

(続紙 1)

京都大学	博士 (理 学)	氏名	大西 智也
論文題目	Arakelov geometry over an adelic curve and dynamical systems (アデリック曲線上のアラケロフ幾何と力学系)		

(論文内容の要旨)

算術的力学系の分野で近年注目を集めている予想に川口-Silverman 予想がある. この予想は代数体上で定義された多様体とその自己射 f の生成する力学系に関する予想であり, 次の二つの量の一致を主張する. 一つ目の量は射の Neron-Severi 群への作用のスペクトル半径として定まる力学系次数 δ_f である. もう一つの量は数体上で定義された点の Weil の高さ関数 h を用いて定義される数論的な量である. 数体上で定義された点 P の自己射による軌道 $\{f^n(P)\}_{n=0}^{\infty}$ から生じる数列 $\{\max\{h(f^n(P)), 1\}^{1/n}\}_{n=0}^{\infty}$ を考える. 川口-Silverman はこの数列の極限が存在することを予想した. つまり,

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_f(P) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{h(f^n(P)), 1\}^{1/n} \\ \underline{\alpha}_f(P) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{h(f^n(P)), 1\}^{1/n} \end{cases}$$

と定めると, $\bar{\alpha}_f(P) = \underline{\alpha}_f(P)$ であることを予想した. この極限値を代数体上で定義された点の算術次数と呼び, $\alpha_f(P)$ と表す. 川口-Silverman 予想は, 代数体上で定義された点の自己射による軌道が Zariski 稠密なとき, 算術次数と力学系次数の一致を主張する. 現在, 川口-Silverman 予想は活発に研究されている.

上述のように川口-Silverman 予想は代数体上で定義された多様体と自己射から生成される力学系に関する予想であるが, 大西氏は博士論文において川口-Silverman 予想の類似を代数体とは限らない体上で定義された代数多様体と (有理的な) 自己射の成す力学系に対して拡張することを試みた. そのための枠組みとして Chen-森脇により導入された体のアデール構造を用いる. つまり, 測度空間 (Ω, \mathcal{A}) とその測度 ν , および, Ω から K の絶対値全体 M_K への写像のデータである. $\omega \in \Omega$ に対応する絶対値を $|\cdot|_{\omega}$ と表すと, 任意の $a \in K^{\times}$ に対して, 対応 $\omega \mapsto \log |a|_{\omega}$ が積分可能であり, $\int_{\Omega} \log |a|_{\omega} \nu(d\omega) = 0$ であることを要請する. この構造を用いれば, 射影空間の点 $(a_0, \dots, a_N) \in \mathbb{P}^N(K)$ に対して, その高さは

$$h(a_0, \dots, a_N) = \int_{\Omega} \log \max\{|a_0|_{\omega}, \dots, |a_N|_{\omega}\} \nu(d\omega)$$

で定まる. この構造を持つ体は, 代数体の他に, 関数体, 有理数体上有限生成な体 (算術的関数体) などがある. したがって, 任意の体上で定義された代数多様体の定義体は素体上有限生成な体まで定義体を落とせるので, 算術的観点からの研究を可能にする. 大西氏は, Northcott 性を満たすアデール構造をもつ体上で定義された射影代数多様体 X と (有理的) 自己射を与えたとき, その有理点に対して算術指

数を拡張し、その体上での川口-Silverman 予想の定式化を行った。さらに代数体の場合に知られていた川口-Silverman 予想に関する代表的結果を、アデール曲線上の多様体と自己射の生成する力学系に対して拡張した。より具体的に述べると、主に以下のことを証明した。

(1) $\bar{\alpha}_f(P) \leq \delta_f$ である。

(2) f が射の場合、以下が成り立つ。

(2.1) $\bar{\alpha}_f(P) = \underline{\alpha}_f(P)$ である。

(2.2) $\alpha_f(P)$ は代数的数である。

(2.3) 集合 $\{\alpha_f(P) \mid P \in X(\bar{K})\}$ は有限集合である。

(2.4) X のピカル数が 1 と仮定する。このとき、 $\{f^n(P)\}_{n=0}^{\infty}$ が無限集合であれば、 $\bar{\alpha}_f(P) = \delta_f$ である。

これらの結果は算術的力学系の研究者に大きなインパクトを与えるものである。

(論文審査の結果の要旨)

大西氏の博士論文の主要な結果は、従来、大域体（代数体、又は、有限体上超越次数が1の体）に限られていた算術的力学系の研究対象を算術的関数体（有理数体上有限性な体）にまで拡張したことである。算術的関数体でのディオファントス幾何の研究の潮流は、世界的にあらわれて来ている。例えば、カリフォルニア大学バークレー校の Vojta による Roth の定理の算術的関数体への拡張がある。また、S. Zhang や X. Yuan によっても種々の研究が始まっている。さらに、Chen・森脇により、アデリック構造を持つ体上のアラケロフ幾何の基礎研究も進んでおり、Hilbert-Samuel 公式（Riemann-Roch 定理の漸近版）が確立されつつある。今後、大きく発展していくと考えられている分野である。

学位論文の主結果はすべて代数体では知られているものではあるが、この新しく発展している分野を自分のものとし、算術的力学系の研究の視野を拡大したことは注目に値し、算術的力学系の研究者に大きなインパクトを与える結果であるといえる。数学ではよくあることだが、問題を拡張して捉えた方が、見通しがよくなり、問題が解決できることがある。川口・Silverman 予想もその一つである可能性もあり、今後の発展が大いに期待できる。

大西氏の博士論文は、この分野の世界的権威であるパリ大学の Huayi Chen 教授に外部審査を求めた。その評価は

「In conclusion, Tomoya Ohnishi's thesis makes advancements both in the fundament of Arakelov geometry over adelic curves and in the application of this theory to the study of arithmetic dynamical system. I strongly recommend the defense of his thesis.」

であり、高い評価であった。また、学内の審査委員の審査結果も好評価であった。さらに、論文の主要部は、学術誌に投稿中であり、掲載が決まり次第、全文の公開ができると思われる。

以上のことより、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和3年12月23日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。