

論文内容の要約

論文題目：The reduced Dijkgraaf–Witten invariant of double twist knots in the Bloch group of \mathbb{F}_p
(Bloch 群に値をもつダブルツイスト結び目の reduced Dijkgraaf–Witten 不変量)

軽尾 浩晃

1 はじめに

この論文では, [2] で導入された有限体 \mathbb{F}_p と結び目 (補空間の) reduced Dijkgraaf–Witten 不変量の, \mathbb{F}_7 とダブルツイスト結び目という結び目の無限族に対する幾何的な計算方法を定式化し, 次の明示公式を与えた.

定理 1.1. $m = 2k$ かつ $k, n \geq 2$ とし, $m \not\equiv 6 \pmod{14}$ または $n \not\equiv 1 \pmod{6}$, かつ $m \not\equiv 8 \pmod{14}$ または $n \not\equiv 5 \pmod{6}$ を仮定する. このとき, \mathbb{F}_7 と (m, n) ダブルツイスト結び目の reduced Dijkgraaf–Witten 不変量 $\widehat{DW}(\mathcal{T}_{m,n}, \mathbb{F}_7)$ は次で与えられる.

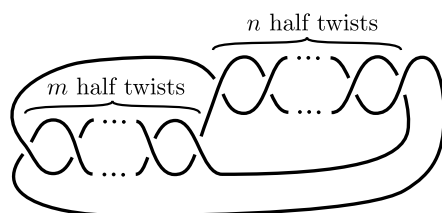
$$\widehat{DW}(\mathcal{T}_{m,n}, \mathbb{F}_7) = A_{m,n} + B_{m,n} + C_{m,n} + D_{m,n} + E_{m,n} \in \mathbb{Z}[\langle t \mid t^2 = 1 \rangle],$$

ここで, $A_{m,n}, B_{m,n}, C_{m,n}, D_{m,n}, E_{m,n}$ は以下で与えられる.

$$A_{m,n} = \begin{cases} t^{(n+5)/8} & \text{if } m \equiv 12 \pmod{14} \text{ かつ } n \equiv 3 \pmod{8}, \\ t^{(n+3)/8} & \text{if } m \equiv 4 \pmod{14} \text{ かつ } n \equiv 5 \pmod{8}, \\ t^{(n-5)/8} & \text{if } m \equiv 2 \pmod{14} \text{ かつ } n \equiv 5 \pmod{8}, \\ t^{(n-3)/8} & \text{if } m \equiv 10 \pmod{14} \text{ かつ } n \equiv 3 \pmod{8}, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$
$$B_{m,n} = \begin{cases} t^{(m+n)/8} & \text{if } m \equiv 2 \pmod{8} \text{ かつ } n \equiv 6 \pmod{8}, \\ t^{(m+n)/8} & \text{if } m \equiv 6 \pmod{8} \text{ かつ } n \equiv 2 \pmod{8}, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$
$$C_{m,n} = \begin{cases} t^{(n+10)/8} & \text{if } m \equiv 4 \pmod{6} \text{ かつ } n \equiv 6 \pmod{8}, \\ t^{(n+6)/8} & \text{if } m \equiv 2 \pmod{6} \text{ かつ } n \equiv 2 \pmod{8}, \\ t^{(n-1)/8} & \text{if } m \equiv 2 \pmod{6} \text{ かつ } n \equiv 1 \pmod{8}, \\ t^{(n+1)/8} & \text{if } m \equiv 4 \pmod{6} \text{ かつ } n \equiv 7 \pmod{8}, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$
$$D_{m,n} = \begin{cases} t^{(m+6)/8} & \text{if } m \equiv 2 \pmod{8} \text{ かつ } n \equiv 2 \pmod{6}, \\ t^{(m+10)/8} & \text{if } m \equiv 6 \pmod{8} \text{ かつ } n \equiv 4 \pmod{6}, \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$
$$E_{m,n} = \begin{cases} t & \text{if } m \equiv 2 \pmod{4} \text{ かつ } n \equiv 3 \pmod{6}, \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

ここで, reduced Dijkgraaf–Witten 不変量は W. D. Neumann [3] の複素数体 \mathbb{C} での結果の, [1] における Bloch–Wigner 写像を用いた有限体 \mathbb{F}_p へのアナロジーとして導入された不変量である.

ダブルツイスト結び目は以下で図示するように 2 つのねじれで特徴づけられる結び目の無限族であり, 上記の定理はそれぞれのねじれの回数に関して reduced Dijkgraaf–Witten 不変量 (以下, reduced DW 不変量) が周期性をもつことを意味している. 特に, その周期性は [2] でのツイスト結び目の場合よりも非常に複雑になっている.



2 各節の要約

本論文は 9 つの節と 1 つの付録から成っている. 第 1 節は導入であるため, 以下では残りの節と付録を要約する.

第 2 節では, 第 3 節で定理を述べるために, 定理に関わる Bloch 群, 結び目補空間の基本群 (以下, 結び目群) のパラボリック $SL_2\mathbb{F}_p$ 表現, reduced DW 不変量の定義を復習した. 定義から, reduced DW 不変量は結び目補空間の基本群のパラボリック $SL_2\mathbb{F}_p$ 表現の共役類を重みをつけて足し合わせた不変量であるとみなすことができる. つまり, 結び目補空間の基本群のパラボリック $SL_2\mathbb{F}_p$ 表現の共役類の個数のある種の一般化である.

第 3 節では, 有限体 \mathbb{F}_7 とダブルツイスト結び目の reduced DW 不変量の明示公式 (定理 1.1) を与えた. 特に, この公式から, reduced DW 不変量がダブルツイスト結び目のねじれの回数 m と n それぞれに関して非自明な周期性をもっていることが分かった. これは, 結び目の族であるダブルツイスト結び目の, reduced DW 不変量の視点からの特徴づけである. さらに, それぞれのねじれの回数で非自明な周期性をもっていることから, ねじれの部分を増やした結び目の族に対しても, ねじれ毎に周期性をもつことが期待できる明示公式になっている.

第 4 節では, reduced DW 不変量をモジュラスの和として解釈できることを説明した. この節の説明は [2] に沿っており, 特に, 結び目補空間の理想 4 面体分割にモジュラスが付随しており, モジュラスから得られる結び目群の表現がある種の条件を満たしているときに, 理想 4 面体たちのモジュラスの和が reduced DW 不変量に一致する命題を述べている. これは幾何学的な計算方法を確立するうえで重要な命題になっている.

第 5 節では, ダブルツイスト結び目 $T_{m,n}$ の結び目群のパラボリック $SL_2\mathbb{F}_p$ 表現の共役類と多項式 $F_{m,n}(u)$ の \mathbb{F}_p における零点が 1 対 1 に対応することを述べた. これは R. Riley の結果の \mathbb{F}_p におけるアナロジーである. これは, ダブルツイスト結び目の結び目群の具体的な表示と 2 元生成の群がパラボリック $SL_2\mathbb{F}_p$ 表現となるための条件を考えたときに, 満たすべき関係式が $F_{m,n}(u)$ を因子としてもつことを示すことによって証明さ

れる。この証明のために、漸化式で定義されるいくつかの多項式の族を導入している。

第 6 節では、結び目補空間の理想 4 面体分割から得られる双曲構造方程式と結び目の (1 タングル) 図式から得られる双曲構造方程式が一致することを述べた。まず、D. Thurston [4] によって提案された結び目補空間の理想 4 面体分割を得る方法を、Y. Yokota [5] に沿ってダブルツイスト結び目に適用した。特に、この節では、不要な理想 4 面体を排除した形で理想 4 面体分割を与えている。この理想 4 面体分割の各理想 4 面体にモジュラスが双曲構造方程式を \mathbb{F}_p で解くことによって与えられ、第 9 節での幾何的な計算方法において用いられる。このために、ダブルツイスト結び目の (1 タングル) 図式から得られる双曲構造方程式を明示的に与えている。

第 7 節では、第 6 節で与えた双曲構造方程式が、第 5 節で導入した多項式を用いて表せられることを示した。このことから、双曲構造方程式を \mathbb{F}_p において解くことと、 $F_{m,n}(u)$ を \mathbb{F}_p において解くことが同値であることが分かる。さらに、双曲構造方程式を \mathbb{F}_p において解いたときに得られる $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ の元の列を分類した。この列は有限通りに分類され、それぞれにおいて第 6 節で与えた理想 4 面体分割の理想 4 面体たちのモジュラスに違いが現れる。この分類は第 8 節における理想 4 面体分割の適切な取り換えに大きくかかわるものである。

第 8 節では、第 4 節で述べた命題を適用するために、結び目補空間の理想 4 面体分割を適切に取り換えた。複素数体 \mathbb{C} の場合に、双曲構造方程式を解くことで、理想 4 面体にモジュラスが定められる。一方で、双曲構造方程式を \mathbb{F}_p において解くと、定義不可能なモジュラスが現れる場合がある。その定義できないモジュラスの現れ方を表したのが、第 7 節で分類した列である。モジュラスが定義できない場合に、すべてのモジュラスが定義可能であるように理想 4 面体分割を適切に取り換えることによって、第 4 節で述べた命題を適用可能にしている。この取り換え操作は非自明な操作であるが、分類された $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ の元の列毎にどう取り換えればよいかを明示している。特に、ツイスト結び目の場合 [2] との大きな違いは、 m 回ねじれる部分に関わる理想 4 面体をすべて取り換えなければいけない場合が生ずることである。

第 9 節では、第 8 節で明示したダブルツイスト結び目の補空間の理想 4 面体分割の取り換えを施し、第 4 節の命題を用いて、具体的に \mathbb{F}_7 とダブルツイスト結び目の reduced DW 不変量をモジュラスの和として計算した。特に、第 7 節で導入した $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ の元の列を \mathbb{F}_7 に対して明示的に与え、その列を用いて reduced DW 不変量の公式を与えた。特に、 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ の元の列はそれぞれ周期性をもっており、その周期性から reduced DW 不変量も周期性をもつことが分かる。

付録 A では、第 8 節でおこなった結び目補空間の理想 4 面体分割を取り換え操作の際に、結び目補空間の双曲構造方程式がどう変わるのかを、境界トラス上の 3 角形分割の具体的な図を用いて説明した。

参考文献

- [1] Hutchinson, K., *A Bloch-Wigner complex for SL_2* , J. K-Theory **12** (2013) 15–68.
- [2] Karuo, H., *The reduced Dijkgraaf–Witten invariant of twist knots in the Bloch group of a finite field*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), No. 3, 70 pp.
- [3] Neumann, W.D., *Extended Bloch group and the Cheeger-Chern-Simons class*, Geom. Topol. **8** (2004) 413–474.

- [4] Thurston, D.P., *Hyperbolic volume and the Jones polynomial*, Notes accompanying lectures at the summer school on quantum invariants of knots and three-manifolds (Joseph Fourier Institute, University of Grenoble, org. C. Lescop, July, 1999),
<http://www.math.columbia.edu/~dpt/speaking/Grenoble.pdf>.
- [5] Yokota, Y., *On the complex volume of hyperbolic knots*, *J. Knot Theory Ramifications* **20** (2011) 955–976.