

工科大学のオンラインによる 数学専門科目の指導法

工学院大学 教育推進機構

長谷川 研二* (Kenji Hasegawa)

Center for Promotion of Higher Education, Kogakuin University

1 はじめに

報告者の所属大学は工科大学の学部と大学院で構成されており、数学に関しては他大学の理工系学部と同じように1年次に微分積分と線形代数を履修し、2年次以降は学部・学科によって専門科目としてベクトル解析、Fourier 解析、複素関数等、および微分幾何学や位相幾何学でない微分積分や線形代数の応用としての幾何学が履修できる。大学院科目に関しては報告者は線形代数の応用である線形系と求積法で解けない非線形系を含む常微分方程式に関する科目を20年以上担当してきたが、その他に2年前に担当者が退職したことにより応用解析学 (Fourier 解析, 直交関数系, ウェーブレット) と偏微分方程式に関する科目 (1階偏微分方程式, Laplace・熱・波動方程式) も担当している。また所属大学では一部の学科で数学の一種または専修教職免許が取得でき、報告者の担当科目の多くが専門科目として指定されている。

2020年に新型コロナウイルスが世界中に蔓延して、感染を抑えるために学生を入構させないで、インターネットによるオンライン授業を余儀なくされた。所属大学では実験・実習科目の授業を夏から秋にかけて構内で実施した以外は全てオンラインで報告者は同年度で教室の授業が全くなく、講義は全てオンラインとなり、教材は音声を付けたPowerPointで作成しGoogleDriveにアップロードした。学生は授業開始までに教材をダウンロードし、教室での講義の代わりにPowerPointのスライドショーを視聴して、オンラインで小テストを解いたり、レポートを画像で提出したりした。数学系科目については、大部分の1年生が受講する微分積分や線形代数のクラスが多数あり、科目ごとの共通教材を数学の専任教員が分担して作成した。発展的な専門科目は担当者が1人だけの科目が多く、報告者は担当する専門科目が多いので共通教材は作成せず、専ら自分が担当する専門科目の教材を作成した。スライドはPowerPointしか認められなかったので、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ によるPDFファイルから文字や数式を画像としてスクリーンショットの機能を用いて貼り付ける他に、今までの授業で学生に見せてきた教材の図も貼り付けた。しかし、教室の授業ではアドリブで黒(白)板にフリーハンドで簡単な図を描くこともあり、コロ

*E-mail address: ft10058@ns.kogakuin.ac.jp

ナ感染前までに作成してきた図だけでは不十分なのでオンライン教材のために新たに作成した図も多数ある。特に2年前から担当している大学院科目は2年目にオンライン授業になったので、コンテンツが不十分で $\text{K}\text{E}\text{T}\text{C}\text{i}\text{n}\text{d}\text{y}$ によるPDFファイルの図を貼り付けるだけでなくMatlabで作成したPNGファイルもデータのまま挿入した。

本稿では主に大学院科目のオンライン教材について述べたい。大学院生といっても数学科の学生のように $\varepsilon - \delta$ 論法による微分積分を学習していないので厳密な証明を説明してもついていけない。しかし、公式だけ与え計算ばかりさせても、微分積分や線形代数のようにきちんと解答が求まるような問題が非常に少なく、また計算できるだけでは現実問題に数学を適用するまでに至らない。ある程度厳密さを犠牲にしても(正当性は数学の専門家が保証する)受講する大学院生が専門分野に応用できるようになるために感覚的でも理解させることは最低限必要である。筆者は大学院生の時からFourier解析に基づく線形偏微分方程式を専門としてきたので、その経験を生かしながら学生が理解できるように厳密さを調整して、適宜スライドに図を挿入することにより理解を促す工夫を試みた。

2 Fourier級数の収束

関数 $f(x)$ に対して Fourier 積分

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (1)$$

により $f(x)$ を Fourier 級数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (2)$$

で表現する。実際に収束するか(つまり \sim が $=$ になるか)については $f(x)$ が連続、微分可能、 L^2 ノルムで有界などの適当な条件を課すと、各点収束や L^2 収束することが知られている。数学専攻の学生であれば理論付けを優先しLebesgue積分や関数解析を学んでからFourier解析を学習するので、Hilbert空間になる区間 $[-\pi, \pi]$ 上の L^2 空間において $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$)は正規直交系で、 L^2 関数を正規直交系の線形結合で表せば係数は内積である(1)で求まることが理解できる。Fourier級数は応用上非常に重要であるので数学専攻でない多くの理工系の学生も微分積分の発展として学んでいるが、 $\varepsilon - \delta$ 論法による微分積分やLebesgue積分、関数解析を学んでいないので(1)によるFourier級数と元の関数 $f(x)$ との関係を理解できないままで、(1)は1年次で習った積分の例題に留まってしまいがちになる。非数学専攻向けのFourier解析の教科書では元の関数のグラフとFourier級数の部分和のグラフを比較させた図を挿入し、Fourier級数の元の関数への収束性を説明していることがよくある。報告者は具体的な関数に対する(1)を計算するだけでなく $\text{K}\text{E}\text{T}\text{C}\text{i}\text{n}\text{d}\text{y}$ で図の TEX データを作成し、ketslideにinputしてコンパイルしたPDF画像を教室のスクリーンに映したり2020年からのオンライン授業では教材のPowerPointに適当にトリミングしてからスクリーンショットで挿入してアニメーションのようにFourier級数の部分和が収束する様子をスライドショーで見せた。

例として $f(x) = x$ とすれば Fourier 級数は

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$$

である. 部分和 $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k} (-1)^{k+1} \sin kx$ が $(-\pi, \pi)$ において $f(x)$ に収束する様子を見せるために図 1~3 のような $y = x$ と部分和のグラフ (赤線) を描写した図を作成した. 図 1 は $n = 1$, 図 2 は $n = 5$, 図 3 は $n = 20$ であるが, 実際はもっと多くの n に対する図も作成し, アニメーションとしてスライドに挿入した. n を増やせば部分和のグラフは $y = x$ に近づいていく様子が確認できる. Fourier 級数は周期 2π の周期関数であるが, $f(\pi) \neq f(-\pi)$ であると $f(x)$ は $[-\pi, \pi]$ の外側で連続な周期関数に修正できないので $x = \pm\pi$ で $f(x)$ は不連続と見做され, 区間の両端の近くで収束が遅くなることも確認できる.

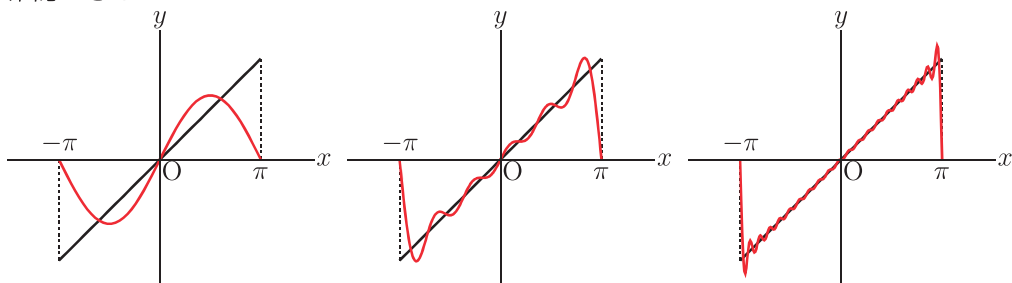


図 1

図 2

図 3

$f(\pi) = f(-\pi)$ になる例として $f(x) = |x|$ とすれば Fourier 級数は

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

である. 部分和 $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$ が $[-\pi, \pi]$ において $f(x)$ に収束する様子を見せるために図 4~6 のような $y = |x|$ と部分和のグラフを描写した図を作成した. 図 4 は $n = 0$, 図 5 は $n = 1$, 図 6 は $n = 3$ である. $f(x) = |x|$ は $[-\pi, \pi]$ の外側で連続な周期関数として修正できるので小さい n でも部分和を $f(x)$ に近づけられることが確認できる.

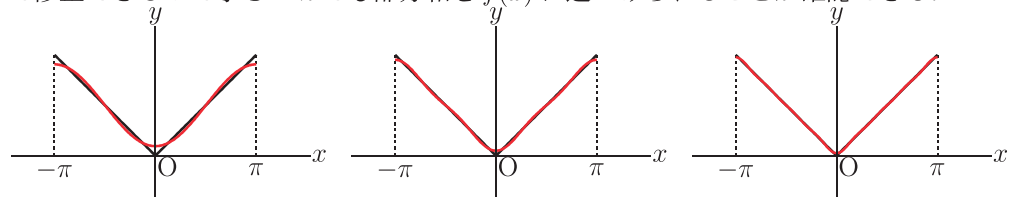


図 4

図 5

図 6

一般的な関数 $f(x)$ に対する (2) の収束性に関して, 高校数学で習う等比級数の和の公式を適用するために複素指数関数による正規直交系 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$ ($n \in \mathbb{Z}$) に基底変換した複素 Fourier 級数

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (3)$$

の収束と同値であり、係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} dx \quad (4)$$

で求まる。以下、所属大学の大学院生対象の授業で説明した Fourier 級数 (3) の収束性の証明の概要を述べる。微分積分を学習した工科系の学生が理解できる範囲で議論することを最大限留意し、オンライン教材では音声をつけたスライドショーで図 1~6 をアニメーションで見せた後に可能な限り数式を説明した。

(3) の第 $-n$ 項から n 項までの部分和は

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^n e^{ik(x-y)} dy$$

になり

$$D_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{k=1}^n (e^{ikx} + e^{-ikx}) \right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \quad (5)$$

とすれば

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y)f(y) dy \quad (6)$$

で表せる。 $D_n(x)$ は Dirichelet 核と呼び、初項 e^{-inx} 、公比 e^{ix} の第 $2n+1$ 項までの等比級数の和なので

$$D_n(x) = \frac{e^{-inx}(1 - e^{i(2n+1)x})}{2(1 - e^{ix})} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{2(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}})} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad (7)$$

で表せることができる。 $f(x)$ が周期 2π の周期関数で微分可能のとき、部分積分を (6) に適用すれば $S_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束することが示せる。 Lebesgue 積分を学べば、 L^2 関数が微分可能な関数で L^2 ノルムの意味で近似できることにより $f(x)$ を L^2 関数まで拡張でき、 Fourier 級数は l^2 級数になることまで結論できる。 Lebesgue 積分を学んでいない学生に対して教えるとなると、区分的に微分可能な関数への拡張までが限界で、不連続な点において Fourier 級数の部分和が $f(x)$ の右極限と左極限の平均値に収束する Gibbs 現象が見られる。

議論をわかりやすくするために $f(x)$ は有界な関数で、 $-\pi \leq a < b \leq \pi$ 、 $b - a < 2\pi$ として、 $x < a$ または $b < x$ のとき $f(x) = 0$ で $x \neq a, b$ で微分可能で $a < x < b$ で導関数 $f'(x)$ は連続で有界とする。この条件下で収束性を調べれば、線形性により $f(x)$ は区分的に微分可能な関数への拡張は容易である。(6) より

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b D_n(x-y)f(y) dy = \frac{1}{\pi} \int_{a-x}^{b-x} D_n(y)f(x+y) dy$$

になるので (7) と部分積分により

$$\begin{aligned} \int_{a-x}^{b-x} D_n(y) f(x+y) dy &= -\frac{1}{2n+1} \int_{a-x}^{b-x} \frac{f(x+y)}{\sin \frac{y}{2}} \left(\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) y \right)' dy \\ &= -\frac{1}{2n+1} \left(-\frac{f(b)}{\sin \frac{b-x}{2}} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) (b-x) \right) + \frac{f(a)}{\sin \frac{a-x}{2}} \cos \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) (a-x) \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_{a-x}^{b-x} \left(\frac{f(x+y)}{\sin \frac{y}{2}} \right)' \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) y dy \right) \end{aligned} \quad (8)$$

に変形できる. 注意しなくてはならないことは分母の \sin の値が 0 になるかであるが, $x < a$ または $b < x$ のときは分母の絶対値は正の定数より小さくならず, 分子は n に関係なく一様に評価できるので積分が発散する心配はなく, 括弧の前に $\frac{1}{2n+1}$ を掛けているので $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する.

$x = b$ のとき $0 < \delta < b - a$ とすれば

$$\int_{a-b}^0 D_n(y) f(b+y) dy = \int_{-\delta}^0 D_n(y) f(b+y) dy + \int_{a-b}^{-\delta} D_n(y) f(b+y) dy = (A) + (B)$$

になり (B) の $|y|$ は δ 以上なので (7) より $D_n(y)$ の分母は 0 にならず

$$|(B)| \leq \frac{C}{\delta(2n+1)} \quad (9)$$

が示せる. (A) に関しては

$$(A) = \int_{-\delta}^0 D_n(y) f(b) dy + \int_{-\delta}^0 D_n(y) (f(b+y) - f(b)) dy = (A1) + (A2)$$

に変形し, (5) 及び (8) と同様な部分積分により $n \rightarrow \infty$ のとき

$$(A1) = \left(\int_{-\pi}^0 D_n(y) dy - \int_{-\pi}^{-\delta} D_n(y) dy \right) f(b) \rightarrow \frac{\pi}{2} f(b) \quad (10)$$

が示せる. (A2) の絶対値は

$$|(A2)| = \left| \int_{-\delta}^0 \frac{f(b+y) - f(b)}{2 \sin \frac{y}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) y dy \right| \leq \frac{\pi}{2} \int_{-\delta}^0 \left| \frac{f(b+y) - f(b)}{y} \right| dy$$

で評価され, $f(x)$ は微分可能で導関数は有界であるので, 平均値の定理より分母が 0 に近づくことによる発散を回避でき

$$|(A2)| \leq C \int_{-\delta}^0 dy = C\delta \quad (11)$$

を得る. δ は正の数で 0 にいくらでも近づけられるので (A) + (B) の収束性を認めれば極限值は $\frac{\pi}{2}f(b)$ しかないことになる. しかし, 収束性まで示すことについては $\varepsilon - \delta$ 論法でないとは厳密な議論ができない. 実際に任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ になるように, 先に (11) により δ を定めてから (9) より n をある自然数より大きくすればよいことが導けるが, $\varepsilon - \delta$ 論法に不慣れな非数学専攻の学生に対してそのような解説は難しく, 実際の授業 (スライド) では収束性は自明として先に進めた.

$a < x < b$ のとき $\delta > 0$ を $\delta < x - a$, $\delta < b - x$ をみたすように選べば

$$\begin{aligned} & \int_{a-x}^{b-x} D_n(y)f(x+y) dy \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} D_n(y)f(x+y) dy + \int_{\delta}^{b-x} D_n(y)f(x+y) dy + \int_{a-x}^{-\delta} D_n(y)f(x+y) dy \\ &= (C) + (D) + (E) \end{aligned}$$

(D) と (E) の絶対値は (9) と同様な不等式を満たし, (C) に関しては (5) より $D_n(y)$ は偶関数なので (10) の代わりに (C) $\rightarrow \pi f(x)$ が示せる.

線形性により最終的には, 関数 $f(x)$ が $-\pi \leq x \leq \pi$ において有界で, 有限個の点を除いて微分可能で導関数が連続で有界であれば, $-\pi < x_0 < \pi$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \right)$$

$x_0 = \pm\pi$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\pm\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow \pi - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\pi + 0} f(x) \right)$$

でまとめることができる.

理路整然と説明したつもりでも学生 (生徒) はなかなかわかってもらえないことがあるのは数学教師の最大の悩みで, ましてや非数学専攻の学生が受講しているので, 証明で終わらせないで最後に区分的に定義された単純でない $f(x)$ の Fourier 級数のグラフ図を用意した. 複雑なのでスライドに定義式は明示せず, maxima で (1) を計算して K_FT Cindy で作成した図 7~9 などを挿入した. $x = \pm\pi$ を含め不連続な点においては $f(x)$ の右極限と左極限の平均値である緑点に収束することや, その近くでは収束が遅いことが確認できる. maxima のような CAS を用いれば, $f(x)$ が初等関数であれば Fourier 積分 (1) が (原始関数が求まらない場合は数値だけでも) 計算でき, 図 7~9 のような図を作成して, Fourier 級数の収束性だけでなく不連続点における Gibbs 現象や近傍における収束の遅さを実感させた.

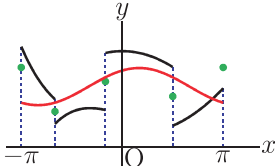


図 7

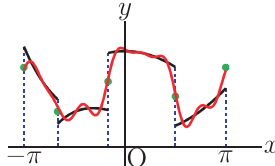


図 8

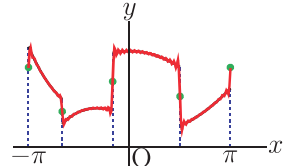


図 9

3 Fourier 変換の反転公式

Fourier 変換は実数全体で定義された関数に対する積分変換で、似たような Fourier 逆変換との合成で元の関数に戻る反転公式が成り立つ。実際の証明は滑らかで急減少な関数に対して Fubini の定理と Gauss 積分により反転公式とユニタリ性を証明して、 L^2 空間において滑らかで急減少な関数の集合が稠密であることにより L^2 関数に対する Fourier 変換を定める。このように Riemann 積分が適用できるような扱いやすい関数で議論をした上で稠密性により関数空間全体に拡張する論法は数学研究者が頻繁に利用するが、非数学専攻の学生にはとても紹介できない。直感的で厳密性に欠けるが、以下のように有限区間上の関数に対する Fourier 級数の区間を実数全体に広げたときの極限が Fourier 変換であるとの認識の下で反転公式を導いた。

$R > 0$ として $f\left(\frac{R}{\pi}t\right)$ を Fourier 展開すると (4) により Fourier 係数は

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{R}{\pi}t\right) e^{-int} dt \quad (12)$$

で求め、 $[-\pi, \pi]$ における $f\left(\frac{R}{\pi}t\right)$ の Fourier 級数は (3) より

$$f\left(\frac{R}{\pi}t\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

で表せるが、元の変数 x に戻せば $[-R, R]$ において

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/R} \quad (13)$$

つまり R によって Fourier 級数の区間の幅を変えることができる。(12) において $t = \frac{\pi}{R}x$ で置換積分すれば

$$c_n = \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(x) e^{-in\pi x/R} dx. \quad (14)$$

(14) の右辺を (13) の c_n に代入すれば $[-R, R]$ において

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\pi x/R}}{2R} \int_{-R}^R f(x) e^{-in\pi x/R} dx.$$

R を大きくしても右辺は変わらないので $R \rightarrow \infty$ の極限值にしてもよいが、 R を同時に発散させるのではなく、議論に厳密さが欠けるが、先に積分区間を $[-R, R]$ から実数全体の $-\infty < x < \infty$ にしてから残りの R を ∞ に発散させると

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\pi x/R}}{2R} \int_{-R}^R f(x) e^{-in\pi x/R} dx$$

の極限は $f(x)$ であることが期待される。ここで、Fourier 変換 \mathcal{F} は

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

で定義される. \mathcal{F} を用いると $R \rightarrow \infty$ のとき

$$f(x) \leftarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{R} e^{in\pi x/R} \mathcal{F}(f) \left(\frac{n\pi}{R} \right) \quad (15)$$

を得るが, Fourier 級数の収束を認めるだけでなく, 同じ変数 R を別々に発散させており理論的裏付けをしないまま極限值は変わらないとする. (15) の右辺は R を発散させるだけでなく無限級数の和になっているが

$$G(\xi) = e^{ix\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)$$

とすれば

$$f(x) \leftarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{R} G \left(\frac{n\pi}{R} \right) \quad (16)$$

になる. M を自然数として, 右辺の級数を $n = -M + 1$ から $n = M$ までの和にして, $M \rightarrow \infty$ の極限值とみる. このとき

$$-\frac{M\pi}{R} \leq \frac{n\pi}{R} \leq \frac{M\pi}{R}$$

になるので

$$S(M, R) = \sum_{n=-M+1}^M \frac{\pi}{R} G \left(\frac{n\pi}{R} \right)$$

は横の長さが $\frac{\pi}{R}$ で縦の長さが $G \left(\frac{n\pi}{R} \right)$ の長方形を $2M$ 個並べた図形の面積である. ここで, 図10は $M = 2$ のときの図で青い領域の面積が $S(M, R)$ である. (16) は M を先に発散させてから R を発散させると $f(x)$ に収束することを意味するが, 発散の仕方を変えて $\frac{M\pi}{R} \rightarrow \infty$ になるように M と R を同時に発散させると図11のように変化し, $S(M, R)$ は図12の面積に収束するようになる. つまり $S(M, R)$ は積分区間を実数全体とした $G(\xi)$ の広義積分に収束することがわかる. スライドには図10~12の他に中間状態の図も追加して収束の様子をアニメーション化した.

関数 $g(\xi)$ に対して

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

により Fourier 逆変換 \mathcal{F}^{-1} を定義すれば, 図12の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x) \end{aligned}$$

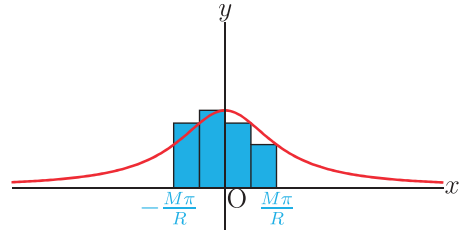


図10

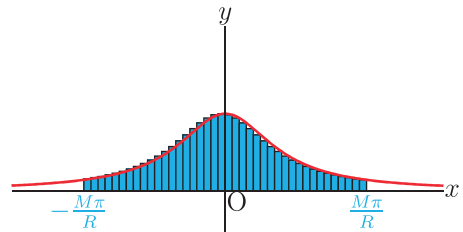


図11

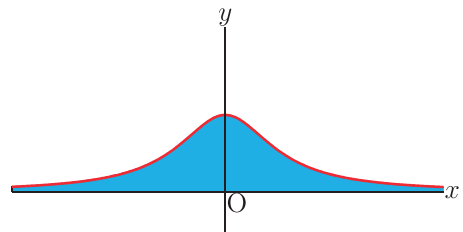


図12

となり (16) により $f(x)$ に等しいこと、つまり Fourier 変換と Fourier 逆変換に関する反転公式が期待される。このあと $f(x)$ が区分的に滑らかで $|f(x)|$ の実数全体での広義積分は有限である条件下で (8) のような部分積分を用いて、不連続点における Gibbs 現象を含めた反転公式が成り立つことを証明した。

図 11 から図 12 への移行は定積分の区分求積法のように短冊が細くなっていくだけでなく区間が広がっていく。短冊の幅の逆数よりも短冊の個数の増大度が高いことが必要であるが、 M と R の発散の仕方によらず極限值が定まることを認めれば、反転公式の導出過程が感覚的に理解しやすくなる。

4 準線形 1 階偏微分方程式と特性曲線

偏微分方程式の授業では、非線形を含めた 1 階偏微分方程式、及び 2 階線形である Laplace 方程式、熱方程式、波動方程式の解法を扱った。解が 2 変数関数であれば解のグラフは曲面であり図示が可能だが、KPTCindy による曲面図の作成に慣れてなく、その代わりに Matlab で多くの PNG ファイルを作成しオンライン教材の PowerPoint にデータのまま挿入した。1 階偏微分方程式に関しては 2 変数に限定して、以下の準線形の解法から説明した。

$$P(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = R(x, y, u). \quad (17)$$

この方程式は $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ に関して線形 (1 次式) であることが特徴である。

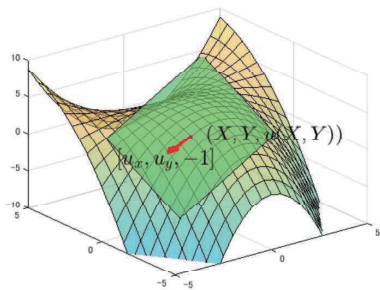


図 13

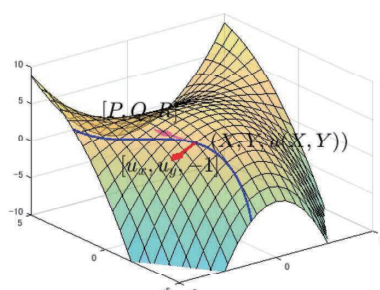


図 14

(17) の解 $u(x, y)$ のグラフは座標が (x, y, u) の 3 次元空間のなかの曲面 $z = u(x, y)$ であり解曲面と呼ぶ (図 13, 14 の網掛けの曲面)。解曲面上の点の xy 座標を (X, Y) とすれば、解曲面上の点の座標は $(X, Y, u(X, Y))$ になり、それを接点とする接平面 (図 13 の緑色の平面) の方程式は

$$z = u_x(X, Y)(x - X) + u_y(X, Y)(y - Y) + u(X, Y)$$

であり 3 次元ベクトル $[u_x(X, Y), u_y(X, Y), -1]$ に垂直である。また (17) の P, Q, R に対して

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \quad (18)$$

を満たし、解曲面 $z = u(x, y)$ 上の点 $(X, Y, u(X, Y))$ を通る曲線 $(x(t), y(t), z(t))$ は $X = x(t_0)$, $Y = y(t_0)$ とすれば $z(t_0) = u(x(t_0), y(t_0))$ をみたし (17) より

$$\frac{d}{dt}(z(t) - u(x(t), y(t))) = \frac{dz}{dt} - u_x \frac{dx}{dt} - u_y \frac{dy}{dt} = R - u_x P - u_y Q = 0$$

になるので曲線上では常に $z = u(x, y)$ であり、曲線 $(x(t), y(t), z(t))$ は解曲面上にある。(18) で定まる曲線を特性曲線 (図 14 の青い曲線) と呼ぶが、特性曲線の接線は 3 次元ベクトル $[P, Q, R]$ に平行であるので、解曲面に限らず特性曲線を含む曲面の接平面は特性曲線上の点において $[P, Q, R]$ に平行である。特に曲面が関数 $u(x, y)$ のグラフであれば、特性曲線の接ベクトル $[P, Q, R]$ と曲面の法線ベクトル $[u_x(X, Y), u_y(X, Y), -1]$ の内積が 0 になるので特性曲線上の点で (17) が成り立つ。したがって

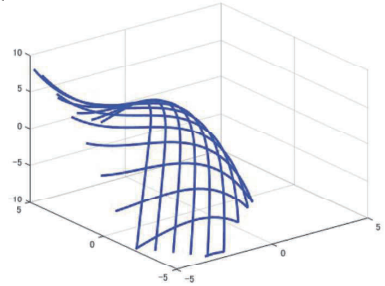


図 15

図 15 のように特性曲線を集めて関数 u のグラフになるように曲面を形成すると、曲面上の全ての点で P, Q, R と u_x, u_y は (17) を満たすので、 u は (17) の解であり、特性曲線を集めて形成された曲面は解曲面である。つまり特性曲線は解曲面の構成要素であることがわかる。曲面が滑らかであれば特性曲線の集め方に制約はないが、初期条件を課すと集め方が決まるので初期値問題の可解性が理解できる。

このあと、準線形でない 1 階偏微分方程式の解法に進むが、解 u 及び解の 1 階導関数 u_x, u_y を変数と見做して 1 階準線形の方程式として解く Lagrange-Charpit の方法を解説するが、元の方程式が 2 次元であれば 5 次元となり、3 次元の枠内で原理を説明する図が思いつかず、図 15 以降は 1 階偏微分方程式のための図は作成していない。1 階偏微分方程式を 2 階以上と区別しているのは幾何的な考察 (接触幾何) が適用できるからである。工学向けの偏微分方程式の書物 (例えば [6]) で Lagrange-Charpit の方法を説明している。実例を解く時は個々の例の特徴に合わせて解いているが、解くための一般の原理は理解しにくい。接触幾何の概念 (例えば [5]) の一端でも理解させる教材が欲しいところである。

5 まとめと今後の課題

2020 年度はコロナ感染により遠隔授業になり、これ以上続けられれば業務負担により生命に関わる事態になったかもしれないほど教材作りに時間が費やされた。オンライン教材は板書をイメージしたスライドショーと数式の羅列だけにならないように曲線や曲面の図のアニメーションも一体化した PowerPoint である。それでも工科系の大学院生にとって難しいかたのではないかと思ったが、応用解析学や偏微分方程式に関する担当科目の履修者のうち半数近い 8 人が授業アンケートに回答したが理解度については 1 人だけ理解できないと回答したが、2 人が理解でき、5 人はやや理解できたと回答した。2021 年度は、教室内の人数を制限するなどの感染対策をして対面授業を再開したが、科目によっては担当者の判断で授業形態を遠隔で選べたので、報告者はオンライン教材で繰り

返し学習する方が学生にとって授業内容が理解できると判断して、大学院科目だけ遠隔授業にした。授業準備のために2020年度に作成したスライドを見直し、必要があれば修正した。またメールだけでなく授業時間中にGoogleMeetやZoomを用い、リアルタイムで質疑応答ができるようにしたり、視聴するだけで日頃の学習を怠らないように小テストを用意して、視聴後に手書きの解答の画像ファイルを提出させた。授業アンケートに関しては前期の応用解析学に関する科目だけだが、理解できる、やや理解できる、あまり理解できないが各2人ずつであった。

報告者は大学で数学の講義を担当して30年以上経つが、入職後に教室にノートPCが接続できるAV機器やスクリーンが備え付けられたので、それらを活用するためのコンテンツとしてMathematicaや $\text{K}\epsilon\text{T}\mu\text{c}$ などで多数の図を作成し、Riemann和が定積分だけでなく微分積分の教科書に挿入されていないような3次元空間の立体図も作成して重積分に収束する様子などをアニメーションとして学生に披露してきた([1]~[4])。このようにPCの発達により精緻な3次元空間の曲面図まで自前で作成できるようになったが、教材としての活用の効果は多様である。本報告に関してはFourier積分を計算すると元の関数に収束するFourier級数が得られることが図1~9を挿入することでわかりやすくなり、収束性の証明への興味に繋がる。また定理の陳述で表現されていない不連続点に近傍での収束の遅さが実感でき、数値計算などへの応用に必要な知見を得る。Fourier級数の区間の拡張としてFourier変換を捉えると広義積分と無限級数が混在してしまい、複数のパラメータを調整しながら発散させて極限操作をしたが、(16)の右辺は積分区間を広げた区分求積法であることは図10~12を挿入しないとわかりにくい。1階偏微分方程式の特性曲線については解曲面の構成要素であることが明白になり、報告者は図15などを作成して初めて自覚した。ところが、このような作成者の意図や見解までスライドで表現すると冗長になるので、スライドに添付した音声を通して口頭で説明する程度に留めた。

オンライン教材に対する学生の感想については残念ながら授業アンケートから汲み取れず、ZoomのURLを教えて質問を待ってもなかなか来ない。スライドを視聴させ小テストの問題を解かせるだけでなく、輪講のように学生に予習させ発表させるのは一つの方法であるが、数学専攻でない大学院生であれば数学でない専門分野の研究を最優先にしないでならず、選択科目なので受講負担が過度になれば履修者がいなくなる恐れがある。数学者以外の研究者が微分積分や線形代数だけでなく厳密な理論で裏付けられたより高度な数学をツールとして専門分野で活用できるようになることが担当科目の目標であり、数学研究の活性化にも繋がり必要性の根拠になる¹。数学専攻でない学生への数学教育は専門分野の学習・研究とのバランスを謀らなければならないが、オンライン化は受講する時間や場所をある程度自由に設定でき理解できるまで繰り返し学習できる利点がある。スライドなどのオンライン教材開発は始まったばかりで、今後も試行錯誤しながら改良していかなければならないが、教材を作成するだけでなく如何にして受講した学生から質問・意見・感想などをフィードバックさせるかが最大の問題である。

¹まだ少ないが、非実用的であるとの間違った認識で数学を専攻する学科を廃止した事例がある([7])。現在は大学制度が変わり理事会・法人の権限が強まり教学まで決めてしまうこともありうる。

6 謝辞

金子真隆先生と野田健夫先生により今回の研究集会での発表を認めて頂きました。また研究集会中に大島利雄先生より Fourier 級数に関する授業資料の PDF ファイルや [5] に関するコメントを頂きました。この場を借りて感謝の意を表します。

参考文献

- [1] 長谷川研二, 重積分の定義と公式の理解を促す教材の作成, 数学教育学会 2017 年度秋季例会予稿集, pp. 131–133.
- [2] 長谷川研二, $K_E\Gamma\text{pic}$ によるベクトル解析の教材の作成, 数理解析研究所講究録, **2022**, (2017), pp.65–71.
- [3] 長谷川研二, $K_E\Gamma\text{pic}$ による数学教材の作成, 数理解析研究所講究録, **1978**, (2015), pp.140–149.
- [4] 長谷川研二, コンピュータグラフィックによる数学系科目の授業方法, 工学院大学教職課程学芸員課程年報, **16**, (2014), pp.12–17.
- [5] 大島利雄・小松彦三郎, 1階偏微分方程式, 岩波書店, (1977).
- [6] 佐野理, 偏微分方程式, 丸善出版, (2015).
- [7] 森田康夫, 横浜市立大学の改組について, 数学通信,**9-2**, 日本数学会,(2004),pp.88.