（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	千原正寛
論文題目	Demazure slices of type $A_{2l}^{(2)}$ （$A_{2l}^{(2)}$型のデマジュールスライスについて）		

（論文内容の要旨）

アフィン・リー代数の表現論はアフィン・リー代数本質的に含む代数系である対称化可能カッツ・ムッディーリー代数という枠組みで1960年代に研究が始まった。その初期の結果としては可積分最高ウェイト表現と呼ばれるクラスの表現の分類及びその指標公式であるWeyl-Kac指標公式がある。特にアフィン・リー代数の場合にはWeyl-Kac指標公式はテータ関数と親和性が高く、その事実がアフィン・リー代数の可積分最高ウェイト表現の指標のモジュラー不変性を導き頂点作用素の理論の展開において重要な役割を果たしたことはよく知られている。

可積分最高ウェイト表現とは有限次元半単純リー代数の言葉では有限次元表現に対応する対象であり、それは有限次元半単純リー代数の表現論の中では最も簡単なクラスである。実際、このクラスの表現圏は(半単純リー代数の場合とアフィン・リー代数の場合のどちらでも)半単純であり、既約表現とその指標が分かれば純粋な表現圏の研究自体は完了する。

そういった中で1980年代にChariやDrinfeldはアフィン・リー代数の中でuntwistedと呼ばれるクラスに対して可積分ではあるが最高ウェイト条件を満たさないような既約表現を分類した。そのようなクラスの表現はある意味で対応する有限次元単純リー代数の表現論のループ化として現れ、その表現圏はもはや半単純ではない。したがってそのような表現圏の研究には既約表現の分類及びその指標公式を超えるような深い構造が現れる。このようなアフィン・リー代数の表現圏は実際にはアフィン・リー代数の部分リー代数として定まるカレント代数の表現圏により理解できる。

そういった中で2000年ごろChari-Pressleyによりカレント代数の局所/大域Weyl加群と呼ばれるクラスの単純加群でも射影加群でもない表現の族が導入された。そこでは大域Weyl加群はその自己同型環上自由加群であること、及び適切な特殊化により局所Weyl加群を産むことなどが予想され、Chari-Loktev, Fourier-Littlemann, 直井らにより2000年代後半に順次証明されていった。またこの局所/大域Weyl加群の族は適切な意味でExt-直交すること、及びその指標が本質的にMacdonald多項式と呼ばれる直交関数系の特殊化によって書けるということが2015年ごろChari-Ionによって証明された。さらに同じ頃にCherednik-Feiginはアフィン・リー代数の可積分最高ウェイト表現の指標と局所/大域Weyl加群の比較から1970年代のいわゆるRogers-Ramanujan恒等式のアフィン・リー代数を用いた導出を一般化するような無限和と無限積を結ぶ公式を組織的に導くことに成功した。Cherednik-Feiginの公式はさらにCherednik-加藤によってアフィン・リー代数の可積分表現が大域Weyl加群によるfiltrationを持つという加群論的な性質の反映として導かれることが示されるなど、カレント代数の表現論は現在も活発に研究されている。

さて、最初に述べたようにアフィン・リー代数は本質的にはアフィン型のカッツ・

ムッディーリー代数であり後者には分類が存在する。この分類の中で有限次元リー代数のループ化、及びそのラングランズ双対のどちらにも属さないようなものが１系列だけ存在し、$A_{2l}^{(2)}$型と呼ばれている。このケースでは部分代数としてのカレント代数の選択で自然なものがhyperspecial及びspecialと呼ばれる二種類存在することが知られていて、その片方であるspecialカレント代数に関しては上で述べたような一連の結果は知られていなかった。

本学位論文においてはこの$A_{2l}^{(2)}$型のspecialカレント代数に対する局所/大域Weyl加群と呼ぶべき加群族に対して上述した諸結果と同様に、それらの指標がMacdonald多項式のBC型類似として知られているいわゆるMacdonald-Koornwinder多項式のある特殊化がその指標を与えること、それらの族が適切な加群圏においてExt-直交性を満たすこと、さらには大域Weyl加群の自己同型環が多項式環として具体的に記述できることなどをはじめとする基本的諸性質を証明した。その証明の手法は$A_{2l}^{(2)}$型アフィン・リー代数の基本表現をカレント代数の表現と見ることにより定まるthick Demazure加群と呼ばれる部分加群の族の間の適切な商であるDemazure sliceのカレント代数の加群としての構造を詳細に解析し、そのこととホモロジー代数における精密な議論などを組み合わせることによりDemazure sliceがExt-直交性を含むような特徴づけを持つことを証明し、その特徴づけの一部分として$A_{2l}^{(2)}$型のspecialカレント代数の大域Weyl加群と呼ぶべきものが満たさなければならない性質が含まれているということ証明し、後者が既に加群を唯一に決めるということからDemazure sliceと大域Weyl加群の同一視を得るというものである。

（続紙 ２ ）

（論文審査の結果の要旨）

アフィン・リー代数と呼ばれるクラスのリー代数はカッツ・ムッディーリー代数の一部分であるが、有限次元リー代数を適切にループ化したと思うこともできる。ただ、その中で$A_{2l}^{(2)}$型と呼ばれる例外的な場合は若干事情が複雑でアフィン・リー代数をカッツ・ムッディーリー代数として扱う形でない場合は特別な議論が必要になることも多い。例えば、アフィン・リー代数の可積分レベル0表現論はアフィン・リー代数のカレント代数と呼ばれる部分代数の表現論と密接に関係があるが、$A_{2l}^{(2)}$型の場合にはその自然なカレント代数の選択としてhyperspecial型とspecial型の二種類が存在する。

千原氏の学位論文では$A_{2l}^{(2)}$型アフィン・リー代数の部分リー代数であるspecialカレント代数の表現論が扱われている。この代数の加群圏は半単純ではないが、単純リー代数の(可積分とは限らない)最高ウェイト表現のなす圏の構造を抽象化して得られたいわゆる最高ウェイト圏に類似した性質を持つこと、及びその良い特徴づけで定義される加群の指標がMacdonald多項式やその一般化となんらかの関係があることが$A_{2l}^{(2)}$型以外のアフィン・リー代数の可積分レベル0表現に関する先行研究との類推から示唆されていた。本論文でこれらが実際に証明されたことにより、上は単なる示唆ではなくすべての型のアフィン・リー代数の自然なカレント代数の表現論に対しての統一的な見地を与えるものとなった。そしてこのような表現論的構造は単純にカレント代数の表現論の示すパターンが他の代数系と親和性の高い自然なものであるということだけに留まらず、Feigin-Loktevによる共型場理論の解釈を加群論的に自然な形で実現するなど今後のアフィン・リー代数の表現論の発展においても重要な応用を持つことが期待される。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和４年１月１７日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降