（ 続紙 １ ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	伊藤　望
論文題目	On branching laws of Speh representations （Speh 表現の分岐則について）		

（論文内容の要旨）

本論文では p 進体上定義された一般線形群に対し、その Speh 表現をブロック対角部分群に制限したときの分岐則を考察した。そのために局所ゼータ積分を導入し、さらに局所 L 因子との関係を考察した。

F を標数 0 の p 進体、π を $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約生成的ユニタリ表現とする。$\mathrm{Sp}(\pi, n)$ を π から定まる $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ の Speh 表現とし、そのブロック対角部分群 $\mathrm{GL}_{n_1}(F)\times\mathrm{GL}_{n_2}(F)$ $(n_1+n_2 = 2n, n_1 \leq n_2)$ への制限を考える。すなわち $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の既約表現 τ_i $(i = 1, 2)$ に対し、Hom 空間

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_{n_1}(F)\times\mathrm{GL}_{n_2}(F)}(\mathrm{Sp}(\pi, n), \tau_1 \boxtimes \tau_2)$$

が考察の対象である。本論文では、この Hom 空間が $\tau_2 = \tau_1^\vee\chi_{\tau_1} \times \mathrm{Sp}(\pi, m)$ ならば消えないことを示した。（ただし、$\tau_1^\vee$ は τ_1 の反傾表現、χ_{τ_1} は τ_1 の中心指標、$\times$ は放物型誘導、$m = (n_2 - n_1)/2$ である。）また $n_1 = n_2$ で τ_1 が超カスプ的ならば、上の Hom 空間の次元は 1 以下であり、$\tau_2 = \tau_1^\vee\chi_{\tau_1}$ でなければ消えることも示した。

この結果は $n_1 = n_2$ の場合が本質的であり、その証明のために本論文では局所ゼータ積分

$$Z(s, W, f) = \int_{\mathrm{GL}_{n_1}(F)} W(g)f(g)|\det g|^{s-\frac{1}{2}}\, dg$$

を導入した。ただし s は複素パラメータ、W は $\mathrm{Sp}(\pi, n)$ の Shalika 模型の $\mathrm{GL}_{n_1}(F)$ への制限、f は $\tau_1^\vee$ の行列係数である。このとき、$Z(s, W, f)$ がある右半平面で絶対収束し、全複素平面に解析接続され、局所関数等式をみたすなど、様々な解析的性質が示された。さらに $Z(s, W, f)$ が生成する分数イデアルが、Jacquet–Piatetski-Shapiro–Shalika による局所 Rankin–Selberg L 因子

$$L(s, \pi \times \tau_1^\vee)$$

に等しいことが証明された。特に、上の Hom 空間の非自明な元は、局所ゼータ積分

$$\frac{Z(s, W, f)}{L(s, \pi \times \tau_1^\vee)}$$

の $s = \frac{1}{2}$ での値により実現することができる。

以上が本論文の主要結果である。

（続紙 2）

（論文審査の結果の要旨）

本論文では p 進体上定義された一般線形群に対し、その Speh 表現をブロック対角部分群に制限したときの分岐則を考察した。この表現の分岐則は、宮脇リフトとよばれる保型形式のリフティングの研究において、自然に生じる問題である。ここで宮脇リフト（のユニタリ群の場合）とは、ユニタリ群 $\mathrm{U}(n,n)$ 上の池田リフト ϕ を埋め込み $i : \mathrm{U}(n_1) \times \mathrm{U}(n_2) \to \mathrm{U}(n,n)$ $(n_1 + n_2 = 2n)$ により制限し、$\mathrm{U}(n_1)$ 上の保型形式 f との周期積分

$$\mathcal{M}_{\phi,f}(g_2) = \int_{[\mathrm{U}(n_1)]} \phi(i(g_1, g_2)) f(g_1)\, dg_1$$

をとることで定まる $\mathrm{U}(n_2)$ 上の保型形式のことである。宮脇リフト $\mathcal{M}_{\phi,f}$ に対し、非消滅性や具体的記述など多くのことが予想として残されているが、写像

$$(\phi, f) \mapsto \mathcal{M}_{\phi,f}$$

を考え、その局所成分を調べることが理解への足掛かりとなる。この写像から自然に生じる表現の分岐則は、不分岐表現に対してはおおむね理解されているものの、分岐する表現に対してはあまり研究がなされていなかった。本論文で扱われた Speh 表現の分岐則は、ユニタリ群が分裂するような有限素点の場合に対応する。特に、当該 Hom 空間の記述によって宮脇リフトの理解が一歩前進した。

本論文で導入された局所ゼータ積分は、Lapid–Mao による Speh 表現の局所 Rankin–Selberg ゼータ積分を参考にして構成されたものである。一方、Ginzburg と Kaplan は各々独立により一般的な局所ゼータ積分を導入し、絶対収束、解析接続や局所関数等式など様々な解析的性質を証明しており、この部分に関し本論文の結果は先行研究に含まれる。しかし、これらの一般的な文脈では局所ゼータ積分が生成する分数イデアルが、局所 Rankin–Selberg L 因子と一致することが証明されていない。実際に、Lapid–Mao の結果を含め、Speh 表現を含む局所ゼータ積分に対してこのような L 因子との一致を示すことに成功したのは、（不分岐表現の場合を除き）本論文が初めてである。証明は Lapid–Mao による模型の変換公式を使い、Shalika 模型を Zelevinsky 模型に変換することで行われた。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について令和 4 年 1 月 24 日に試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公開可能日：　　　年　　　月