（ 続紙 １ ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	石本　宙
論文題目	Proofs of Ibukiyama's conjectures on Siegel modular forms of half-integral weight and of degree 2 （重さ半整数の２次ジーゲル保型形式についての伊吹山予想の証明）		

（論文内容の要旨）

本論文では重さ半整数の２次ジーゲル保型形式を考察し、それらと重さ整数の２次ジーゲル保型形式の間の対応を与えた。すなわち、志村対応の２次ジーゲル保型形式への一般化である伊吹山予想の証明を与えた。

$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ を整数を係数に持つ階数２のシンプレクティック群とする。整数 $a, b \geq 0$ に対し、$S_{a,b}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$ で重さ $\det^a \mathrm{Sym}^b$, レベル $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ の２次ジーゲルカスプ形式全体のベクトル空間を表す。また $a \geq 0$ が半整数（すなわち $\frac{1}{2}\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$ の元）のときも、$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(4)$ を

$$\Gamma_0(4) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \middle| \, C \equiv 0 \bmod 4 \right\}$$

で定め、χ を $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ の非自明な指標とすると、重さ $\det^a \mathrm{Sym}^b$, レベル $\Gamma_0(4)$ の指標付き２次ジーゲルカスプ形式全体のベクトル空間 $S_{a,b}(\Gamma_0(4), \chi)$ が定まる。このとき、任意の整数 $k \geq 3$ と偶数 $j \geq 0$ に対し、本論文では L 関数を保つ同型

$$S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4), \chi) \cong S_{j+3,2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$$

が存在することを示した。ただし左辺は Kohnen プラス空間と呼ばれ、添字 $+$ はフーリエ係数にある種の条件を課していることを表す。

また指標なし２次ジーゲルカスプ形式全体のベクトル空間 $S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ に対しても同様の同型が与えられたが、以下の修正が必要である。まず、整数 $k \geq 0$ と偶数 $j \geq 0$ に対し、ある種の L 関数の間の関係をみたす単射

$$S_{2k-4}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \otimes S_{2k+2j-2}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) \to S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$$

が存在する。ただし整数 $m \geq 0$ に対し、$S_m(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ で重さ m, レベル $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の１変数カスプ形式全体のベクトル空間を表す。この写像の像の直交補空間を $S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4))$ とする。このとき、任意の整数 $k \geq 3$ と偶数 $j \geq 0$ に対し、本論文では L 関数を保つ同型

$$S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0(4)) \cong S_{j+3,2k-6}(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}))$$

が存在することを示した。

以上が本論文の主要結果である。

（続紙 2 ）

（論文審査の結果の要旨）

本論文では重さ半整数の２次ジーゲル保型形式を考察し、それらと重さ整数の２次ジーゲル保型形式の間の対応を与えた。すなわち、志村対応の２次ジーゲル保型形式への一般化である伊吹山予想の証明を与えた。

重さ半整数の１変数保型形式に対し、志村はそれらが重さ整数の１変数保型形式と対応することを発見した。これは現在では志村対応と呼ばれ、その一般化は重さ半整数の保型形式の研究において中心となる問題である。伊吹山は２次ジーゲル保型形式に対して志村対応の一般化を考え、数値実験をもとにして予想を定式化した。この伊吹山予想の証明が、本論文の主要結果である。

本論文における伊吹山予想の証明は、メタプレクティック群の保型表現の理論に基づく。重さ半整数のジーゲル保型形式は、メタプレクティック群の保型表現と対応するため、伊吹山予想は保型表現を使って再定式化することができる。一方で、メタプレクティック群の保型表現の分類は Gan・市野により研究が進んでいる。特に、階数２のメタプレクティック群の保型表現は完全に分類され、その重複度公式も知られている。一方で、重さ整数の２次ジーゲル保型形式は、偶然同型により階数２の奇数次分裂特殊直交群の保型表現と対応する。この保型表現も Arthur により（より一般的な文脈で）完全に分類され、その重複度公式も知られている。本論文ではこれらふたつの重複度公式を比較することで、伊吹山予想が従うことを証明した。

この証明において一番難しい部分は、重さ半整数のジーゲル保型形式とメタプレクティック群の保型形式の対応を正確に記述する部分である。すなわち重さ整数の場合と異なり、重さ半整数の場合は２が悪い素点となり、保型表現からジーゲル保型形式を定めることが非自明になる。つまり保型表現が２で分岐するため、表現から標準的なベクトルを取り出す操作は一般には知られておらず、１変数の場合を多変数に拡張することも複雑になりすぎて現実的ではない。本論文ではヤコビ形式を経由することで２を良い素点とみなし、この困難を回避することに成功した。そのためにはヤコビ群の局所表現の理論を発展させる必要があり、その記述も本論文で与えている。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について令和 3 年 12 月 20 日に試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公開可能日：　　　年　　　月