（ 続紙 １ ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	野口　博史
論文題目	ON MULTIPLIER SYSTEMS AND THETA FUNCTIONS OF HALF-INTEGRAL WEIGHT FOR THE HILBERT MODULAR GROUP $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ （マルチプライアーシステムとヒルベルトモジュラー群SL2(o) に関する重さ半整数のテータ関数）		

（論文内容の要旨）

Dedekind のエータ関数

$$\eta(z) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{12}(n)q^{n^2/24} \qquad q = e^{2\pi\sqrt{-1}z}, \quad z \in \mathfrak{h}$$

は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $1/2$ のテータ関数で表される．ここで χ_D は判別式 D の実 Dirichlet 指標である．また，重さ $3/2$ の保型形式 $\eta(z)^3$ もテータ関数

$$\eta(z)^3 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\chi_{-4}(n)nq^{n^2/8}$$

で表される．野口氏はこれらの古典的な結果を Hilbert 保型形式に対して以下のように拡張した．

F を総実代数体とする．まず，野口氏は Hilbert モジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ が重さ半整数の multiplier system をもつためには，素点 2 が $F/\mathbb{Q}$ において完全分解することが必要十分であることを示した．以下では，F を総実代数体で素点 2 は $F/\mathbb{Q}$ は完全分解するとする．

2 の上にある F の素点の集合を S_2 で表す．F の無限素点をを $\iota_1,\ \ldots,\ \iota_n$ として，$w_1,\ldots,w_n \in \{1/2, 3/2\}$，$S_\infty = \{i \mid w_i = 3/2\}$ とおく．T_3 を F の素点で剰余体の位数が 3 であるもの全体の集合とする．$F_+^\times$ を F の総正な元全体のなす乗法群とする．

$\mathfrak{d}$ を F の共役差積，Cl^+ を F の狭義イデアル類群，$\mathrm{Cl}^{+2} = \{\mathfrak{c}^2 \mid \mathfrak{c} \in \mathrm{Cl}^+\}$ とする．また，

$$H = \left\{\prod_{v\in T_3}\mathfrak{p}_v^{e_v} \mid \sum_{v\in T_3}e_v \in 2\mathbb{Z}\right\}$$

とおく．さらに Cl^+ の部分群 H に対して，H の $\mathrm{Cl}^+/\mathrm{Cl}^{+2}$ における像を $\bar{H}$ で表し，$\mathfrak{b} \in \mathrm{Cl}^+$ に対して $\mathfrak{b}$ の $\mathrm{Cl}^+/\mathrm{Cl}^{+2}$ における像を $[\mathfrak{b}]$ で表す．

$F_+^\times$ の元 β，T_3 の部分集合 S_3 と F の分数イデアル $\mathfrak{a}$ からなる三つ組 $(\beta, T_3, \mathfrak{a})$ で，

$$|S_2| + |S_3| + |S_\infty| \in 2\mathbb{Z}, \qquad (8\beta)\mathfrak{d}\prod_{v\in S_3}\mathfrak{p}_v = \mathfrak{a}^2,$$

を満たすものの集合を $\mathbf{G}$ とする．また，$\mathbf{G}$ の元 $(\beta, S_3, \mathfrak{a})$，$(\beta', S_3', \mathfrak{a}')$ の間に同値関係 $\sim$ をに次のように定義する．

$$(\beta, S_3, \mathfrak{a}) \sim (\beta', S_3', \mathfrak{a}') \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} S_3 = S_3',\ \beta' = \gamma^2\beta,\ \mathfrak{a}' = \gamma\mathfrak{a} \text{ を満たす } \gamma \in F^\times \text{が存在する}$$

このとき，野口氏の得た結果は次のようなものである．

（論文審査の結果の要旨）

定理 1. $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ に関する重さ $\{w_1,\ldots,w_n\}$ をもつテータ関数が存在するためには $\mathbf{G}\neq\emptyset$ であることが必要十分である.

定理 2. $\mathbf{G}\neq\emptyset$ であるためには次の条件 (1) または (2) が成り立つことが必要十分である.

(1) $|S_2|+|S_\infty|$ が偶数で $[\mathfrak{d}]\in\bar{H}$.

(2) $|S_2|+|S_\infty|$ が奇数で，$[\mathfrak{d}\mathfrak{p}_{v_0}]\in\bar{H}$ を満たす $v_0\in T_3$ が存在する.

$(\beta,S_3,\mathfrak{a})\in\mathbf{G}$ とする．同値な元で取り換えておくことにより，$v\in S_2\cup S_3$ に対して $\mathrm{ord}_v\mathfrak{a}=0$ であるとしてよい．このとき，$v\in S_2\cup S_3$ に対して

$$f_v(x)=\begin{cases}1 & x\in 1+2\mathfrak{p}_v\\ -1 & x\in -1+2\mathfrak{p}_v\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}\qquad (x\in F_v)$$

と定義する．また，有限アデール環 $\mathbb{A}_f$ 上の関数 f, $\mathbb{R}$ 上の関数 $f_{\infty,i}$ $(i=1,\ldots,n)$ を

$$f=\prod_{v\in S_2\cup S_3}f_v\times\prod_{v<\infty,v\notin S_2\cup S_3}\mathrm{ch}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{o}_v,$$
$$f_{\infty,i}(x)=x^{w_i-(1/2)}e(\sqrt{-1}\iota_i(\beta)x^2)\qquad x\in\mathbb{R}$$

と定め，$\phi=f\times\prod_{i=1}^n f_{\infty,i}$ と定義する．$\iota_f:F\to\mathbb{A}_f$ を有限アデールへの埋め込みとする．また，無限素点 ∞_i に対応する埋め込みを $\iota_i:F\to\mathbb{R}$ とする.

定理 3. テータ関数 $\theta_\phi:\mathfrak{h}^n\to\mathbb{C}$ を

$$\theta_\phi(z)=\sum_{\xi\in\mathfrak{a}^{-1}}f(\iota_f(\xi))\prod_{\infty_i\in S_\infty}\iota_i(\xi)\prod_{i=1}^n e(z_i\iota_i(\beta\xi^2))\qquad z=(z_1,\cdots,z_n)\in\mathfrak{h}^n$$

により定義する．このとき，$\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ に関する θ_ϕ は重さ $\{w_1,\ldots,w_n\}$ の Hilbert 保型形式である．また，$\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ に関する θ_ϕ は重さ $\{w_1,\ldots,w_n\}$ のテータ関数はこのようにして得られる.

野口氏の主要論文は半整数の重さを持つ Hilbert 保型形式について新たな知見を加えるものであり、今後の発展も見込まれる。以上のような理由から本論文は、博士（理学）の学位論文として十分なものであると判断した。また，論文内容とそれに関連した事項について令和 4 年 1 月 24 日に試問を行った結果, 全調査委員の一致で合格と認めた.

要旨公開可能日：　　　　年　　　月