

(続紙 1)

京都大学	博士 (理学)	氏名	村上 浩大
論文題目	PBW parametrizations and generalized preprojective algebras (PBW パラメトリゼーションと一般化前射影代数)		
(論文内容の要旨)			
<p>前射影代数とは籐から定まる道代数から構成される二次的な代数系であり、道代数の表現論の構造を反映した関係式(前射影関係式)を持っている。前射影関係式はいわゆる中島籐多様体(以下籐多様体と呼ぶ)に課されるモーメント写像から来る関係式とも見なせるため、前射影代数の枠つき表現の空間は籐多様体の構造と密接な関係を持つ。籐多様体はその(Borel-Moore)ホモロジー群及びK群に籐(を無向グラフとみなしたときそれ)に対応する型のカツ・ムディーリー代数及びその量子群の可積分最高ウェイト表現を実現し、特に幾何学的な操作によりそのような最高ウェイト表現の基底をなすようなサイクルを定めることができるといった性質を持つ表現論的に重要な多様体である。また籐が有限型Dynkin図形の向き付けで得られる場合、前射影代数の加群圏の捻れ部分圏は同じ籐から定まる単純リー代数のWeyl群の元と対応し、またその包含関係がWeyl群の弱Bruhat順序と対応することが足立-伊山-Reitenらによるτ-傾理論の帰結として示された。道代数から単純リー代数を定めようとする、ADE型と呼ばれる単純リー代数の分類の一部のみが自然に出現する。これを一般の型が扱えるように自然に拡張することは特に籐多様体の見地からは長年に渡り懸案とされてきた。</p> <p>一般化前射影代数とはGeiss-Leclerc-Schroer(以下、GLSと略記)によりこの懸案にアプローチすべく定義された籐に加えて各頂点の次数や矢印の重みを付加的なデータとして持つ前射影代数を一般化した代数系である。この付加データによりADE型とは限らない単純リー代数のデータが自然に実現され、ADE型の場合でも付加的データの取り方の自由度から通常の前射影代数を含む新しい代数系の無限列が出現するという格好になっている。ただし現状ではこの代数系の表現論を用いて籐多様体の理論全体を自然に実現することはできておらず、籐多様体を実現する量子群の可積分最高ウェイト表現の結晶基底に対応する適切なサイクルを構成しそれが柏原により導入された大域結晶基底から定まる可積分最高ウェイト表現の結晶の構造をなすことまでが証明されている。</p> <p>単純リー代数の量子群は単純リー代数の普遍包絡環の変形であり、特に単純リー代数自体を変形するような部分リー代数(やその類似物)を含むという訳ではない。このことから量子群のPoincare-Birkoff-Witt基底(PBW基底)は単純リー代数のようにリー代数の基底を用いては定義することができない。この状況下でも量子群への組紐群の作用を用いることにより単純リー代数の自然な基底に対応するような元の列を構成でき、それを用いて量子群のPBW基底と呼ぶべきものが構成できることがLusztigにより示されている。このようなPBW基底は組紐群の生成元の列に依存して決まり、一般には多数存在する。そしてADE型の場合にはそのどれもと大域結晶基底の間の変換行列</p>			

が適切な添字づけによって三角行列となり、さらにその各係数が正値になることが知られている。このうち特に三角性はPBW基底たちの間に大域結晶基底を介する形で自然な全単射を誘導する。この全単射のデータはよく見ると互いに貼り合わさる格好で多面体を成すということがBernstein-Zelevinskyより示され、さらにその多面体がアフィン・グラスマン多様体の適切なサイクルのモーメント写像による像として定まるいわゆるMirkovic-Vilonen多面体(以下MV多面体)と対応することがKamnitzerにより示された。このような対応を精密化してゆくことは籐多様体とアフィン・グラスマン多様体(の切片と)の関係がある種のミラー対称性とみなされるという観点からも大切なことと考えられている。

そのような精密化のひとつのステップとしてBaumann-Kamnitzer(-Tingley)はMV多面体を籐多様体を介する形で前射影代数の加群を用いた解釈により実現した。ただし、前射影代数を用いるという制約から彼らの結果はやはり単純リー代数としてはADE型に結果が限られてしまっていた。

本学位論文では上述のGLSによる一般化前射影代数を用いたADE型以外を含む単純リー代数の結晶構造の記述を精密化し、特にMV多面体の加群論的な記述を行った。その中で特に最初に述べたような τ 傾理論の結果(の一般化前射影代数版)を援用することにより上に挙げたようなPBW基底を与えるような組紐群の生成元の列は一般化前射影代数の加群圏における捻れ部分圏の増大列に対応すること、このような捻れ部分圏の増大列が誘導する一般化前射影代数の適切な部分加群圏の増大列から部分商を取ると特別な形の加群が生成するような単純な形の圏が出現すること、さらにMV多面体の数値的データを加群論的に明示的に記述する方法などを確立した。

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

一般化前射影代数はGeiss-Leclerc-Schroerにより2010年代に定義された。この代数はいわゆる箎に付随する前射影代数と呼ばれる1970年代から研究されてきた代数の一般化であり、ADE型に留まらない単純リー代数の表現論や一般の対称化可能カツ・ムッディーリー代数、及びその量子群や表現論と密接な関係を持つことが期待されている。このような期待はその一部が証明されているものの現時点においてはまだ前射影代数の表現論における理論の対応物に限ってもその全てが確立されているという訳ではない。ただし、一般化前射影代数の枠付き局所自由加群のなす空間の適切なサイクルのなす集合が対応する量子群の結晶基底(これは柏原の意味での大域結晶基底ではなくいわゆる半標準基底と呼ばれるもの)と見なせるということはGeiss-Leclerc-Schroer自身により示されている。

村上氏の学位論文はこの一般化前射影代数の表現論とADE型に留まらない単純リー代数及びその量子群との間の関係を深めるというものである。具体的には量子群の結晶基底と一般には数多く存在するPBW基底たちとの間の全単射を前射影代数の場合のBaumann-Kamnitzerの結果に倣い一般化前射影代数を用いて全ての単純リー代数に付随する量子群へと拡張した。さらに、Baumann-Kamnitzerによる構成を τ 傾理論を援用することにより精密化することで全単射が単になんらかの手続きによって記述できるというのには留まらず、加群圏の捻れ部分圏の増大列に対応する局所自由加群の標準的な増大フィルターの存在という形で実現できることを証明した。これはある意味でPBW基底による結晶基底の添字づけの圏化を与え、さらにそのような圏化を可能とするような添字づけはPBW基底たちから来るもの以外には存在しないことを示したことになる。従って本論文の結果は単に新しい一般化された代数系を用いて既存の代数系で得られていた結果を一般化したという以上の意味を持っていると考えられる。

よって、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、令和4年1月26日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日： 年 月 日以降