例えば数列 $\{t_n\}$ は周期的ではない [12]．K. Mahler の結果 [9] [10] [11] からこの級数の値の超越性が従う．K. Mahler の定理や手法については [13] にまとめられている．この性質については [7], M. Mendès-France[12] に述べられている．

定理 3

- 実数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{10^n}$ は超越数（即ちいかなる有理数係数の一変数多項式の根にもならない）．
- $0<|\alpha|<1$ を満たす代数的数 α に対し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}t_n\alpha^n$ は常に超越数になる．従って無理数．

ここで代数的数とは，有理数を係数とする 1 変数多項式の根を指す．代数的数は必ず複素数になることが知られている．そしてまた超越数とは代数的数ではない複素数を指す．例えば円周率 π は超越数であることが F. Lindemann によって 1882 年に証明されている．代数的数は有理数を真の部分集合として含むため，代数的数になり得ない超越数であることがわかっている実数は，必ず無理数になる．

上記の定理の証明は，Mahler 関数という関数の値に対する Mahler method というものによって最初になされた．Mahler method とは t_n を係数，X を変数とした，べき級数 $f(X)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}t_nX^n$ を考えるとき，X の自然数 d 乗に対して $f(X^d)$ を $f(X)$ の有理関数で表せるならば，その関数方程式を用いて，$f(X)$ の値の数論的性質を示すという手法である．

この関数の満たす関数方程式は，

$$f(X)-f(X^2)=\frac{X}{1-X^4}$$

であり，この関数方程式を用いることによって，上記の定理 3 が従うのである．

ところが最近，Schmidt の部分空間定理 [15] という，ディオファントス近似の中心的な定理の応用に依る定理の応用として，Adamczewski-Bugeaud により新たに超越性が得られた [3]．ちなみに部分空間定理という名前の由来は，関心のある整数点が 1 次元低い部分空間に必ず含まれるという記述があるためである．

2 paperfolding sequence を連分数展開の項にもつ実数

次に，paperfolding sequence $\{t_n\}$ を連分数の部分商とする実数の性質を考えよう．まず連分数展開について定める．

定義 2 実数 ω に対し，最大整数部分を $a_0 = \lfloor \omega \rfloor \in \mathbb{Z}$ とおく．$\omega - a_0 = 0$ ならば $a_0 = \omega$ である．$\omega - a_0 > 0$ ならば，$0 < \omega - a_0 < 1$ の逆数 $\dfrac{1}{\omega - a_0} > 1$ の最大整数部分を a_1 とおく．この操作を繰り返す．整数 $0 < a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ に対し

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

となる．この表示を ω の（正則）連分数展開という．

よく知られている事実として
- ω は無理数である $\Longleftrightarrow$ 連分数展開が無限まで続く
- ω は 2 次無理数 $\Longleftrightarrow$ 連分数展開が周期的

の 2 つがある．

定義 3 **(n 次近似分数・ 部分商)**

ω を n 番目の a_n まで連分数展開，つまり $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$

で止めて得られる有理数を（ただし $p_n, q_n \in \mathbb{Z},\ q_n > 0,\ \gcd p_n, q_n = 1$）

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

とおき，ω の n 次近似分数，また a_n を ω の部分商と称する．

ここで paperfolding 数列の項を，連分数の a_n の処に突っ込んで実数を定めよう．

定義 4 (paperfolding 数列 $\{t_n\}$ から得られる連分数) *paperfolding* 数列 $\{t_n\}$ に対して，

$$\frac{p_n}{q_n} = [t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n], \quad t_0 = 0$$

を考える．この有理数 $\frac{p_n}{q_n} = [0,1,1,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,1,0,0,1,\ldots]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}$ は存在する．この極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}$ を cpf とおくと

$cpf = 0.72362652360802770386543441217250983226930114752703819 22141\ldots$ である．

前節の paperfolding 数列を桁の数字とする小数 $0.1101100111001001\ldots$ とは違う実数である．

2.1 周期的な連分数展開との比較

一般に，連分数の近似分数は必ずもとの実数 ω に収束する．即ち

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = \omega.$$

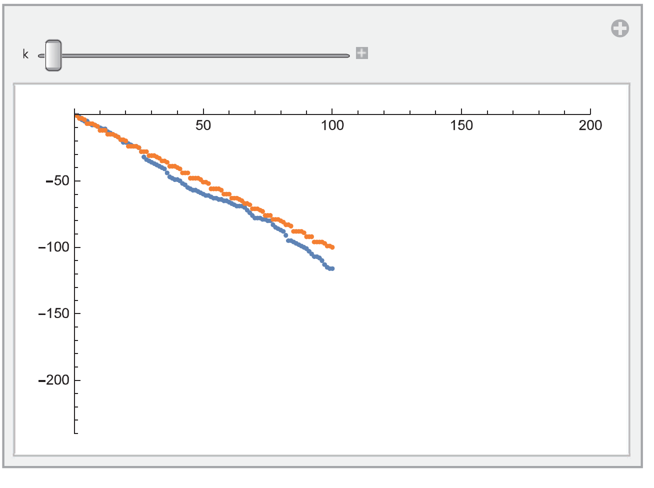
Mathematica 動画で，その収束の様子を観察しよう．

ヨコ軸=n 次近似分数の n，タテ軸=真の値 ω と合致する小数点以下の桁数とする．一致する桁数が多いほど（グラフが下方にあるほど）より早い収束であると言える．下記のように他の連分数展開と比較してみよう．

青=paperfolding 数列 $cpf = 0.72362652360802770386543441217250983226 93\ldots$ 即ち
n 次近似分数 $\frac{p_n}{q_n} = [0,1,1,0,1,1,0,0,1,1,1,0,0,1,0,0,1,\ldots]$ の極限．

赤=黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 即ち $\frac{p_n}{q_n} = [1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\ldots]$ の極限．

青=paperfolding 数列から作った連分数 cpf は超越数であるが，部分商は paperfolding 数列の定義から有界である．であり，また赤=黄金比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 連分数展開は 2 次代数的数ゆえ周期的であることに注意しよう．



ヨコ軸$=n$ 次近似分数の n，タテ軸=真の値 ω と合致する小数点以下の桁数としている．つまり，下の方にある青いグラフのほうが小数点以下の桁数一致は多いのである．

定理 4 (Adamczewski-Bugeaud [2][4])
実数 cpf は超越数.

一般に Automatic 数列と呼ばれる数列 [1] を連分数の部分商として得られた実数も超越数になる．証明は Schmidt の部分空間定理 (W. M. Schmidt, 1980) の応用である.

2.2 paperfolding 数列に関する他の考察

ここで paperfolding 数列 t_n に対して，さらに無限積を考えると，Allouche らによって

- $$\prod_{n\geq 0}\left(\frac{(2n+3)(4n+3)}{(2n+1)(4n+5)}\right)^{t_n} = 1+\sqrt{2}$$
- $$\prod_{n\geq 0}\left(\frac{(3n+2)(6n+7)}{(3n+4)(6n+5)}\right)^{t_n} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となることが示されている.

有名な未解決問題としては，A. Ya. Khinchin [8] の予想 (1949)『3 次以上の $\forall$ 代数的数の部分商は非有界』がある．実際，3 次の代数的無理数 ω で，部分商が非有界なもの $|a_n| \to \infty$ の例は，まだ一つも知られていない.

参考文献

[1] J-P. Allouche and J. Shallit, *Automatic sequences, Theory, applications, generalizations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[2] B. Adamczewski, Y. Bugeaud and L. Davison, *Continued fractions and transcendental numbers*, Ann. Inst. Fourier, **56** (2006), 2093–2113.

[3] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases*, Ann. of Math., **165**, (2007), 547–565.

[4] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *A Short Proof of the Transcendence of Thue-Morse Continued Fractions*, The American Mathematical Monthly, **114** no. 6, (2007), 536–540.

[5] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *Palindromic continued fractions*, Ann. Inst. Fourier, **57** (2007), 1557–1574.

[6] Y. Bugeaud, *Transcendence of Stammering Continued Fractions*, In: Number Theory and Related Fields, in Memory of Alf van der Poorten, eds. J. Borwein, I. Shparlinski and W. Zudilin, Springer Proceedings in Math. and Statistics, **43**, Springer, 2013, 129–142.

[7] F. M. Dekking, M. Mendès France and A. J. van der Poorten, *Folds!* , Mathematical Intelligencer, **4**, (1982), 130–138, 173–181, 190–195.

[8] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, Dover Publications Inc., 1949, third edition 1997.

[9] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Ann., **101**, no. 1, (1929), 342–366.

[10] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen*, Math. Z., **32**, no. 1, (1930), 545–585.

[11] K. Mahler, *Uber das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Ver ̈anderlichen in speziellen Punktfolgen*, Math. Ann., **103**, no. 1, (1930), 573–587.

[12] M. Mendès France and A. J. van der Poorten, *Arithmetic and analytic properties of paper folding sequences*, Bull, Austral. Math. Soc., **24**, (1981), 123–131.

[13] Kumiko Nishioka, *Mahler functions and transcendence*, Lecture Notes in Math., **1631**, Springer, 1996.

[14] I. Niven, H. S. Zuckerman and H. L. Montgomery *An Introduction to the Theory of Numbers*, Wiley, First edition 1960, Fifth edition, 1991.

[15] W. M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Math., **785**, Springer, 1980.

H. Nishibayashi, K. Sugimoto,
K. Suzuki, S. Tonegawa, Yukiko Washio,
N. Hirata-Kohno

College of Science & Technology
Nihon University,
Kanda, Chiyoda, Tokyo, 101-8308, Japan.

corresponding author: Noriko Hirata-Kohno,
email kouno.noriko at nihon-u.ac.jp

Makoto Kawashima

College of Industrial Engineering,
Nihon University,
Izumi-chou, Narashino, Chiba,
275-8575.

Yusuke Washio

Buzan-joshi High School,
Nihon University,
Nakadai 3-15,
Itabashi, Tokyo, 174-0064.