(続紙 1)

京都大学	博 士 (理 学)	氏名	見上達哉
論文題目	Percolation on crystal lattices and covering monotonicity of percolation clusters （結晶格子上のパーコレーションモデルとクラスターに関する被覆単調性）		

（論文内容の要旨）

本学位論文では確率論の主要な研究対象の一つであるパーコレーションを，正方格子などの通常の設定から一般の結晶格子上に拡張し，そこで成り立つ幾つかの性質を明らかにしている．数学的な内容の一つ目は論文目録の主論文に該当する内容であり，ここでは結晶格子上の最速浸透モデルにおける極限図形の存在とその被覆単調性について論じている．こちらは学位論文の３章に該当する．二つ目の内容は，一つ目の主結果で得られた結晶格子の部分被覆に関する議論を，通常のボンドパーコレーションの設定で議論したものになっており，学位論文の４章にまとめられている．なお１章では研究テーマの背景や関連する既存の結果，および本研究の主結果を説明している．また２章は３，４章で用いる数学概念や道具の説明を行なっている．

まず背景としてパーコレーションの問題では，無限グラフの各辺を独立に確率pで開き，それらの開いた辺からなる連結成分の様子を調べる問題がよく扱われる．この設定はボンドパーコレーションと呼ばれ，ここに現れる連結成分はクラスターと呼ばれる．例えば各辺に割り振る確率pに対して臨界値p_cが存在することが知られており，その臨界確率よりpが小さい場合は全てのクラスターが有限になる確率が１となり，逆に臨界確率より大きい場合は無限サイズのクラスターが現れる確率が１になる．

よく調べられているパーコレーションのモデルはd次元正方格子の場合である．特に平面（$d=2$）の正方格子ではその臨界確率が1/2になることが1980年にKestenによって示されたが（式(1.4)），より高次元の場合やその他の無限グラフの場合に臨界確率を具体的に求めることは難しい問題で，あまり多くのことはわかっていない．そこで具体的に臨界確率を求めるのではなく，異なるグラフ間の相対的な関係から臨界確率の評価を得る方針が考えられる．例えば1985年にCampanino & Russoによって三角格子と三次元正方格子の臨界確率に関する不等式が与えられた．

以上が本研究で扱うパーコレーションの背景であるが，学位論文では最速浸透問題を扱っている．この問題はボンドパーコレーション問題から派生する問題の一つであり，d次元正方格子の場合に1965年にHammersley & Welshによって提案されている．これはグラフの各辺に，その辺を通過するのに必要な時間に対応する非負の確率変数を独立に与えるモデルである．ここで空間内の２点間の最短浸透時間は，その２点を結ぶ道に沿った通過時間の和の下限で与える．また原点から時刻tまでに浸透するランダムな図形$B(t)$を浸透領域と呼ぶ．このとき最速浸透問題で重要な結果の一つとして，1981年にCox & Durrettによってこのランダム図形の大数の法則に相当するshape theoremが証明された（Theorem 1.4）．

本学位論文では，これまでおもに正方格子や三角格子といった限られたグラフに対して調べられてきた最速浸透問題を，一般の結晶格子上で扱っている．この設定で３章では最速浸透問題を考察している．このとき本論文の最初の主結果としてTheorem 1.5（もしくは３節のTheorem 1.5’）が成立することが示されている．その内容は，各辺の通過時間が値0をとる確率が臨界確率より小さい場合，ある極限図形Bが存在して浸透領域$B(t)$の時間規格化がこのBに収束することを言っている．一方で，逆に臨界確率より大きい場合，時間規格化された浸透領域は幾らでも大きくなることも主張している．つまりCox & Durrettの正方格子に対するshape theoremを一般の結晶格子

に拡張することに成功した．

Theorem 1.5の証明は大きく分けて２つのステップからなる．１つ目は$\boldsymbol{R}^d$上に極限図形を記述するために使われるノルムμの存在を示すことである．このノルムの原型はProposition 3.3に与えられているような極限値として定める．この極限の存在はTheorem 3.4に示されている劣加法的エルゴード定理を適用することで示される．またこのμがノルムの性質を満たすことはProposition 3.5にまとめられておいる．なおshape theoremで現れる極限図形はこのノルムに関する単位球で与えられることになる．

次に証明の２つ目のステップでは，このμの定義にあった極限が方向によらずに一様に収束することを示すことからなり，それがProposition 3.7にまとめられている．このProposition 3.7の証明の鍵となる補題はLemma 3.8で，これはうまく$\boldsymbol{\kappa}$をとることで，原点から結晶格子の点までの浸透時間をノルムで規格化したものが，正の確率で，一様にその$\boldsymbol{\kappa}$で抑えられることを意味している．この証明の方針は，まず結晶格子をベースグラフの全域木（spanning tree）の被覆写像によるリフトの集まりで表す．この設定にし，従来の正方格子で行われていたshape theoremの証明を走らせることになる．以上がTheorem 1.5の概要である．

本論文の２つ目の主結果はTheorem 1.6で与えられる．背景でも説明したが，一般にパーコレーションの問題では臨界確率などを具体的に求めることは難しく，他の対象との幾何学的な比較などを通じて評価として絞り込んでいくことがよく行われる．この主結果では極限図形に対する比較を問題にしている．想定する問題設定は式(1.11)に表されており，これまでの周期的実現に対して部分被覆とその実現であって部分空間への直行射影と可換になる状況を考える．例えば通常の３次元正方格子に対する三角格子などはこの設定に含まれている．

Theorem 1.6の主張は，結晶格子の商をとった極限図形は元の周期的実現の極限図形を射影した図形に含まれるというものである．つまり被覆に関する単調性を主張している．この主張は従来のパーコレーションの文脈で示されていた幾つかの結果を含む，重要な意味を持つ．例えば商グラフに対する臨界確率の不等式はこの定理の系として得られる．このTheorem 1.6の証明はLemma 3.20とLemma 3.21から従う．まずLemma 3.20では，閉集合までの到達時間を式(3.30)のように定めると，その規格化した極限はその閉集合上のある点でのノルムの値に一致することを示している．この部分の証明は，基本的にはノルムの性質とTheorem 1.5から従う．一方でLemma 3.21では，商グラフの点を指定した時，原点からその全てのファイバー上の点までの到達時間がt以上なら商グラフでもt以上かかるというものである．このLemma 3.20はパーコレーションの分野で頻繁に使われるFKG不等式のアイディアを用いることで証明される．以上がTheorem 1.6の内容である．

４章ではこれまで扱ってきた最速浸透問題ではなく，結晶格子上でボンドパーコレーションを考え，そこでこれまで考察してきた被覆単調性の類似問題を考えている．具体的には，各辺を開く確率pを臨界確率より小さく取っておくことで，式（4.11）にある量が極限を持ち，これが$\boldsymbol{R}^d$のノルムになることが示される．これを最速浸透問題で扱ったノルムμとみなし，この新しいノルムに対して被覆単調性を示している．これが３つ目の主結果であるTheorem 1.8になる．

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

　以上の学位論文の内容に関して調査委員による審査が行われ，結果の新規性，正当性，重要性が認められた．特に本学位論文で得られた主結果について，数学的な内容に問題がないことが確認された．Theorem 1.5の証明では，まず極限図形を記述することになるノルムの存在を主張することから始まるが，こちらについては劣加法的エルゴード定理を用いる部分の検証も含めて問題がないことを確認できた．また，ノルムの定義に現れる極限の一様性を示す箇所では，パーコレーションの問題ならではの緻密な議論が展開されている．まさにこの箇所が，本学位論文で一般化を試みる結晶格子ならではの議論が必要になる箇所であるが，全域木のリフトの集まりとみなし従来法を適用可能にする論法は見上氏オリジナルのアイディアである． Theorem 1.6についてはLemma 3.21が鍵となっており，被覆空間と底空間のパスの相関に関する議論がその本質である．ここではFKG不等式からアイディアを得て証明を展開しており，その数学的な正当性は確認された．またTheorem 1.8についても，証明の途中で大偏差原理を用いる見上氏のアイディアのもと，正しく論理が展開されていることを確認できた．

　また，令和４年１月２１日，論文内容とそれに関連した事項について試問が行われた．調査委員からは，極限図形の中心極限定理に相当する研究について，周期的実現から誘導される計量と極限図形の対応づけについて，結晶格子を超えたさらなる拡張や派生版の最速浸透問題について，等の質問が出された．見上氏からはそれら全てに対して的確な回答が与えられ，口頭試問についても合格を与えられると判断した．

　以上より，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと判断し，結果，合格と認めた．

要旨公表可能日：　　　　　　年　　　月　　　日以降