（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	長岡　高広
論文題目	The universal covers of hypertoric varieties and Bogomolov’s decomposition (超トーリック多様体の普遍被覆とボゴモロフ分解)		

（論文内容の要旨）

複素代数多様体で正則なシンプレクティック形式をもったものを、複素シンプレクティック代数多様体とよぶ。 複素シンプレクティック代数多様体は、代数幾何や幾何学的表現論の様々な場面で登場する。 特に、Beauville が2000年に、シンプレクティック特異点の概念を提唱して以来、 コンパクトではない、特異点を持った複素シンプレクティック代数多様体が双有理幾何や変形理論の観点から、盛んに研究されるようになった。本論文の研究対象である超トーリック多様体は、シンプレクティック還元という手法によって構成される複素シンプレクティック代数多様体である。より具体的には，複素ベクトル空間 V に代数的トーラス T が線形的に作用しているとき，T は V の余接束 T^*V にも自然に作用する。余接束 T^*V 上には自然なシンプレクティック形式がのっており、この作用はハミルトン作用になる。このとき、T^*V から T のリー環の双対 t^* にモーメント写像と呼ばれる正則写像 m が定義される。m による原点の逆像を考え、そのGIT商を取って得られる特異点を持った代数多様体が超トーリック多様体である。

本論文の主結果は、錐的シンプレクティック特異点に対する Bogomolov 分解予想を、シンプレクティック特異点解消をもつアファイン超トーリック多様体の場合に、より強い形で解決したことである。これは、2013 年に並河によって予想されたもので、以下がその内容である:

「錐的シンプレクティック特異点 X の非特異部分 X_reg の基本群は有限群で、X_reg の普遍被覆に付随した X の有限被覆 Y を取ると、Y は既約な錐的シンプレクティック特異点の直積に分解する。」
ここで、X が既約なシンプレクティック特異点とは、X 上の斉次なシンプレクティック形式が定数倍を除いて一意的であることを言う。

本論文では、まず、アファイン超トーリック多様体 X の有限被覆 Y を超トーリック多様体として具体的に構成する。Y は X からsimplification と呼ばれる組み合わせ論的操作で得られる超トーリック多様体である。このとき、Y は高々末端特異点しか持たず、Y_reg の基本群は自明であることがわかる。したがって、Y は X_reg の普遍被覆に付随した有限被覆であることがわかり、X_reg の基本群は、Y/X の被覆群に等しいことになる。論文中、基本群が明示的に表示されている。

次に、組み合わせ論的な情報を用いて、X を block-indecomposable な超トーリック多様体の有限個の積に分解する。さらに block-indecomposable な超トーリック多様体が実際に既約であることを証明する。超トーリック多様体の場合は、本来のBogomolov 予想よりは強い形の分解定理が成り立つことになる。

最後に、２つの 2n 次元アファイン超トーリック多様体が錐的シンプレクティック多

様体として同型であることと、超トーリック多様体としての同型類（すなわち、シンプレクティック構造を保つ n 次元代数トーラス同変同型類）とが同じであることが示される。

（続紙 ２ ）

（論文審査の結果の要旨）

超トーリック多様体は、もともと、超ケーラー構造をもつ多様体として、微分幾何的な観点から研究されていたが、その後、組み合わせ論や表現論の観点からの研究も盛んになった。一方、本論文は、代数幾何的観点からの研究であり、従来の研究とは一線を画す新しい見方を含んでいる。

本論文の結果は大まかに言うと３つある。アファイン超トーリック多様体 X の非特異部分 X_reg の普遍被覆を考え、それにに付随する X の有限被覆 Y を超トーリック多様体として具体的に構成する。それを用いて、X_reg の基本群の具体的表示を与えたこと。これが１番目の結果である。２番目は、アファイン超トーリック多様体を既約な超トーリック多様体の有限個の積に分解したこと。 そして３番目は、２つの 2n 次元アファイン超トーリック多様体が錐的シンプレクティック多様体として同型であることと、超トーリック多様体としての同型（すなわち，シンプレクティック構造を保つ n 次元代数トーラス同変同型）であることが同じであることを示したことである。

錐的シンプレクティック多様体の非特異部分の基本群が具体的に計算されている例は、複素半単純リー環のべき零軌道以外にはほとんどない。その意味で、1 番目の結果は重要である。この論文では、シンプレクティック特異点解消をもつアファイン超トーリック多様体 X を扱っているので、Y は超トーリック多様体として構成できた。シンプレクティック特異点解消を持たない場合、Y がどうなるか、そして X_reg の基本群が何になるかはまだ分かっていないようであり、面白い問題である。

２番目の結果は、並河によって予想された錐的シンプレクティック多様体の Bogomolov 分解がもとになっている。本論文では、普遍被覆をとらなくても、分解が存在することを示しているので、予想よりも強いことを証明している。最近、特異点を持った射影多様体やコンパクトケーラー多様体に対する Bogomolov 分解に関して、葉層 (foliation)を用いた理論が発展しつつある。本論文で証明された超トーリック多様体のボゴモロフ分解は、超トーリック多様体に付随する組み合わせ論的データを用いたものであった。葉層を用いた、より内在的な証明が期待される。その意味で、この論文に扱われているテーマは発展性を秘めている。主結果であるボゴモロフ分解の証明の鍵になっている既約性の証明は、本論文中、最も難しい部分であり、それを遂行したことは高く評価できる。

３番目の結果により、アファイン超トーリック多様体を、錐的シンプレクティック多様体として、組み合わせ論的データから分類できることになる。その意味で、美しく、理想的な結果である。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和3年12月22日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　年　　　月　　　日以降