

「GIGA スクール構想」の実現に向けた 数学科教材開発に関する研究 — 表計算ソフトの活用からの「第一歩」—

福岡教育大学教職大学院 有元 康一

Koichi Arimoto

Graduate School of Education, University of Teacher Education Fukuoka

1 はじめに

1.1 問題の所在

中央教育審議会 [1] によれば, GIGA スクール構想は令和元 (2019) 年度補正予算において, 児童生徒向けの 1 人 1 台端末と, 高速大容量の通信ネットワークを一体的に整備するための経費が盛り込まれることにより進められ, 令和 2(2020) 年度中に義務教育段階の全学年の児童生徒 1 人 1 台端末環境の整備を目指し, 家庭への持ち帰りを含めて十分に活用できる環境の整備を図ることとされている. また, GIGA スクール構想の実現により, 災害や感染症の発生等においても学習の継続を目指し, これまでの実践と ICT の活用を適切に組み合わせることで, 教育の質を向上させることが期待されている. この GIGA スクール構想について, 文部科学省初等中等教育局 [2] によれば, 令和 3(2021) 年 3 月末時点で, 公立の小学校, 中学校, 義務教育学校, 中等教育学校 (前期課程) 及び特別支援学校 (小学部・中学部) の端末の整備状況について, 全自治体等のうち 1748 自治体等 (96.5%) が令和 2 年度内に納品を完了する見込みであると発表している. ここで「納品完了」とは, 児童生徒の手元に端末が渡り, インターネットの整備を含めて学校での利用が可能となる状態を指す. このように, 児童生徒への 1 人 1 台端末の整備が進むなか, 実践事例が提供され始めている. しかし, ここで提示されている事例は先進的なものであって, 著者の昨年度の勤務経験からみても, その活用については今後乗り越えなければならない課題も多く, 実際多くの教師が戸惑いながら実践を模索している状況である. このような現状認識のなかで, GIGA スクール構想を推進するために, 必ずしも ICT 機器の操作を得意と考えていない教師も含めた, より多くの教師が実践できる教材例を提示することが, 課題解決へ向けての一つの方策となり得ると考える.

1.2 研究の目的

そこで本研究では, 教師が日常的に校務で使用し, 馴染みのある表計算ソフトを活用した教育利用に関する事例を提示し, それを検討することで一人でも多くの教師がより積極的に ICT を活用できるようにすることを目的とする. ここで扱う題材は, 中学生までに限らず高校生も対象とする. 指導過程や内容を工夫することにより, 中学生, 高校生を問わず実践が可能である.

2 ヘロン三角形を見出す課題

以前から著者はヘロン三角形を見出す授業実践を行ってきた。令和元(2019)年度において、中学生から大学生までを含む一般市民を対象とした実践 [3], および中学校の課題学習で行った実践 [4] を行った。また令和3(2021)年度において、高等学校の課題学習で実践を行った。これらの実践のなかで、表計算ソフトを活用した実践についてその概要を示す。まず、ヘロン三角形に関連する内容について簡単に述べ、次に実践の流れを述べる。

2.1 ピタゴラス三角形とヘロン三角形

ヘロン三角形に関連する内容を簡単に述べる。詳細は [3], [4] で述べられている。

定義 1 3辺の長さが整数である直角三角形をピタゴラス三角形と呼ぶ。この3辺の長さの組をピタゴラス数と呼ぶ。

命題 2 ピタゴラス三角形の面積は整数である。

定義 3 3辺の長さや面積が整数である三角形をヘロン三角形と呼ぶ。

命題 4 ピタゴラス三角形はヘロン三角形である。

定理 5 [5, Carmichael] すべてのヘロン三角形の3辺の長さは、

$$n(m^2 + h^2), \quad m(n^2 + h^2), \quad (m + n)(mn - h^2)$$

の形の数に比例する。ここで、 m, n, h は正の整数で、 $mn > h^2$ である。

2.2 中学校課題学習における実践の流れ

ここでは、表計算ソフトの活用の観点から実践の概要について示す。詳細は [4] で述べられている。実践は合計2.5時間で行った。3時間目の0.5時間分は、1時間の前半部分で行った。

2.2.1 1時間目

1. ヘロン三角形が存在するのかを問い、自分の考えた例をワークシートに記述させる。(個人活動)

2. ピタゴラス数の一覧表と2つのピタゴラス三角形を図示したものを与える。(個人活動)

表 1: ワークシートで示したピタゴラス数の組

No.	a	b	c 斜辺	S 面積
1	3	4	5	6
2	5	12	13	30
3	7	24	25	84
4	8	15	17	60
5	9	40	41	180
6	11	60	61	330
7	12	35	37	210
8	13	84	85	546

No.	a	b	c 斜辺	S 面積
9	16	63	65	504
10	20	21	29	210
11	28	45	53	630
12	33	56	65	924
13	36	77	85	1386
14	39	80	89	1560
15	48	55	73	1320
16	65	72	97	2340

ワークシートに、表 1 のように各辺の長さが 100 以下の互いに素なピタゴラス数の組の表 (計 16 組) を載せ、それらのなかの No.1 と No.2 の 2 つの三角形も図示しておく。

3. ピタゴラス三角形の面積は整数となることを確認させる。(個人活動)

ピタゴラス数の表 (表 1) において、直角をはさむ辺の長さは、一方が偶数、もう一方が奇数となり、直角三角形の面積はすべて整数となることを確認させる。

4. 直角をもたない三角形で、ヘロン三角形になるものはあるかを考えさせる。(グループ活動)

2 で図示した 2 つのピタゴラス三角形 No.1 と No.2 を与え、これらの三角形からヘロン三角形が構成できないかを考えさせる。また、他の場合についても考えさせる。一方または両方のピタゴラス三角形を、適当に整数倍の相似拡大をして組み合わせれば、直角をもたないヘロン三角形を構成できることに気づかせる。

5. 解答が得られたグループは、グループの考え方をホワイトボードに図示するように指示する。(グループ活動)

6. グループの代表に解法を説明させて、全員で共有する。(全体活動)

7. 本時のまとめをする。(全体活動)

「ピタゴラス三角形を 2 つ組み合わせることにより、ヘロン三角形をつくることができる。」とまとめる。

2.2.2 2 時間目

1. ヘロン三角形の Carmichael による構成法が書かれているワークシートを配る。(個人活動)

Carmichaelの構成法がヘロン三角形をピタゴラス三角形に相似な2つの三角形を組み合わせたものと捉えることによって得られることに言及する。この構成法を使えば、ヘロン三角形がどんどん見つかることを伝える。

2. 表計算ソフトを活用することにより、ヘロン三角形の三辺の長さや面積を提示する。(個人活動)

パソコンを1台使用し、表計算ソフトであるMicrosoft Excelを活用して、生徒に $mn > h^2$ を満たす正の整数値 m, n, h を選ばせ、教師が入力する。また、パソコンの画面をスクリーンに表示することにより、ヘロン三角形の三辺の長さ a, b, c と面積 S を提示する。もし、 $mn \leq h^2$ のときは、三辺の長さは「×」と表示するようにしておく。図1は、5行目には $m = n = h = 1$ を入力し、6行目以降には $m \leq n \leq 4, mn > h^2$ となる値を入力した場合の画面である。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ヘロン三角形の三辺の長さや面積								
2	m, n, h は正の整数で $mn > h^2$ を満たす								
3	入力			三辺 a, b, c の長さ			面積		
4	m	n	h	a	b	c	S		$a=n(m^2+h^2)$
5	1	1	1	×	×	×	×		$b=m(n^2+h^2)$
6	1	2	1	4	5	3	6		$c=(m+n)(mn-h^2)$
7	2	2	1	10	10	12	48		$S=mnh(m+n)(mn-h^2)$
8	1	3	1	6	10	8	24		
9	2	3	1	15	20	25	150		
10	2	3	2	24	26	10	120		
11	3	3	1	30	30	48	432		
12	3	3	2	39	39	30	540		
13	1	4	1	8	17	15	60		
14	2	4	1	20	34	42	336		
15	2	4	2	32	40	24	384		
16	3	4	1	40	51	77	924		
17	3	4	2	52	60	56	1344		
18	3	4	3	72	75	21	756		
19	4	4	1	68	68	120	1920		
20	4	4	2	80	80	96	3072		
21	4	4	3	100	100	56	2688		

図 1: ヘロン三角形の三辺の長さ等を表す Excel の画面

3. 表計算ソフトの活用により得られたヘロン三角形の1つを取りあげ、面積を求めさせる。(グループ活動)

Carmichaelの構成法によって得られたヘロン三角形を、垂線で2つの直角三角形に分割し、三平方の定理を利用して面積を求めさせる。

4. 本時のまとめをする。(全体活動)

2.2.3 3時間目

1. 前時と同じ方法で、今回は電卓を使用してヘロン三角形を求めることを伝える。(個人活動)
2. 1つのヘロン三角形の面積を求めるように指示する。(グループ活動)
全員が3辺の長さが、6, 25, 29であるヘロン三角形の面積を求めることを伝える。
3. ヘロン三角形を2つの三角形に垂線で分割したとき、2つのピタゴラス三角形から構成されるとは限らないことを知らせる。(全体活動)

2.3 高等学校課題学習における実践の概要

前節で示した中学校における実践をもとに、令和3(2021)年度に高等学校で、ヘロン三角形を見つけ出すという同じ目的で実践を行った。この詳細については別の機会に譲りたい。前節で示した中学生を対象に2.5時間で行った授業内容を高校生の実態等を踏まえて精選し1時間で行った。表計算ソフトの活用場面においては、教師の提示方法、生徒の活動内容ともにほぼ同じ内容であった。ヘロン三角形の面積を求める場面では、正弦(sin)を使った求め方にも触れた。

3 コラッツ予想に関する課題

著者が、令和3(2021)年度前期に大学生へ行った講義の内容について述べる。ある大学教育学部の初等教育教員養成課程に在籍している学生を対象とした小学校算数科の教科専門科目「小専算数」において、コラッツの予想に関する話題を提示した講義についてその概要を示す。まず、コラッツ予想について簡単に述べ、次に講義の流れを述べる。この内容については、今回大学生に向けた講義のものであるが、小学生から高校生までの授業で扱うこともできると考えられるため、今回提示することとした。

3.1 コラッツ予想

定義 6 [6] 任意の正の整数 a_1 が与えられたとき、 $n \geq 1$ に対して次のように定義されるものをコラッツ・アルゴリズムと呼ぶ。

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n/2 & a_n \text{が偶数のとき,} \\ 3a_n + 1 & a_n \text{が奇数のとき.} \end{cases}$$

予想 7 上で定義したコラッツ・アルゴリズムは、有限回の計算で1に達する。この予想をコラッツ予想と呼ぶ。角谷予想と呼ぶ場合もある。この予想は現在未解決である。

3.2 講義内容

授業全 15 回のうち、第 3 回の講義で次に挙げる整数に関する話題を扱った。

- 素数について（素数の定義、素数が無限にあることの証明）
- ピタゴラス数について
- コラッツ予想（角谷予想）について

講義の最後に演習問題として、各自の学籍番号の末位 2 桁についてコラッツ予想が成り立つことを確かめる問題を出題した。学生にとって興味深く、分かりやすい内容であったためか、意欲的に取り組んでいた。学生の学籍番号により計算回数が異なり、多数の計算が必要になった学生もいた。

3.3 講義後のフォロー

この講義では、普段の学生への連絡は Google 社が教育機関向けに提供している学習ツール Google Workspace for Education の教育向けアプリである Google Classroom (以後 Classroom と表す) を活用している。Classroom に本科目専用の「クラス」を作成し、そこへ連絡事項等を記載して連絡を行っている。

今回の演習について、講義後に授業者が 1 から 99 までのすべての整数について表計算ソフト Microsoft Excel を活用してコラッツ・アルゴリズムを適用し、結果を求めた (図 2)、作成にあたり [7] を参考にした。またそれを Classroom 内で提示した (図 3)。図 2 では、ある正の整数に対してコラッツ・アルゴリズムを適用した計算の過程が (縦方向の) 列に示されている。本講義では、コラッツ予想を統一して「角谷予想」としているのので、図 3 ではこの表現になっている。

4 結語

本研究では、表計算ソフトを活用した教育利用に関する事例を 2 例提示した。生徒・学生は今回取り上げた題材について意欲的に取り組むことができた。このことから、数学の魅力や面白さの一端を伝えることができたのではないかと考えている。このように初等整数論や初等幾何学に関する話題は、題意が分かりやすく馴染みのある題材が多いため、中学校や高等学校における数学教育においてもますます取り入れていけるのではないかと考えている。今回挙げたように表計算ソフトでは関数を活用することで簡単に計算をすることができるため、教師が抵抗なく授業に取り入れていけるのではないかと考えている。GIGA スクール構想の実現に向け、表計算ソフトの活用がまず「第一歩」となり得るのではないかと考えている。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
1	回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
2	1		1	10	2	16	3	22	4	28	5	34	6	40	7	46	8	52	9	58	10	64	11	70	12	76	13	82
3	2			5	1	8	10	11	2	14	16	17	3	20	22	23	4	26	28	29	5	32	34	35	6	38	40	41
4	3			16		4	5	34	1	7	8	52	10	10	11	70	2	13	14	88	16	16	17	106	3	19	20	124
5	4			8		2	16	17		22	4	26	5	5	34	35	1	40	7	44	8	8	52	53	10	58	10	62
6	5			4		1	8	52		11	2	13	16	16	17	106		20	22	22	4	4	26	160	5	29	5	31
7	6			2			4	26		34	1	40	8	8	52	53	10	11	11	2	2	13	80	16	88	16	94	
8	7			1			2	13		17		20	4	4	26	160		5	34	34	1	1	40	40	8	44	8	47
9	8					1	40	52		10	2	2	13	80		16	17	17				20	20	4	22	4	142	
10	9						20	26		5	1	1	40	40		8	52	52				10	10	2	11	2	71	
11	10						10	13		16			20	20		4	26	26				5	5	1	34	1	214	
12	11						5	40		8		10	10		2	13	13				16	16		17		107		
13	12						16	20		4		5	5		1	40	40				8	8		52		322		
14	13						8	10		2		16	16			20	20				4	4		26		161		
15	14						4	5		1		8	8			10	10				2	2		13		484		
16	15						2	16				4	4			5	5				1	1		40		242		
17	16						1	8				2	2			16	16							20		121		
18	17							4				1	1			8	8						10		364			
19	18							2								4	4						5		182			
20	19							1									2	2					16		91			
21	20																1	1					8		274			
22	21																						4		137			
23	22																						2		412			
24	23																						1		206			

図 2: コラッツ・アルゴリズムの計算過程を表す Excel の画面

ストリーム 授業 メンバー 採点

+ 作成 Meet Google カレンダー クラスのドライブ フォルダ

📄 第3回授業 (4月26日) 角谷予想について 最終編集: 5月5日

Excelで1から99までの数について、角谷予想が成り立つことを計算してみました。
 110回以上の計算が必要になったのは、
 27→111回, 54→112回, 55→112回, 73→115回,
 82→110回, 83→110回, 97回→118回
 でした。興味のあるかたは、Excelファイルをご覧ください。
 (Excelファイル作成時に参考にした資料 <https://dw230.jp/f/508/>)

 R3 前期小専算数 角谷予...
Excel

資料を表示

図 3: 講義後に学生に提示した Classroom の画面

謝辞

著者による RIMS 共同研究「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」における講演に対して、有益な御助言をいただきました先生方に御礼を申し上げます。

参考文献

- [1] 中央教育審議会：「令和の日本型学校教育」の構築を目指して -全ての子供たちの可能性を引き出す、個別最適な学びと、協働的な学びの実現-（答申），2021.
- [2] 文部科学省初等中等教育局 情報教育・外国語教育課：GIGA スクール構想の実現に向けた ICT 環境整備（端末）の進捗状況について（確定値），2021.
https://www.mext.go.jp/content/20210518-mxt-jogai01-000009827_001.pdf
(2021 年 8 月 4 日最終閲覧)
- [3] 有元康一：ヘロン三角形を題材とした課題学習における表計算ソフトの活用，数理解析研究所講究録 2142，京都大学数理解析研究所，pp.92-99，2019.
- [4] 有元康一：中学校におけるヘロン三角形を題材とした課題学習 -ピタゴラス三角形の一般化としてのヘロン三角形の構成-，数学教育学会誌 62(1・2)，数学教育学会，2021（印刷中）.
- [5] R.D.Carmichael： *The Theory of Numbers and Diophantine Analysis*, Dover, pp.11-13, 1959.
- [6] 小松尚夫 訳：初等整数論 9 章 第 2 版，森北出版，p.30，2008.
James J.Tattersall： *Elementary Number Theory in Nine Chapters [Second Edition]*, Cambridge University Press, 2005.
- [7] デジタルワールド：なんでも数式で解いてみる「コラッツの問題」 -エクセル関数の使い方，<https://dw230.jp/f/508/>(2021 年 8 月 6 日最終閲覧)