数学教育における順序並び替え問題[1]

神戸大学・人間発達環境学研究科 長坂 耕作
Kosaku Nagasaka
Graduate School of Human Development and Environment,
Kobe University

1 はじめに

著者らは，あらかじめ自動生成した多肢選択問題を Moodle 上で定期的に実施するドリルとして使用する枠組みについて，2017 年よりその研究に取り組んできている [4, 5, 6, 7]。その結果として，Moodle などの LMS 上での自習教材として多肢選択問題を活用する知見が集積しつつある。一方で，多肢選択問題には双方向性や高次の思考を誘発することが比較して簡単でないため，数学的思考力の育成を視野に入れつつ，順序並び替え問題という新たな問題形式を活用する取り組みもはじめている [8]。本稿では，線形代数と中

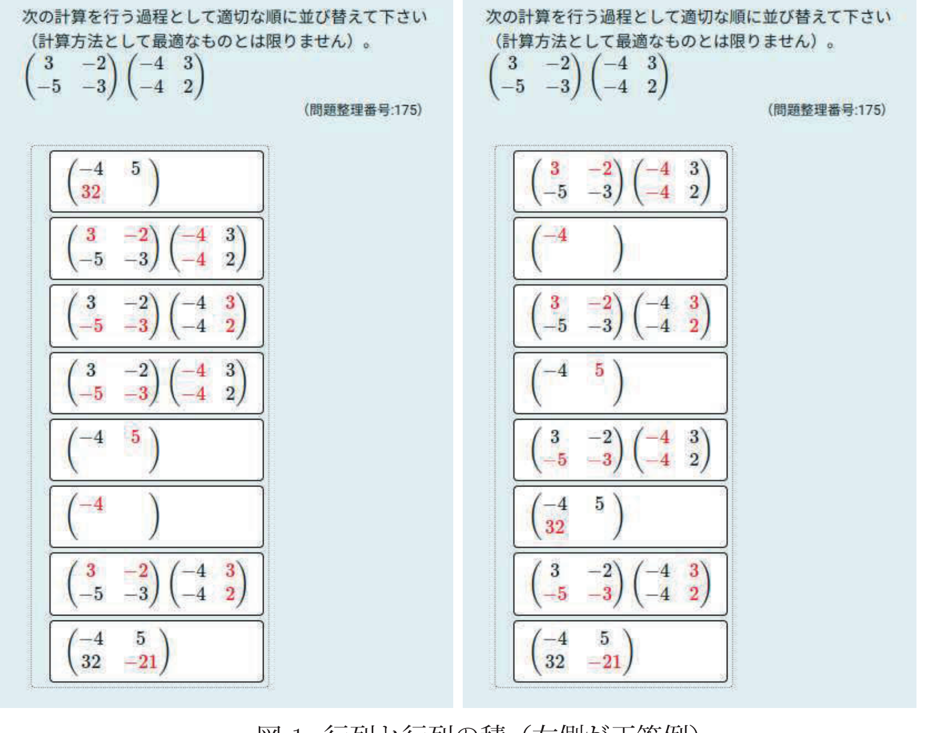

図 1: 行列と行列の積（右側が正答例）

[1]This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 18K02941 and 21H00921.

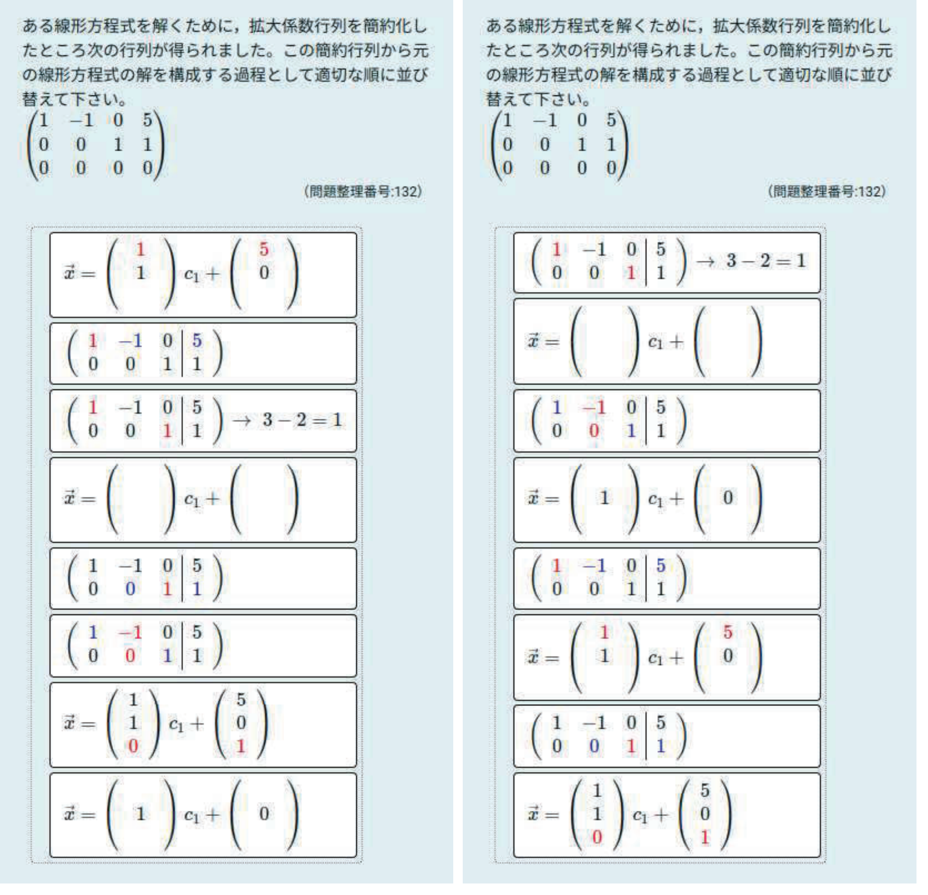

図 2: 線形方程式の掃き出し結果からの解の構成（右側が正答例）

等数学における順序並び替え問題の例を提示することを通して，数学教育における順序並び替え問題の可能性について示していきたい。

2　線形代数の順序並び替え問題の例

図 1 は，行列と行列の積に関する順序並び替え問題の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。この問題では，$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times\ell}$ と $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$ に対して，$C = AB = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ を定義通りに，$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik}b_{kj}$ で求めることを意図した項目となっている。なお，行列の積を縦ベクトルの線型結合として考える場合などに対しても生成は試みている。

図 2 は，線形方程式を掃き出し法で解く場合であって，行の基本変形により完全に簡約化が終わった状態から，どのように解を構成するかの順序並び替え問題の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。解の構成手

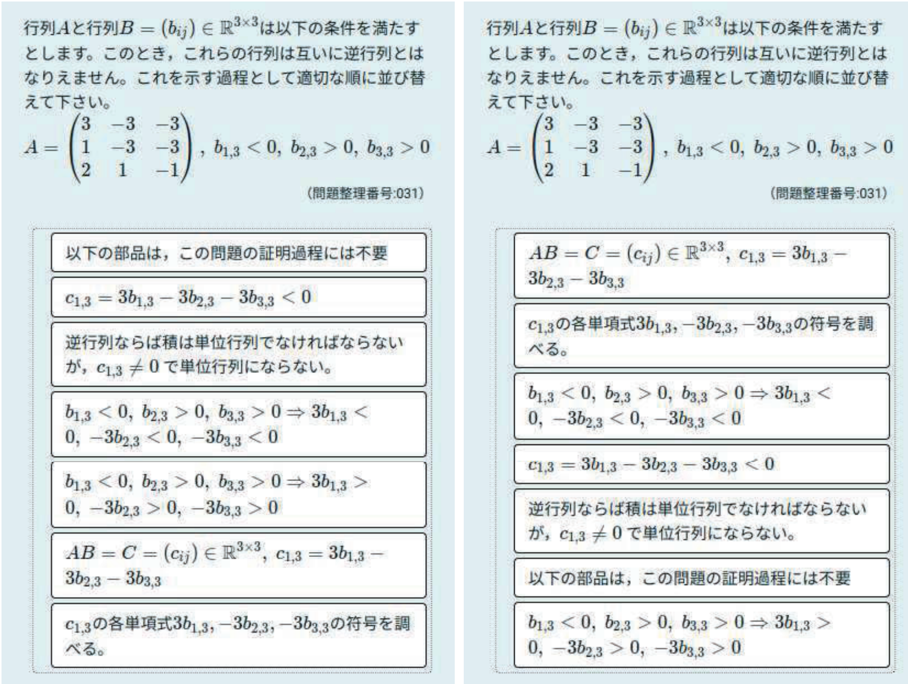

図 3: 逆行列となり得ないことの証明（右側が正答例）

順については学習の段階や教科書などにより様々な方法が考えられるが，この問題例は報告者の授業で指導している方法に基づいていることに留意されたい。即ち，1) 必要な任意定数の個数（解の自由度，対応する同次線形方程式の解空間の次元）を階数から確定させる，2) 任意定数を用いて解の雛形を作る，3) 対応する主成分のない列に対応する未知数に任意定数を導入する，4) 順次，主成分に対応する未知数の解を書き写す，という手順である。

図 3 は，証明問題（与えられた条件下において，互いに逆行列となり得ないことを示す）で順序並び替え問題を試みた例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。この問題では,「以下の部品は，この問題の証明過程には不要」という項目を用意しており，仮に典型的な証明問題であったとしても前後の関係性などの検討が必要にしてある。この他，ワイルカードのような項目も別途用意することでも，同様の効果が得られると考えられる。

3　中等数学の順序並び替え問題の例

この章では，中等数学における順序並び替え問題の例を検討し生成したものを示す（括弧内などで表記している各科目名は旧学習指導要領での表記）。

図 4 は，因数分解を行う手順に関する問題（数学 I）の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。この問題では，1) 共通因数の

括り出し，2) 定数項の約数の組合せの確認，3) 約数の和が 1 次の係数になっていることの確認，4) それに基づく分解結果，という手順を教えていることを想定している。

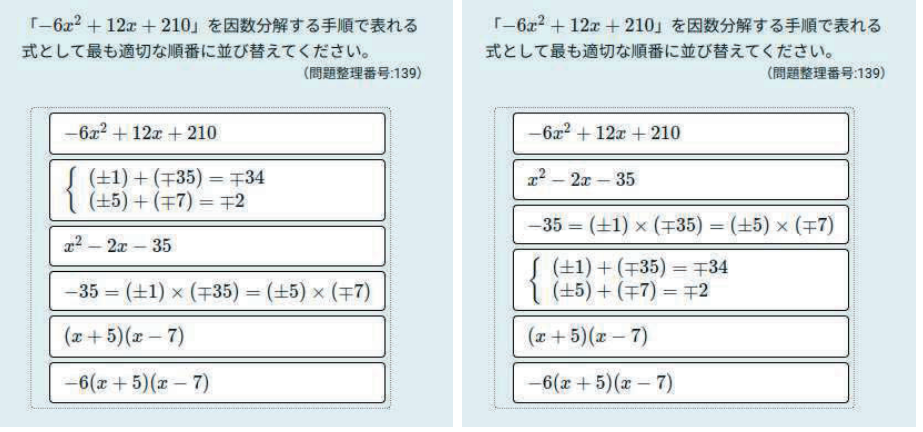

図 4: 因数分解（右側が正答例）

図 5 は，平方完成を行う手順に関する問題（数学 I）の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。この問題では，公式を用いて結果を求めるのではなく，1) 主係数による 2 次と 1 次の単項式の括り出し，2) 2 次式の因数分解の公式に基づく変形，3) 定数項となる項を自乗により求め，4) 定数項を作り出して平方完成を導く，という手順を想定している。図 5 の「$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$」という項目は不要とも考えられるが，ここでは手順の踏襲ではなく，その理由を考えさせるために用意してある。

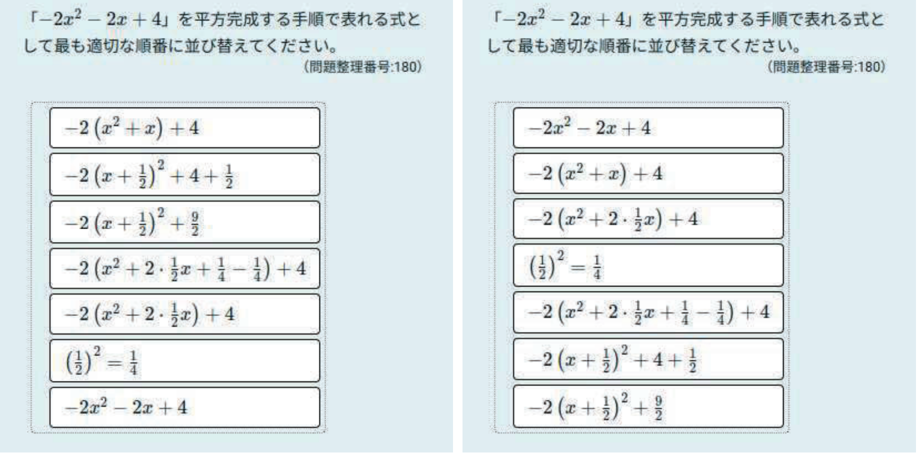

図 5: 平方完成（右側が正答例）

図 6 は，与えられた条件を満たす二次関数を同定する手順に関する問題（数学 I）の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。

この問題では，1) 軸が与えられていることを用いて二次関数の雛形を定め，2) 通過点の条件から連立方程式を導き，3) その連立方程式を整理し解を求める，という手順を想定している。

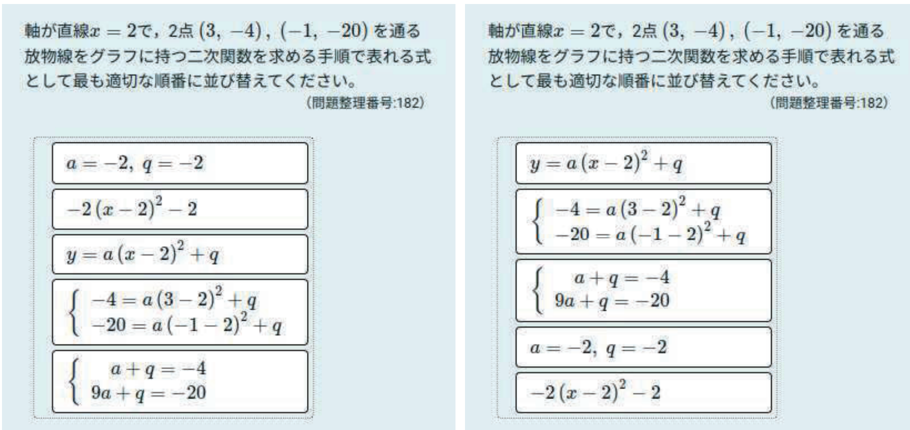

図 6: 二次関数（右側が正答例）

図 7 は，二次不等式を解く手順に関する問題（数学 I）の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。この問題では，1) 左辺に式を集め整理し，2) 結果の左辺を因数分解し，3) それぞれの因子の符号の組合せを導き，4) 組合せ毎に有効な範囲を整理し解を求める，という手順を想定している。二次不等式に関する公式を直接的に用いるのではなく，その背景にある因数分解して得られた因子の符号の組合せをきちんと理解させることを意図している。

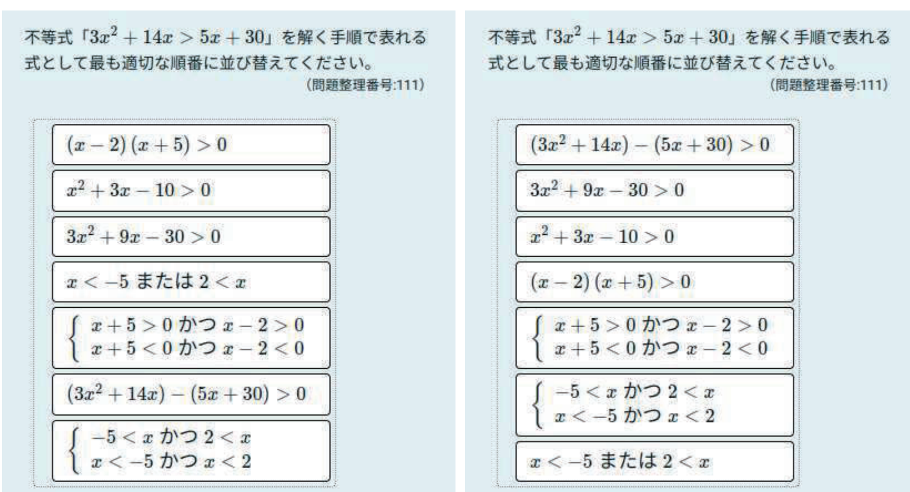

図 7: 二次不等式（右側が正答例）

図 8 は，不等式に関する証明問題（数学 II）の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。証明問題を基にした順序並び替え問題では，説明文や接続詞・副詞などを含めたものが先行研究 [1, 2, 3, 9] では多く見られるが，仮定から推論の枠組みや前後との関係性などを考察させるために，この問題では省いている。

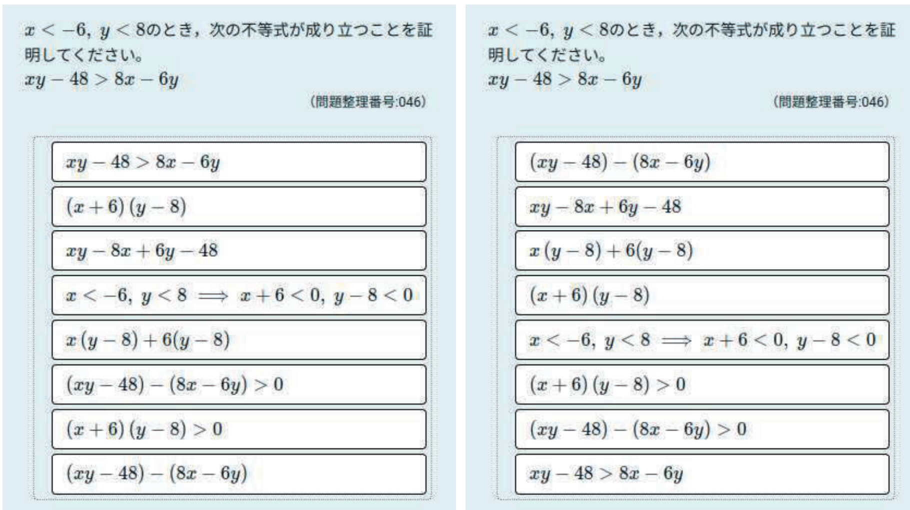

図 8: 不等式の証明（右側が正答例）

図 9 は，直線と楕円が共有点を持つ条件を求めさせる問題（数学 III）の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。この問題では，1) 連立方程式をおき，2) 代入法により 2 次方程式に帰着し，3) 判別式により条件を求める，という手順を想定している。判別式（$\frac{D}{4}<0$）の項目が前後関係から必ずしも正答例の場所になるかは検討の余地もあり，項目を「この 2 次方程式が実数解を持たない条件 $\frac{D}{4}<0$ より」とする選択肢もありえる。

図 10 は，ユークリッドの互除法に関連した不定方程式の整数解を求める問題（数学 A）の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。通常は，ユークリッドの互除法を最後まで計算した後に商と余りの関係式を導き，不定方程式の形に変形して整数解を求めると考えられるが，順序並び替え問題として唯一解を持つようにするため，最初の 2 つのステップを同時に行う形にしている。このように，順序並び替え問題では正答を 1 つに限定するため，通常とは多少異なる手順になる場合がある（報告者は必ずしも欠点とは考えていない）。

図 11 は，独立試行の確率に関係する問題（数学 A）の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。この問題では，通常の確率を求める問題とは異なり，問題文にある確率の計算に合致した試行（ゲーム）になるように並び替えさせている。これにより，数学的思考力も必要とする問題にしている。

図 12 は，内積の性質を用いて展開操作を行うことで式の値を求める問題（数学 B）の例であり，左側が出題直後の状態を，右側が順序を正しく並び替えた後の状態を表す。

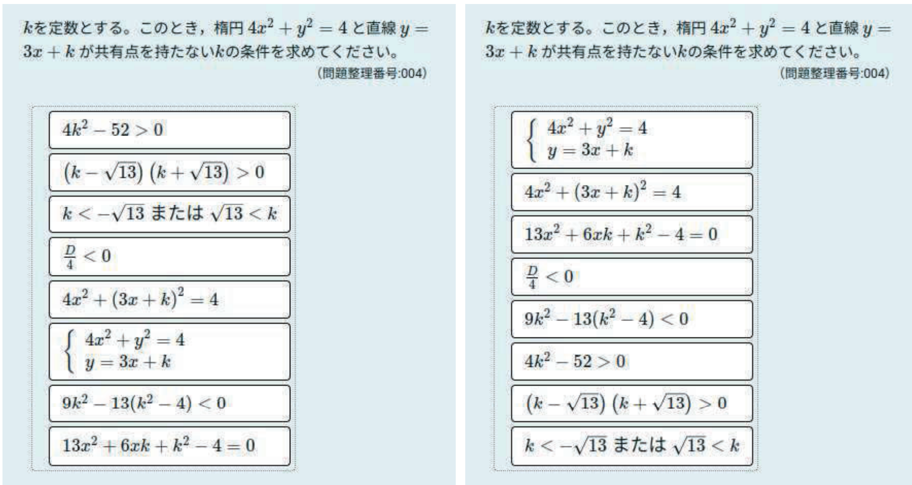

図 9: 直線と楕円の共有点（右側が正答例）

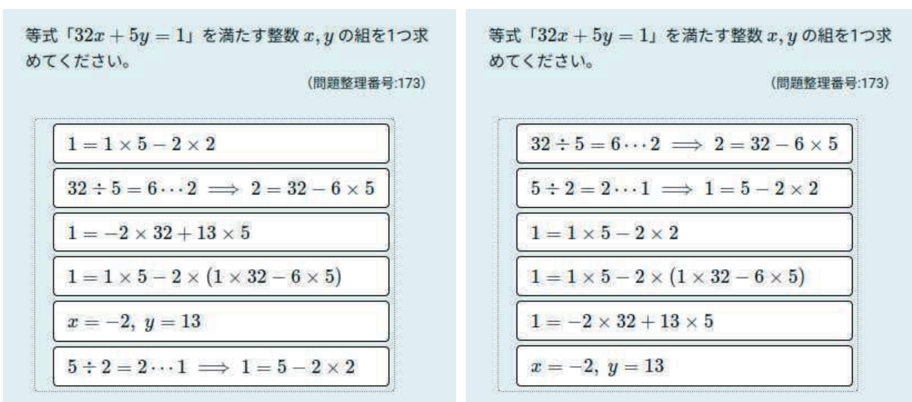

図 10: ユークリッドの互除法（右側が正答例）

可換な多項式の操作として展開するのではなく，きちんと内積の性質を用いて展開することの確認を求めている問題となる。

4　まとめと課題

本稿では数学教育における順序並び替え問題の具体例について，高等教育からは線形代数分野で 3 問，中等教育からは各科目合わせて 9 問を紹介した。これらの問題は，知識・技能を確認する小テストとしての利用も可能であるが，それと同時に，数学的思考力を育成するドリルとしての可能性を示せたと考える。しかしながら，知識・技能のみならず数学的思考力をも視野に入れる形で，どのように順序並び替え問題を設計すべきかは不明な部分も多く，問題の有用性の実践的な確認と共に，今後の課題と言える。

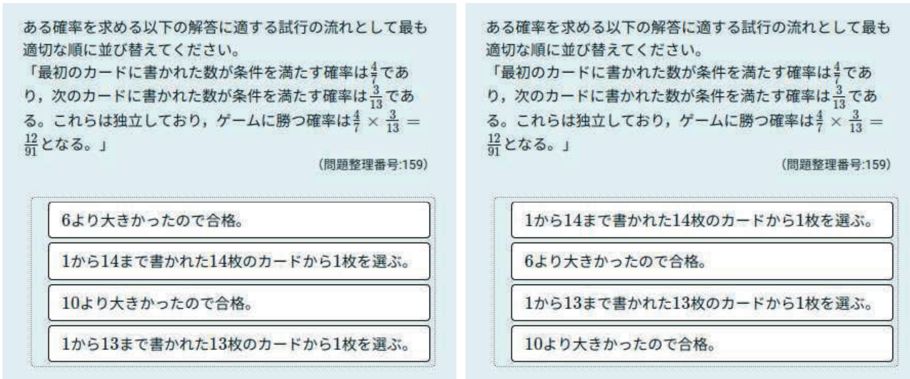

図 11: 独立試行の確率（右側が正答例）

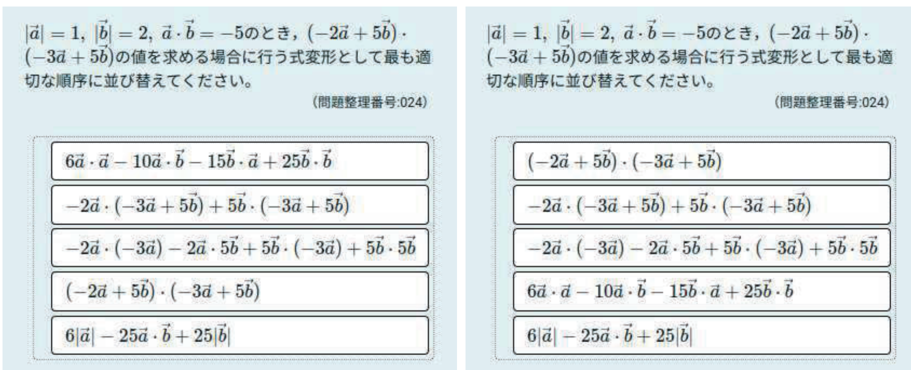

図 12: 内積の展開（右側が正答例）

参考文献

[1] 川本佳代. 古谷美夏. 宮脇綾子. 内田智之. 平嶋宗. 林雄介. 数学証明問題を用いた論理的思考力育成システムの開発. **人工知能学会全国大会論文集**, 1L301–1L301. 2018.

[2] 倉山めぐみ. 渋谷勇気. 証明問題解決支援システムにおけるダミーカード生成手法の検討. **先進的学習科学と工学研究会**, 85:55–58. 2019.

[3] 渋谷直樹. 時井真紀. 三角形の合同証明問題における学習支援システムの構築 –「なぞる」行為を通して –. **第 *81* 回情報処理学会全国大会講演論文集**, 799–800. 2019.

[4] 長坂耕作. 数式処理と学習管理システム – 静的評価の再評価 –. 研究集会 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究 (2017 年 9 月). **数理解析研究所講究録**, 2067:160–169. 2018.

[5] 長坂耕作. Moodle XML Question Generator for Python. 研究集会 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究 (2019 年 8 月). **数理解析研究所講究録**, 2142:67–70. 2019.

[6] 長坂耕作. 多肢選択問題の自動生成 – 数学 III の微分積分から偏微分まで –. 研究集会 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究 (2020 年 11 月). **数理解析研究所講究録**, 2178:31–38. 2021.

[7] K.Nagasaka. Multiple-choice questions in Mathematics: automatic generation, revisited. *Electronic Proceedings of the 25th Asian Technology Conference in Mathematics (ATCM2020)*, 21785-1–21785-15. 2020.

[8] 長坂耕作. 数学的思考力と順序並び替え問題の自動生成. **数式処理**. 印刷中.

[9] 濱田さとみ. 鷹岡亮. 横山誠. 中学校数学科合同証明を対象とした証明構造理解支援 Web アプリの開発と有用性検討. **日本教育工学会論文誌**. 42:169–172. 2018.