（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	軽尾　浩晃
論文題目	The reduced Dijkgraaf-Witten invariant of double twist knots in the Bloch group of $\mathbf{F}_p$ （Bloch群に値をもつダブルツイスト結び目のreduced Dijkgraaf-Witten不変量）		

（論文内容の要旨）

円周を３次元球面に埋め込んだ像を結び目という。結び目の補空間は、３次元多様体の典型的な例である。３次元多様体Mのダイグラーフ-ウィッテン不変量は、次のように定められる。有限群Gとアーベル群Aに対して、GのA係数３コホモロジー類ｃを１つ固定する。Mの基本群からＧへの準同型写像（G表現）で、ｃを引き戻して、Mの基本類で値をとったものを、Ａの元として、考える。すなわち、Gの分類空間をBGとして、Gのコホモロジー群とBGのコホモロジー群を同一視して、G表現が誘導するMからBGへの写像で、ｃを引き戻して、Mの基本類で値をとったものを、Ａの元として考える。Mの基本群のすべてのG表現の共役類について、その元を、Aの群環Z[A]の元として、足しあげたものが、Mのダイグラーフ-ウィッテン不変量である。このように、ダイグラーフ-ウィッテン不変量は、定義は比較的簡明であるが、しかし、与えられたMとｃに対してそのダイグラーフ-ウィッテン不変量の値を具体的に計算することは、必ずしも容易ではない。ダイグラーフ-ウィッテン不変量の値を計算する１つの方法は、Mの４面体分割を用いる方法であり、それは次のように与えられる。Mの４面体分割を１つ固定する。４面体分割の各頂点にＧの元を対応させる対応をＧ彩色という。Ｇ彩色は、Mの基本群のＧ表現と対応づけることができる。Ｇ彩色された４面体から、Ｇの元の４つ組が得られるが、３コホモロジーｃを与える３コサイクルでその４つ組の値をとることにより、Ａの元が定まる。その元をすべての４面体について足しあげることによりＡの元が定まる。さらに、その元をすべてのＧ彩色についてZ[A]の元として足しあげることにより、ダイグラーフ-ウィッテン不変量の値が得られる。

本論文において、申請者は、Gが$SL(2,F_p)$であり、AがF_pの被約ブロック群$B'(F_p)$であるときに、ブロック-ウィグナー写像が定める３コホモロジー類に対するダイグラーフ-ウィッテン不変量の値を２重ツイスト結び目に対して計算した。ここで、ｐは素数であり、F_pは位数ｐの有限体であり、$SL(2,F_p)$はその特殊線型群である。また、F_pから0と1を除いた集合が自由に生成するZ加群を、５角関係式で割ってできる商加群の、適切な指数２の部分群をブロック群$B(F_p)$という。さらに、これを４面体対称性で割って得られる加群が被約ブロック群$B'(F_p)$である。有限体のブロック群と被約ブロック群は、有限位数の巡回群であることが知られている。また、ブロック-ウィグナー写像の説明は、後述する。また、正の整数m,nに対して、ひものm回ひねりとn回ひねりを適切に合併してできる結び目が(m,n)２重ツイスト結び目である。非自明な２重ツイスト結び目は、すべて双曲結び目であることが知られており、数値計算をして現象を観察する対象として、２重ツイスト結び目は、良い結び目のクラスである。本論文の主定理により、(m,n)２重ツイスト結び目のダイグラーフ-ウィッテン不変量の値は、ｍとnのそれぞれについて周期性をもつことが観察される。この周期は、異なる長さの周期をもつ複数の数列の和の形で表示することができ、かなり非自明な周期である。また、不変量の値は、(m,n)に関するある種の対称性をもつことも観察される。

（続紙 ２ ）

（論文審査の結果の要旨）

１９８０年代に数理物理的手法がトポロジーに導入されて、とくに、３次元トポロジーにおいては、チャーン-サイモンズ理論にもとづいて、結び目と３次元多様体の不変量が大量に発見された。チャーン-サイモンズ理論においては、３次元多様体Mと群Gに対して、M上の主G束を考え、そのG接続全体の空間上でチャーン-サイモンズ汎関数が定める位相的量子場の理論の相関関数が、Mの位相不変量を数理物理的に与える。とくに、Gが有限群のとき、この不変量は、ダイグラーフ-ウィッテン不変量と呼ばれ、これがダイグラーフ-ウィッテン不変量の数理物理的背景である。一方、ダイグラーフ-ウィッテン不変量の数学的な定義は前述のように与えられる。前述した定義は、閉３次元多様体に対する定義であるが、この定義は、カスプ付き３次元多様体（とくに、結び目の補空間）に対して適切に拡張することができる。

ブロック-ウィグナー写像について述べる、体Fについて、SL(2,F)の３次ホモロジー群H_3(SL(2,F))からFのブロック群B(F)への写像である、ブロック-ウィグナー写像が、次のように定められる。Fの元ｖを１つ固定する。H_3(SL(2,F))の元は、SL(2,F)の元の４つ組で表されるが、これをｖに作用させることにより、Fの元の４つ組が得られ、さらにその複比をとることによりFの元が得られ、その元が定めるB(F)の元が、ブロック-ウィグナー写像の像である。２００４年に、ノイマンは、体が複素数体Cのときのブロック-ウィグナー写像を用いて、３次元双曲多様体Mの複素体積を構成した。ここで、複素体積とは、Mの双曲体積とチャーン-サイモンズ不変量を実部と虚部にもつような、Mの複素数値位相不変量である。

本論文において、申請者は、GがSL(2,F_p)であるとき、F_pの被約ブロック群B’(F_p)に値をもつダイグラーフ-ウィッテン不変量を具体的に計算している。この研究の１つの動機は、ノイマンの研究において、複素数体Cを有限体F_pにおきかえたときに、複素体積に相当する不変量がどのような不変量であるかを観察するために、具体例を計算したことである。すなわち、「離散化された複素体積」はどのようなふるまいをするのか調べたことが、この研究の１つの目的である。本研究の将来の展望として、「離散化された複素体積」や「離散化された双曲幾何」の研究が構築されることを期待したい。また、本論文において、主定理を証明するためのダイグラーフ-ウィッテン不変量の計算は、結び目補空間の理想４面体分割を用いて計算される。一般には、ダイグラーフ-ウィッテン不変量の計算は、彩色された４面体に群の３コサイクルの値を対応させて、その値をすべての４面体とすべての彩色に対して計算する必要があるので、その計算は非常に煩雑である。すなわち、群の３コサイクルは、群の元の４つ組に対して値を与える写像であって、その写像が良い表示をもつことは一般には期待できないので、その値を計算するためには非常に煩雑な計算が必要になる。一方、本論文では、ブロック群に値をもつダイグラーフ-ウィッテン不変量を計算しているので、彩色された４面体に対応するブロック群の元を求めれば不変量の値を計算することができる。このように、本論文は、ダイグラーフ-ウィッテン不変量の新しい計算方法を開発して、また、さらなる将来性も期待できる、優れた研究である。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和３年１２月７日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　年　　月　　日以降