（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	王　鵬皓
論文題目	Pattern Formation and Dynamics of Localized Spots of a Reaction-diffusion System on the Surface of a Torus （トーラス面上の反応拡散系の局所スポットのパターン形成とダイナミクス）		

（論文内容の要旨）

反応拡散方程式は化学反応，物理現象や生命現象などででしばしば現れる様々な空間的に局在化したバターンとそのダイナミクスを記述するモデル方程式の一つである．この方程式は非線型項を持つ放物型の偏微分方程式であり，対象となる現象に応じて様々な非線型項を付け加えて研究を行うが，その非線型項の形に応じて Brusselator モデルや Schanakenberg モデルなどといった名前がつけられている．これまでの研究では，一様定常解が不安定化して局在化したパターン解へ自己組織的に遷移するチューリング不安定性の研究と合わせて，非線型項が局在パターン解の形成やその相互作用を研究するために平面や二重周期境界条件といった簡単な場の上で考えてその数理解析や数値解析が行われ多くの研究成果が得られている．一方で，魚類や動物の皮膚に現れる模様などのスポットパターン形成を考える場合，方程式を考える場が曲面上となるため，次の研究ステップとして反応拡散系方程式を多様体の上で考え，その時に自己組織的な局在スポットパターンが形成され，それらのスポット解がどのように相互作用するのかといったことを曲面を特徴付ける幾何学的構造と合わせて研究することが必要になる．王氏による博士論文はこうした問題意識にたって行われた理論研究である．

反応拡散系方程式における局在化したスポットの運動を調べるための手法として漸近展開の方法ある．この方法は平面上の様々な反応拡散系モデルの数理解析でよく用いられているが，まずはじめに N 個の局在化したスポット解が存在していると仮定した上で，そのスポット解の中心位置の ϵ 近傍での漸近展開を行い解（内部解とよぶ）を構成し，次にこの局在スポットをデルタ関数と見なして ϵ より十分離れた部分で解（外部解）を構成して，これらの内部解と外部解が $O(\epsilon)$ でうまく適合するように境界条件を調整することでスポット解の近似解の具体的表示を得るという手法である．この方法は平面にとどまらず最も簡単な多様体 (閉曲面) である球面上での Brusselator モデルにも適用され，局在スポットの存在や安定性を調べることを可能にしている．本博士論文は，球面よりも複雑な幾何学的特徴をもつトーラス面の上における，ある広いクラスの非線型項を持った反応拡散系方程式を考え，そこに現れる局在スポットの定常解の存在を数学の定理として示し，さらにその安定性についてはこのクラスの非線型項を持つ代表的な例である Brusselator モデルに対する曲面上の有限要素法（Surface Finite Element）を用いた直接数値解析を用いることで調べたものである．トーラス面は曲率が場所によって変化することやハンドル構造を持つなど，一定曲率の球面とは異なる幾何学的特徴を有する

（ 続紙 2 ）

（論文審査の結果の要旨）

ため，こうした曲面構造がスポット解のダイナミクスに及ぼす影響を調べることが主目的である．これらの幾何学的な特徴はすべてトーラスの大半径 R と小半径 r のアスペクト比 $\alpha = R/r$ によって特徴づけられるので，α の変化とともにスポットのダイナミクスを調べることになる．

本論文の構成と結果の概要は以下の通りである．第一章のイントロダクションに続いて，第二章で漸近展開法を用いてトーラス面上の反応拡散方程式の局在化スポット解の運動を記述する常微分方程式を求めている．この方程式は比較広い範囲の非線型項を許容するので，得られる結果は適用範囲が広い．また，方程式の導出はトーラス面上のグリーン関数の解析表示に基づくため，結果は数学的にも厳密であり従来の数値的研究が中心の曲面上の反応拡散系研究とは一線を画するものである．第三章では導出した微分方程式を使い，局所スポット定常解の存在を示している．3.1 節ではトーラスの最内側の部分と最外側の部分にある N スポットは，任意の α に対して定常解であるが示されている．続いて一点スポットの定常解の存在 (3.2 節)，二個のスポット解 (3.3 節)，N スポットがトーラスの同一緯度上にリング状に並んだ定常解 (3.4 節)，2 つの N 個のスポットのリング定常解 (3.5 節) の存在関する数学的証明が与えられ，さらに Brusselator モデルの数値計算との比較で定理の正しさを確認，その定常解の安定性やアスペクト比 α に関する分岐なども数値的に調べている．中でもある特別なアスペクト比の範囲で非自明な位置での定常解の存在定理は新しい発見である．第四章では局在スポットの長時間ダイナミクスの数値計算をまとめている．非常に多様で複雑な挙動が見られ，今後の数理的研究のテーマとなりうるも重要な結果である．第五章では球面上の Brusselator モデルの結果との比較を行い，最後の章はまとめである．補遺として漸近解析手用いたグリーン関数の漸近展開の計算 (Appendix A)，論文中に現れる定常解の存在を示すための必要条件となるなスポット強さに関する非線形方程式の数値解法 (Appendix B) および曲面上の有限要素法に関する簡単な説明 (Appendix C) を与えている．

本結果は，トーラスという非自明な幾何学構造を持った曲面上での反応拡散系方程式において非自明な局在スポット解が存在することを数学的に厳密に示した始めての結果であり，またその存在と安定性がトーラス面を特徴付けるアスペクト比 α によって明確に分類されている点で，今後の曲面上のスポットダイナミクスの研究に新しい結果を付け加えたものである．以上の理由から，本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める．また， 論文内容とそれに関連した事項について令和 3 年 12 月 7 日に試問を行っ た結果， 合格と認めた．

要旨公開可能日：　　　　年　　　月