

不飽和浸透流の解析手法と 降雨流出モデルへの応用

菅原快斗

目次

序論	1
1 章 不飽和浸透流解析に関する既往研究	4
1.1 鉛直不飽和浸透の解析解について	4
1.2 不飽和浸透流を考慮した流量流積関係式	5
2 章 地下水面を有する土壌における Richards 式の解析解	10
2.1 はじめに	10
2.2 水分量境界の解析解の導出	11
2.3 解析解を用いた不飽和浸透計算	14
2.4 上部境界条件が時間的に変化する際の疑似的な不飽和浸透計算	16
2.5 まとめ	19
3 章 分布型モデルへの適用を目的とした鉛直浸透流の観測と Richards 式の解析解による再現計算	21
3.1 はじめに	21
3.2 観測手法	21
3.3 解析手法	22
3.3.1 圧力拡散方程式の解析解とフラックスの導出	22
3.3.2 計算条件	23
3.4 結果	24
3.4.1 土壌水分量観測の結果	24
3.4.2 圧力水頭観測の結果と観測を再現し得るパラメータ	25
3.5 考察	27
3.5.1 再現計算の圧力水頭変化とその特徴	27
3.5.2 フラックスの計算と拡散係数・深さの影響	30
3.6 まとめ	35
4 章 重力項を考慮した Richards 式の解析解と既往の解析的手法との対応	37
4.1 はじめに	37
4.2 手法	37
4.2.1 Richards 式の線形化	37

4.2.2	フラックス境界の解析解	38
4.2.3	飽和境界の解析解	40
4.3	計算条件	40
4.4	結果	41
4.4.1	フラックス境界の解析解による計算結果	41
4.4.2	飽和境界の解析解による計算結果	42
4.5	既往の解析的手法との対応	43
4.5.1	本章の解析解と Green-Ampt 式及び Philip 式の対応	43
4.5.2	本章の解析解と Green-Ampt 式で等価なパラメータを用いた計算	45
4.6	まとめ	47
5 章	水分保持曲線を反映する流量流積関係式の導出と分布型流出モデルへの適用	48
5.1	はじめに	48
5.2	流量流積関係式の導出	49
5.2.1	本研究で想定する斜面と用いる基礎式	49
5.2.2	既往研究の手法	51
5.2.3	新たな流量流積関係式の導出	51
5.2.3.1	本研究で用いる水分保持曲線と不飽和透水係数の関係式	51
5.2.3.2	飽和帯が発生している場合の流量流積関係式	52
5.2.3.3	飽和帯が発生していない場合の流量流積関係式	53
5.2.3.4	表面流が発生している場合の流量流積関係式	53
5.2.3.5	得られた流量流積関係式のまとめ	54
5.3	分布型流出モデルへの適用と計算条件	54
5.3.1	RRI モデルの概要	54
5.3.2	計算手法と適用の際に用いた仮定	55
5.3.3	対象流域とパラメータ	55
5.4	結果	57
5.4.1	土壌タイプ毎の流量流積関係式	57
5.4.2	観測流量との比較とハイドログラフの特徴	58

5.5	考察	62
5.5.1	土壌タイプによる初期条件の違い	62
5.5.2	土壌タイプの違いがピーク流量に与える影響	63
5.5.3	初期条件の違いがピーク流量に与える影響	66
5.6	まとめ	68
6	章	
	パイプ流の影響を考慮した流量流積関係式の導出と流域貯留量への影響	70
6.1	はじめに	70
6.2	パイプ流を考慮した流量流積関係式の導出	71
6.2.1	想定する斜面と基礎式	71
6.2.2	飽和帯が発生している場合	72
6.2.2.1	$0 < h \leq L_1$ ($S_{thre} < S \leq S(h = L_1)$)の場合	73
6.2.2.2	$L_1 < h < L_2$ ($S(h = L_1) < S < S(h = L_2)$)の場合	73
6.2.2.3	$L_2 \leq h \leq L$ ($S(h = L_2) \leq S \leq \theta_s L$)の場合	73
6.2.3	飽和帯が発生していない場合 ($S \leq S_{thre}$)	73
6.2.4	$L < h$ ($\theta_s L < S$)の表面流が発生している場合	74
6.2.5	得られた流量流積関係式のまとめ	74
6.3	計算条件	75
6.3.1	流量流積関係の計算条件	75
6.3.2	分布型流出モデルの計算条件	76
6.4	結果と考察	77
6.4.1	パイプに関係するパラメータが流量流積関係に与える影響	77
6.4.2	流量変化と流域の貯留量	79
6.4.3	ピーク時刻に発生している流れの分布	82
6.5	まとめ	85
	結論	86
	付録	89

序論

降雨流出モデルについて、過去にはタンクモデルや貯留関数法といった集中型と呼ばれる手法が広く用いられてきた。集中型モデルは流域全体をタンクのような概念的な構造とみなすことによって、簡便に流出量を算定できる。実際のところ、大規模出水時には降雨に対して流出は単純な応答を示すことが多く、観測データを用いた最適化を行うことによって、集中型のような単純なモデルでも流出量を高い精度で予測することが可能である。一方で、集中型モデルには次のような問題も指摘されている。近年では、観測データの豊富な大河川だけでなく中小河川でも洪水予測の必要性が高まっている。しかし、集中型モデルは設定した流域最下流の流量を計算するものであり、流域内の他地点の流量を得ることはできない。そのため、集中型モデルを中小河川に適用する際には地点ごとにモデルを構築することになるが、中小河川については観測情報が十分に得られない地点も多くパラメータ最適化が困難である。また、集中型モデルについては流域の降雨流出過程を過度に簡略しているという面もある。現実の降雨流出過程は遮断・浸透・蒸発散といった多種多様なプロセスを有するが、集中型モデルはそれらを流域単位でまとめて単一の降雨流出応答として表現する。そのため、個々の現象に代表される特性や時空間的な変動を陽にモデルへと組み込めない。これにより、構築されたモデルが本当に実際の降雨流出過程を模しているといえるかは不透明である。

電子計算機の発展に伴い、集中型モデルに代わって分布型と呼ばれるモデルが多用されるようになってきた。分布型モデルは流域を複数のグリッドセルへと分割し、グリッドセル間の水収支を計算することで流域内の降雨流出過程を表現するモデルである。これにより、分布型モデルでは流域内の水移動を逐次追跡することが可能であり、大河川のみならずその過程にある中小河川の流量も効率的に予測できる可能性がある。分布型モデルにおいて、遮断・浸透・蒸発散といった個々の降雨流出プロセスは要素モデルとして陽的に組み込まれる。要素モデルにどのような方程式系を用いるのか、どこまで詳細に降雨流出プロセスをモデルへと組み込むのかといった点がそれぞれの分布型モデルを特徴づける。

要素モデルの中でも森林域の浸透プロセスは非常に重要である。出水時に流量を低減・遅延させる流域の貯留効果は、森林域における土壌の不飽和浸透流によって生じることが明らかになっており、高精度な流量予測には同プロセスの適切なモデル化が必須である。浸透現象は非線形偏微分方程式である Richards 式によって表現される。一般的に Richards 式を数値的に解く場合には、その非線形性の強さから細かい空間分解能を設定し、各時間ステップにおいて解が収束するまで反復計算を行う。しかし、分布型モデルで対象となる流域は単一流域にとどまらず、Richards 式の一般的な数値計算を広域で行うことは困難である。そこで、分布型流出モデルで浸透現象をモデル化する際には何らかの簡略化が行われることが多い。代表的なものとしては、3次元の問題を水平2次元と鉛直1次元の問題に分解する方法である。出水時の主たる降雨流出プロセスは、表層土層から浸透した雨水が土層を鉛直方

向へ降下したのち、基岩との境界上に飽和帯を形成し(または不圧地下水帯を涵養し)、河道に向けて斜面を流下する。このプロセスの鉛直浸透過程は不飽和浸透が支配的であり、鉛直方向は水平方向に比べて対象領域が狭いため、Richards 式を 1 次元で解く形でモデル化される場合がある。一方、水平方向の浸透プロセスでは鉛直方向に比べて対象領域が広いいため、飽和ダルシー則と連続式を連立して解く場合が多い。

我が国における降雨流出モデルの開発にあたっては、水平方向の水移動が重要視されてモデル化が進められてきた。これは、我が国の森林土壌の土層厚が斜面の流下距離に比べて短く、出水時には鉛直方向の浸透の影響が比較的短いと考えられてきたからと推察できる。一方で、水平 2 次元の計算においても不飽和浸透流の影響を考慮するために、流量と水量の関係である流量流積関係に不飽和流を組み込むモデルも提案されている。

不飽和浸透流をどのように分布型モデルへと組み込むにせよ、重要となるのは、不飽和浸透の特性を物理的な根拠に基づいた解析手法で反映させることにある。しかし、分布型モデルの開発において、浸透現象は要素モデルの一つであり理論的にその適用性を議論した研究は限られている。そこで本研究では、不飽和浸透流を分布型流出モデルに組み込む際の課題を理論的な面から分析し、物理的かつ簡便な不飽和浸透流モデルを提案することを目的とする。

以下に本論文の構成を示す。

1 章では、解析的な不飽和浸透流モデルのレビューを行う。鉛直 1 次元の不飽和浸透流について、Richards 式の解析解を体系的にまとめ、それぞれの特徴について考察する。水平方向の不飽和浸透流について、流量流積関係式に不飽和浸透流を内包させるモデルについてまとめる。

2 章では、境界条件として任意の水分量を設定できる線形 Richards 式の解析解を導出する。また、得られた解析解を用いて、下端境界に地下水面が存在する場合の挙動について分析する。さらに、基岩上の飽和側方流の発生・消失を想定して、上端境界に時系列データを適用する計算法について検討する。

3 章では、Richards 式を簡略化した圧力拡散方程式の解析解を用いて、現実の土壌水分量の再現計算を行う。その結果から、解析的手法を現実の土壌へと適用する際の課題について分析する。また、圧力拡散方程式の解析解から、フラックスを解析的に導出し分布型モデルへと組み込めるように改良する。

4 章では、第 2 章と第 3 章で明らかになった問題を解決するような Richards 式の解析解を提案し、その適用性について議論する。また、解析解と Green-Ampt 式と Philip 式の間を理論的に導出し、既往研究との対応を明らかにする。

5 章では、水分保持曲線を反映した流量流積関係式を導出する。これによりパラメータを実験・観測から決定することができ、物理的に不飽和浸透流を解析可能となる。得られた流量流積関係式を分布型流出モデルへと適用し、実際の流域・降雨イベントを対象に計算を行う。結果から構築したモデルの特徴について分析する。

6章では、5章で開発したモデルにおいて現実の土壌における飽和透水係数を用いた場合には過剰に表面流が発生する可能性があることを踏まえ、簡易的なパイプ流を考慮した流量流積関係式を導出する。得られた流量流積関係式を用いて第5章と同様の計算を行い、パイプ流の存在によってヒドログラフや流域の貯留量にどのような違いが出るのかを分析する。

最後に本論文の結論を述べる。

1 章 不飽和浸透流解析に関する既往研究

1.1 鉛直不飽和浸透の解析解について

下流の流量を低減し遅らせる森林流域の貯留効果は、土壌の不飽和浸透によってもたらされる。流域の持つ貯留効果を降雨流出モデルで再現するためには、不飽和浸透プロセスの適切なモデル化が必要不可欠である。雨水の不飽和浸透は偏微分方程式である Richards 式を数値的に解くことで求められ、流域単位で 3 次元の Richards 式を数値的に解いて下流の流量を求めるという研究も行われている。しかし、計算量の削減やモデルの簡便さを目的として、側方方向では基岩上に発生する飽和帯が流出の主成分であると考え、鉛直方向で Richards 式に基づく不飽和浸透解析を行い、側方方向は飽和帯のみを追跡するという方法²⁾がより一般的である。ただし、降雨流出モデルの対象はこれまで主たる対象だった単一流域のみならず複数流域を包括した地域・国単位までに広がっており³⁾、水平方向に数百から数千万のグリッドセルを有する場合は鉛直方向の離散化自体が困難であるという問題がある。降雨流出モデルの対象領域はますます広がっていき、空間分解能はより小さく詳細になっていくことが予想されるため、鉛直方向の不飽和浸透はなるべく離散化を避けて簡便に解析することが必要になる。これを踏まえ、本節では Richards 式の解析解に関する既往研究をまとめる。解析解は基本的に空間的な離散化を行うことなく、任意の深さ・時間における物理量の変化を追跡することが可能であり、不飽和浸透をより簡便に記述できる可能性がある。

Richards 式の解析解には多くの種類が存在するが、一つの基準として Richards 式を線形化しているかによって大別できる。土壌が乾燥している場合などには非線形性の強い挙動が顕著となるため、非線形という条件で導出された解析解はより厳密に不飽和浸透を記述できる可能性がある。以下に Richards 式を非線形偏微分方程式として解析解を導出した代表的な研究を示す。Philip⁴⁾は拡散係数を用いて表記された Richards 式に Boltzmann 変換を用い、重力項を微小と考えた摂動展開から地表面飽和時の浸透能を解析的に求めた。浸透能の級数解における低次の二項をとったものが Philip 式として広く用いられている。Richards 式を非線形偏微分方程式の Burgers 方程式へと帰着させ解析解を求めるという研究^{5), 6), 7)}も行われている。Burgers 方程式は Richards 式の重力項のみが非線形のケースであり、Cole Hop 変換と呼ばれる変数変換を行うことで線形の拡散方程式に帰着できることが知られている。解析解は飽和・一定流量境界条件の下で求められており、重力項が非線形の場合の挙動を簡便に記述する。進行波解と呼ばれる Richards 式を満たす特殊な解析解を求めるという試み^{8), 9)}も行われている。進行波は形を変えず等速で移動する波のことをいい、Richards 式では wetting front を伴い下降浸潤するケースなどが該当する。解の挙動は限定されるものの、複雑な水分保持曲線を用いた際の解析解を導出している。以上のように非線形偏微分方程式として Richards 式の解析解を導出した研究も報告されているものの、非常に限定された条

件の下で導出されたものがほとんどである。特に降雨流出モデルへの適用を考えた場合には、観測降雨データといった離散的な入力に対する応答を計算することが困難であることが障害となる。上述したような解析解では、離散的データを直接入力として計算することができず、時間ステップごとに境界条件を更新し、前の時間ステップの状態を新たな初期条件として計算するといった工夫が必要となる。必然的に任意の初期条件の下で計算を行えるといった汎用性を求められるため、現状では非線形の場合の解析解では適用が難しい。

Richards 式を線形の移流拡散方程式へと帰着させた場合には、汎用的な解析解の導出法が確立されていることもあり、多くの条件の下で解析解が導出されている。基礎的なものとしては地表面が飽和している条件のもの^{10), 11)}や地表面に一定のフラックスが与えられているもの¹²⁾がある。また、応用的なものとしてはパラメータの異なる二層の土壌を連結させた場合の解析解¹³⁾や地表面のフラックスとして任意の時間関数を適用可能な解析解¹⁴⁾などが導出されている。Richards 式を線形へと帰着させることの大きな利点は、重ね合わせの原理から離散的な入力に対する応答を非常に簡便に計算できることにある。例えば、観測降雨データのような離散的入力から計算される応答は、離散的入力をそれぞれ単一のパルスへと分解したうえで各々のパルスから計算される応答を足し合わせたものに等しくなる。重ね合わせの原理を用いることによって任意の初期・境界条件を反映可能な Richards 式の解析解も導出されており¹⁵⁾、非常に汎用的な計算を行える。一方で、既往の解析解の多くは物理現象の理解や数値モデルのベンチマークを目的として導出したものが多く、解析解が現実の不飽和浸透を再現し得るかやパラメータの決定法といった降雨流出モデルに適用するための議論については十分に検討されてこなかった。そのため、解析解の降雨流出モデルへの適用については、その特性を詳細に分析したうえで対象となる場に合わせて適切な解析解を選択することが必要となる。これを踏まえ、本研究では複数の解析解を用いてその特性と適用性について詳細に分析する。2章では、地下水面を有する基岩層における不飽和浸透を表現し得る解析解を導出し、その挙動を分析する。3章、では現実の不飽和浸透を解析解で再現可能であるかを分析するため、土壌水分量の現地観測と拡散方程式の解析解を用いた再現計算を行う。4章では、重力項を考慮した解析解を導出し、より汎用的な計算を行えるようにする。また、既往の解析的手法との対応を明らかにし、パラメータを援用できるようにする。

1.2 不飽和浸透流を考慮した流量流積関係式

流域の貯留効果を適切に表現するために重要となる不飽和浸透流のモデル化について、地表面から基岩までの鉛直不飽和浸透を直接的に解析するのではなく、鉛直方向の集中化から不飽和浸透の効果を側方の流量流積関係へと内包させるという方法も提案されている。鉛直方向に集中化を行う利点については、鉛直不飽和浸透に伴う空間的な離散化を必要とせず計算量を削減できること、地下水位の増大に伴う不飽和領域の縮小といった鉛直と側

方方向の複雑な相互作用を考慮する必要がなくなることがあげられる。もともと、日本の森林流域のように土層厚が数 m 程度である場合には、鉛直方向の流下距離よりも側方方向の流下距離の方が圧倒的に長く、側方方向の雨水の流動が重要視されてきた。それに伴い基岩上に発生する飽和側方流を飽和ダルシー則で表現し、流量流積関係式を構築したうえで、側方方向の連続式と合わせて降雨流出現象を追跡するという方法がとられてきた¹⁶⁾。一方で、飽和流のみを考えた場合には流域の貯留効果を適切に評価できないため、流量流積関係式に不飽和浸透の効果を内包させることで、洪水時のピーク流量の低減や低出水時の流量といった不飽和浸透流の効果をモデルで再現する試みが進められてきた。本節では、このような流量流積関係式に不飽和浸透流の効果を内包させる研究について既往研究をまとめ、その改善点を明らかにする。

高棹ら¹⁶⁾は土壌中の飽和側方流を飽和ダルシー則で、土壌中の飽和帯が発達して発生する地表面流の流量を水深のべき乗関数で表現した流量流積関係式を提案した。Trochら¹⁷⁾は **drainable porosity** と呼ばれるパラメータを用いて、飽和帯よりも上部の不飽和領域に貯留される水分量を評価した。すなわち、高棹らの研究では有効空隙内に存在する水分量のすべてが飽和帯の水分量として計算されるのに対して、Trochら¹⁷⁾の研究では不飽和帯に貯留される水分量を考慮することにより、同じ水分量でも高棹らの場合に比べて飽和帯の水深は小さくなる。これは、不飽和浸透流を直接的に解析しているわけではないが、不飽和帯の影響を考慮している形になる。Hilbertsら¹⁸⁾は、前述の **drainable porosity** は現実には土壌の保水性と水深によって決まるものだとし、斜面に対して垂直方向の平衡分布を仮定し、Van Genuchten モデル¹⁹⁾のパラメータを一部変更した修正モデルから **drainable porosity** の解析式を導出した。

上述の研究が飽和帯の水深の増減に対する不飽和帯の影響を考慮したのに対して、飽和帯が発生していない不飽和浸透流のみが流出に寄与する状態を流量流積関係式に反映した研究を示す。窪田ら²⁰⁾は、側方方向の流量を平均飽和度のべき乗関数とした流量流積関係式を提案した。これは、飽和帯の発生前後を区別することなく、どの飽和度であっても斜面に対して垂直方向に平均化した水分量分布から流量を計算するものである。一方、実際の土壌では不飽和帯の水分量が増加した場合と、飽和帯が発生し、飽和帯の水深が増加した場合で流量の増加率は大きく異なる。これを踏まえ、窪田ら²¹⁾は、飽和帯が発生する水分量をパラメータとして導入し、飽和帯が発生していない場合と発生している場合を区別して流量の増加率を変化させるという改良を行った。このようなモデル構造では、パラメータとした飽和帯の発生する水分量が非常に重要な役割を担うことになるため、土壌カラムを用いた散水実験²²⁾や鉛直不飽和浸透流の数値解析²³⁾からそのパラメータを推定しようとする試みも行われている。椎葉ら²⁴⁾は、土壌に吸着されなかった自由水が飽和側方流として流出するものと考え、圃場容水量を用いた流量流積関係式を導出した。このモデルでは、全水量は自由水の成分と土壌に吸着する成分の和として定義され、自由水の成分のみが飽和ダルシー則に基づき流出に寄与する。水量が少ないときは土壌に吸着する成分が多く、水量が増え

るにつれて自由水の成分が多くなるようにすることで、圃場容水量以下の低出水時の挙動をモデルに組み込んだ。立川ら²⁵⁾は、椎葉らのモデルをより物理的に導出し、飽和帯の有無による流出形態の変化をより明確に表現するため、不飽和ダルシー則を用いた流量流積関係式を導出した。この研究では、土壌を大空隙部とマトリクス部に分け、大空隙部からの流出に飽和ダルシー則、マトリクス部からの流出に不飽和ダルシー則を用いている。椎葉らが降雨の自由水と吸着水への配分を関数としたのに対し、立川らは降雨が圃場容水量に対応する水分量まですべてマトリクス部へ供給されるとしたことで、不飽和側方流のみが発生している場合と飽和側方流が発生している場合とで流れの形態を明確に分離し、パラメータを決定しやすくした。また、不飽和ダルシー則を用いることによって、土壌特性をパラメータとして含んだうえで、より物理的に不飽和流をモデル化している。

前段落で示した流量流積関係式に関する研究では、そのどれもが不飽和流をモデル化する際に、斜面に沿って垂直方向の分布を考慮することなく、その全水量のみを用いて不飽和透水係数を評価している。このようなモデル構造は簡便である一方で、Hilberts らの研究¹⁸⁾のように水分保持曲線すなわち土壌の保水性をモデルに反映できないという問題がある。特に、飽和帯が発生する水分量は土壌の保水性の違いによって大きく異なることが予想される。水分保持曲線を考慮したうえで、不飽和側方流を流量流積関係式に内包させたものとして、Kong らの研究があげられる。Kong ら²⁶⁾は、Hilberts らの研究と同様に斜面に対して垂直方向の平衡状態を仮定し、不飽和透水係数の分布を積分することによって不飽和側方流を求めた。この場合に水分量の分布は一樣ではなく、保水性の違いによる水分量分布の形状の違いが流量流積関係式に影響する。ただし、この研究では不飽和透水係数が水分保持曲線と同形であると仮定している。これにより、水分保持曲線のパラメータから不飽和透水係数を決定できず、その物理性やパラメータの増大が課題となっている。この課題を解決するため、5章において新たな流量流積関係式を導出する。

参考文献

- 1) 白木克繁. (2000). 簡略化された 3 次元飽和不飽和浸透数値計算による森林山地流域土中水挙動の長期再現計算. 日本林學會誌, 82(4), 364-372.
- 2) Hilberts, A. G., Troch, P. A., Paniconi, C., & Boll, J. (2007). Low-dimensional modeling of hillslope subsurface flow: Relationship between rainfall, recharge, and unsaturated storage dynamics. *Water resources research*, 43(3).
- 3) Sayama, T., Yamada, M., Sugawara, Y., & Yamazaki, D. (2020). Ensemble flash flood predictions using a high-resolution nationwide distributed rainfall-runoff model: case study of the heavy rain event of July 2018 and Typhoon Hagibis in 2019. *Progress in Earth and Planetary Science*, 7(1), 1-18.

- 4) Philip, J. R. (1957). The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. *Soil science*, 83(5), 345-358.
- 5) Broadbridge, P., & White, I. (1988). Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model: 1. Analytic solution. *Water Resources Research*, 24(1), 145-154.
- 6) Hills, R. G., & Warrick, A. W. (1993). Burgers' equation: A solution for soil water flow in a finite length. *Water resources research*, 29(4), 1179-1184.
- 7) Basha, H. A. (2002). Burgers' equation: A general nonlinear solution of infiltration and redistribution. *Water Resources Research*, 38(11), 29-1.
- 8) Zlotnik, V. A., Wang, T., Nieber, J. L., & Šimunek, J. (2007). Verification of numerical solutions of the Richards equation using a traveling wave solution. *Advances in water resources*, 30(9), 1973-1980.
- 9) Hayek, M. (2016). An exact explicit solution for one-dimensional, transient, nonlinear Richards' equation for modeling infiltration with special hydraulic functions. *Journal of Hydrology*, 535, 662-670.
- 10) Philip, J. R. (1966). A linearization technique for the study of infiltration. *Proc., UNESCO Symp. on Water in the Unsaturated Zone*, 1, 471-478.
- 11) Tracy, F. T. (2011). Analytical and numerical solutions of Richards' equation with discussions on relative hydraulic conductivity. *Hydraulic Conductivity-Issues, Determination and Applications*, 203-222.
- 12) Braester, C. (1973). Moisture variation at the soil surface and the advance of the wetting front during infiltration at constant flux. *Water Resources Research*, 9(3), 687-694.
- 13) Srivastava, R., & Yeh, T. C. J. (1991). Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils. *Water Resources Research*, 27(5), 753-762.
- 14) Chen, J. M., Tan, Y. C., Chen, C. H., & Parlange, J. Y. (2001). Analytical solutions for linearized Richards equation with arbitrary time-dependent surface fluxes. *Water Resources Research*, 37(4), 1091-1093.
- 15) Menziani, M., Pugnaghi, S., & Vincenzi, S. (2007). Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions. *Journal of Hydrology*, 332(1-2), 214-225.
- 16) 高棹琢馬, 椎葉充晴, 北村英和 (1976). 分布型出水モデルによるシミュレーションと集中化スケール, 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, II-74.
- 17) Troch, P. A., Paniconi, C., & Emiel van Loon, A. E. (2003). Hillslope-storage Boussinesq model for subsurface flow and variable source areas along complex hillslopes: 1. Formulation and characteristic response. *Water Resources Research*, 39(11).
- 18) Hilberts, A. G., Troch, P. A., & Paniconi, C. (2005). Storage-dependent drainable porosity for complex hillslopes. *Water resources research*, 41(6).

- 19) Van Genuchten, M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5), 892-898.
- 20) 窪田順平, 福嶋義宏, 鈴木雅一. (1987). 山腹斜面における土壌水分変動の観測とモデル化. *日本林學會誌*, 69(7), 258-269.
- 21) 窪田順平, 福嶋義宏, 鈴木雅一. (1988). 山腹斜面における土壌水分変動の観測とモデル化 (II) 水収支および地下水発生域の検討. *日本林學會誌*, 70(9), 381-389.
- 22) 寺本和子, 鈴木立実, 成瀬隆弘, 松山裕幸, 平松晋也. (1995). 飽和度変化に伴う地下水深の消長を考慮した雨水流動モデルの現地流域への適用について. *砂防学会誌*, 47(6), 15-23.
- 23) 鳥居宣之, 大西剛史. (2011). 斜面崩壊危険度評価のための表土層内の降雨浸透過程を簡略化した地下水位算定モデル. *土木学会論文集 C (地圏工学)*, 67(4), 441-452.
- 24) 椎葉充晴, 立川康人, 市川温, 堀智晴, 田中賢治. (1998). 圃場容水量・パイプ流を考慮した斜面流出計算モデルの開発. *京都大学防災研究所年報. B*, 41(B-2), 229-235.
- 25) 立川康人, 永谷言, 寶馨. (2004). 飽和・不飽和流れの機構を導入した流量流積関係式の開発. *水工学論文集*, 48, 7-12.
- 26) Kong, J., Shen, C., Luo, Z., Hua, G., and Zhao, H. (2016). Improvement of the hillslope-storage Boussinesq model by considering lateral flow in the unsaturated zone, *Water Resources Research*, 52(4), 2965-2984.

2章 地下水面を有する土壌における Richards 式の解析解

2.1 はじめに

我が国における洪水予測を目的とした降雨流出モデルの開発にあたっては、基岩層の不透水性を仮定し、基岩上に発生する飽和側方流が河川流出の主要な成分であると考えてきた。しかし、近年では、風化基岩などを有する流域においては降雨が少なからず基岩層へと浸透し、地下水からの流出が比較的早く応答することが示されている¹⁾(図 2.1)。このような知見を踏まえて、基岩内への浸透と地下水の流動を組み込んだ分布型流出モデルも開発されている²⁾。一方、基岩へと浸透した雨水が地下水面を涵養するまでの不飽和浸透プロセスについては十分なモデル化がなされていない。基岩における不飽和浸透についても、基岩のサンプリングから決定されたパラメータを用いた実験から Richards 式の適用可能性が示されている³⁾。ただし、基岩不飽和部の浸透を Richards 式を離散化して数値的に解くと、分布型流出モデルにおいては計算量の増大につながるため、解析解などを用いた物理挙動の把握と簡略化が必要になる。

既往のリチャーズ式の解析解は、土壌の初期水分量が一定で地表面から降雨が浸透してくる場合を想定したものが多く、一方で、図 2.1 に示したように、基岩の不飽和部においては下部境界の地下水面は常に飽和状態にあり、その影響で初期水分量は一定とならない。また、中間流の発生から消失の過程で、上部境界の水分量は時々刻々と変化する。そこで、本章では、任意の水分量境界条件と初期条件を設定できる Richards 式の解析解を導出し、基岩不飽和部にみられるような境界・初期条件を設定したときの挙動を分析する⁴⁾。

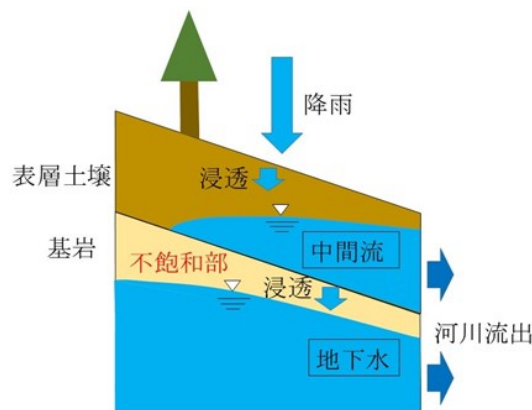


図 2.1 想定している斜面の流出プロセス

2.2 水分量境界の解析解の導出

鉛直 1 次元のダルシー則と連続式を次に示す.

$$q = -K \frac{\partial \psi}{\partial z} + K \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial z} \quad (2.2)$$

ここで t は時間, z は上端からの深さ, q は単位流量, K は不飽和透水係数, ψ は圧力水頭, θ は体積含水率である. この 2 式から土中の鉛直浸透を記述する Richards 式⁵⁾が得られる.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} - K \right) \quad (2.3)$$

次の $\theta - \psi - K$ 関係から Richards 式を線形化する.

$$S = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = e^{\alpha \psi} \quad (2.4)$$

$$K = k_s S \quad (2.5)$$

S は有効飽和度であり, θ_s は飽和体積含水率, θ_r は残留体積含水率, α は水分保持曲線の形状を決定するパラメータ, k_s は飽和透水係数である. 式(2.4)は一般的に Gardner モデル⁶⁾と呼ばれる. 上記の関係式を用いて有効飽和度形式で Richards 式を書くと次式となる.

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - V \frac{\partial S}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$D = \frac{k_s}{\alpha(\theta_s - \theta_r)} \quad (2.7)$$

$$V = \frac{k_s}{(\theta_s - \theta_r)} \quad (2.8)$$

式(2.6)を次の境界・初期条件の下で解く.

$$S(z = 0, t) = a \quad (2.9)$$

$$S(z = L, t) = b \quad (2.10)$$

$$S(z, t = 0) = f(z) \quad (2.11)$$

a, b は定数, L は下端境界までの深さ, $f(z)$ は $0 \leq f(z) \leq 1$ を満たす任意の関数である. 上記は一定水分量境界条件と任意の初期水分量分布を意味する. 式(2.9), (2.10)をより簡単な形に変形するため変数変換を行う⁷⁾. 次のような微分方程式を考える.

$$0 = D \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - V \frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.12)$$

この式の解は次式で与えられる.

$$U = A_1 e^{\frac{V}{D}z} + A_2$$

A_1, A_2 は定数である. S' も S と同様に式(2.9), (2.10)の境界条件を満たすものとする, A_1, A_2 が次のように定まる.

$$A_1 = \frac{a-b}{1-e^{\frac{V}{D}L}} \quad (2.13)$$

$$A_2 = \frac{b-ae^{\frac{V}{D}L}}{1-e^{\frac{V}{D}L}} \quad (2.14)$$

新たな変数 u を次のように定義する.

$$u = S - U$$

式(2.6), (2.9), (2.10), (2.11)を u を用いて書き換える.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - V \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.15)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2.16)$$

$$u(z, 0) = f(z) - U \quad (2.17)$$

式(2.15)を変数分離法を用いて解く.

$$u = Z(z)T(t) \quad (2.18)$$

と書けるものとする, 式(2.15)から次式が得られる.

$$\frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \frac{V}{Z} \frac{\partial Z}{\partial z} = -A^2 \quad (2.19)$$

A は定数である. 式(2.19)を T と Z について解く.

$$T = C_1 e^{-A^2 t} \quad (2.20)$$

$$Z = e^{\frac{V}{2D}z} \left(C_2 \sin \frac{\sqrt{4DA^2 - V^2}}{2D} z + C_3 \cos \frac{\sqrt{4DA^2 - V^2}}{2D} z \right) \quad (2.21)$$

C_1, C_2, C_3 は定数である. 式(2.18)から u は次式となる.

$$u = e^{-A^2 t + \frac{V}{2D}z} \left(C_4 \sin \frac{\sqrt{4DA^2 - V^2}}{2D} z + C_5 \cos \frac{\sqrt{4DA^2 - V^2}}{2D} z \right) \quad (2.22)$$

C_4, C_5 は定数である. 式(2.16)から,

$$C_5 = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\sqrt{4DA^2 - V^2}}{2D} = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.24)$$

となる. また, 式(2.24)から

$$A^2 = D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{V^2}{4D} \quad (2.25)$$

である. 以上から次式が得られる.

$$u = I e^{-\left\{D \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{V^2}{4D}\right\}t + \frac{V}{2D}z} \sin \frac{n\pi}{L} z \quad (2.26)$$

ただし，定数 $C_4 = I$ と置き換えた．また，より一般的には重ね合わせの原理から

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{-\left\{D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{V^2}{4D}\right\}t + \frac{V}{2D}z} \sin \frac{n\pi}{L} z \quad (2.27)$$

と書ける．式(2.27)もまた式(2.15), (2.16)を満たす解である．このように変形することによって，フーリエ級数展開を用いて I_n を決定することで初期条件を満たす解が得られる．式(2.17)より，

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{\frac{V}{2D}z} \sin \frac{n\pi}{L} z = f(z) - \frac{a-b}{1-e^{\frac{V}{D}L}} e^{\frac{V}{D}z} - \frac{b-ae^{\frac{V}{D}L}}{1-e^{\frac{V}{D}L}} \quad (2.28)$$

両辺に $\frac{\sin \frac{n\pi}{L} z}{e^{\frac{V}{2D}z}}$ をかけて z で 0 から L まで積分すると直交関数系の性質から，

$$I_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left(f(z) - \frac{a-b}{1-e^{\frac{V}{D}L}} e^{\frac{V}{D}z} - \frac{b-ae^{\frac{V}{D}L}}{1-e^{\frac{V}{D}L}} \right) e^{-\frac{V}{2D}z} \sin \frac{n\pi}{L} z dz \quad (2.29)$$

と初期条件を満たす I_n を求められる．以上から最終的に S は次式となる．

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{-\left\{D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{V^2}{4D}\right\}t + \frac{V}{2D}z} \sin \frac{n\pi}{L} z + \frac{a-b}{1-e^{\frac{V}{D}L}} e^{\frac{V}{D}z} + \frac{b-ae^{\frac{V}{D}L}}{1-e^{\frac{V}{D}L}} \quad (2.30)$$

また，式(2.1), (2.4), (2.5)より任意の深さの流量は

$$q = -\frac{k_s}{\alpha} \frac{\partial S}{\partial z} + k_s S \quad (2.31)$$

であり，式(2.30)から

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{-\left\{D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{V^2}{4D}\right\}t + \frac{V}{2D}z} \left(\frac{V}{2D} \sin \frac{n\pi}{L} z + \frac{n\pi}{L} \cos \frac{n\pi}{L} z \right) + \frac{V}{D} \frac{a-b}{1-e^{\frac{V}{D}L}} e^{\frac{V}{D}z} \quad (2.32)$$

であるので，

$$q = k_s \sum_{n=1}^{\infty} I_n e^{-\left\{D\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{V^2}{4D}\right\}t + \frac{V}{2D}z} \left(\sin \frac{n\pi}{L} z - \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{L} z - \frac{n\pi}{\alpha L} \cos \frac{n\pi}{L} z \right) + k_s \frac{b-ae^{\frac{V}{D}L}}{1-e^{\frac{V}{D}L}} \quad (2.33)$$

となる($\frac{V}{D} = \alpha$ であることに注意する)．

2.3 解析解を用いた不飽和浸透計算

得られた解析解が正しいことを確認するために、式(2.6)を数値的に解いた結果と解析解から得られる結果を比較する。離散化は有限差分法を用い、時間発展は陽解法を用いて計算した。土壌パラメータについては、鉛直 1 次元の Richards 式を解いて不飽和浸透を解析するソフトウェアである Hydrus-1D⁸⁾における loam のパラメータを参考にして表 2.1 のように設定した。また、 $L = 1$ [m]とした。

Case1 として境界条件と初期条件に $a = 1, b = 0, f(z) = 0$ を与え、土壌への飽和帯の浸潤を想定した計算を行う。図 2.2 に上記の条件での計算結果を示す。飽和した上端から雨水が下方へと浸透していく様子が見て取れる。また、実線が解析解で丸が数値解の計算結果であり、双方が一致していることから、解析解の導出に誤りがなかったこと確認できる。図 2.3 に上端と下端における流量変化を示す。上端の流量について、はじめは乾燥した初期分布に飽和境界条件を与えたことにより水分量の勾配が非常に大きくなり流量も大きくなる、徐々に下方への浸透が進むと水分量の勾配が緩やかになり流量が低減していく。下端の流量については、はじめは浸透が到達していないため変化がなく、浸透が到達すると徐々に流量が増加する。上端・下端ともに十分な時間が経過すると流量が等しくなり、定常状態に達する。この場合には下端の境界が乾燥に固定されているため、層全体が完全に飽和することはなく定常状態では飽和透水係数とは異なる値に収束する。

Case2 として境界条件に $a = 1, b = 1$ を与え、下端に地下水面がある場合の不飽和浸透計算を行う。初期条件については、 $a = 0, b = 1$ の場合の U を与える。 U は式(2.12)の解であり、ある境界条件における定常状態の分布を表す。この場合は、上端が乾燥しているときに地下水面から上方に吸い上げられた水分量の分布を表している。図 2.4 に上記の条件の下での計算結果を示す。 $t = 180,360$ [sec]の上端近辺においては、地下水面の存在とそれに伴う初期条件の影響が小さいため、Case1 と似た分布を示している。一方で、それ以外では異なる分布を示している。特に地下水面の影響が大きい下部では Case1 よりも水分量が大きくなる。図 2.5 に上端と下端における流量変化を示す。上端・下端ともに変化の形は Case1 と同様であり、絶対量が異なる。下端の流量が負から始まっているのは、 $a = 0, b = 1$ として地下水面の吸い上げを考えた場合に、定常状態で蒸発のような上向きフラックスが発生していることを表している。また、Case2 では十分に時間が経過した場合に層全体が完全に飽和するので、上端と下端の流量は十分に時間がたつと飽和透水係数に収束する。

表 2.1 計算に用いた土壌パラメータ。

k_s [m/sec]	θ_s	θ_r	α [1/m]
3.7×10^{-6}	0.46	0.027	0.58

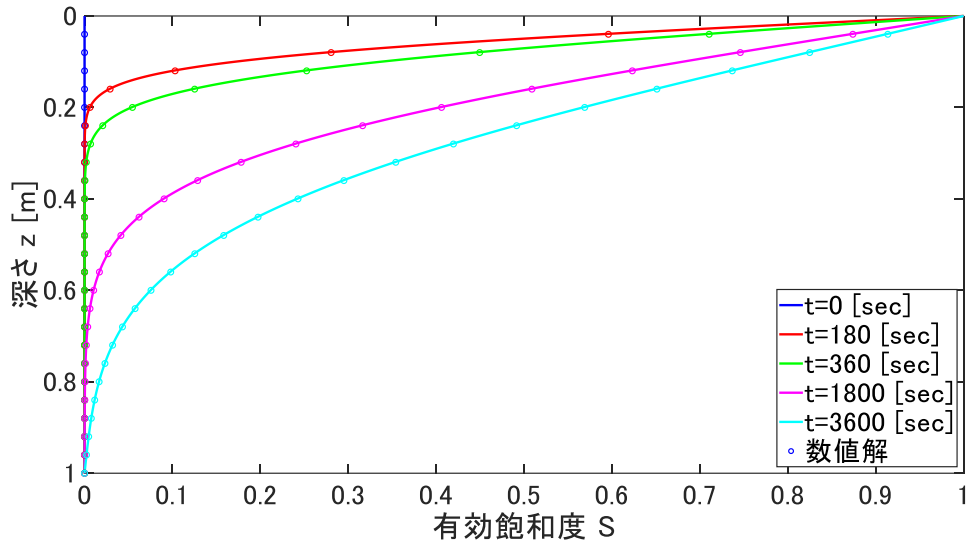


図 2.2 Case1 の飽和した上端からの不飽和浸透.

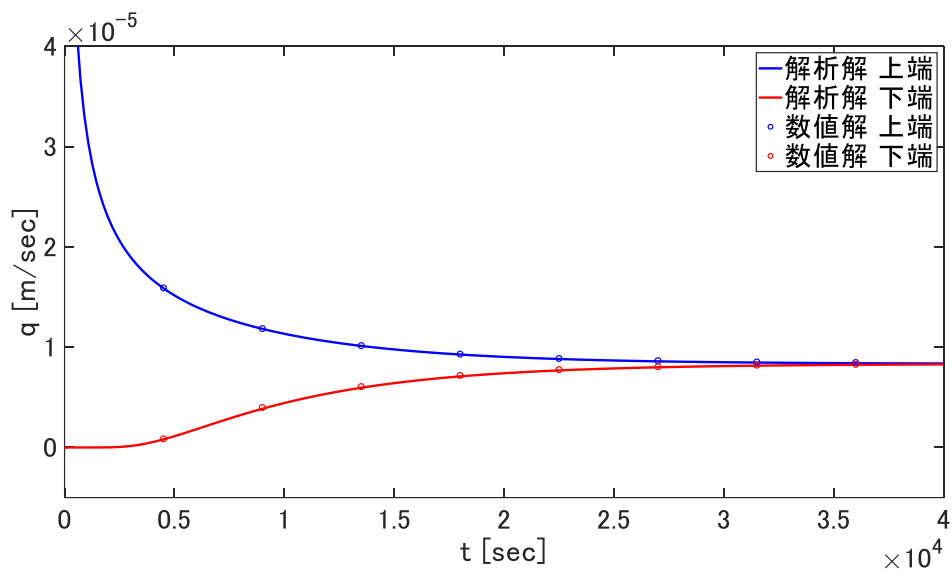


図 2.3 Case1 における上端および下端の流量変化.

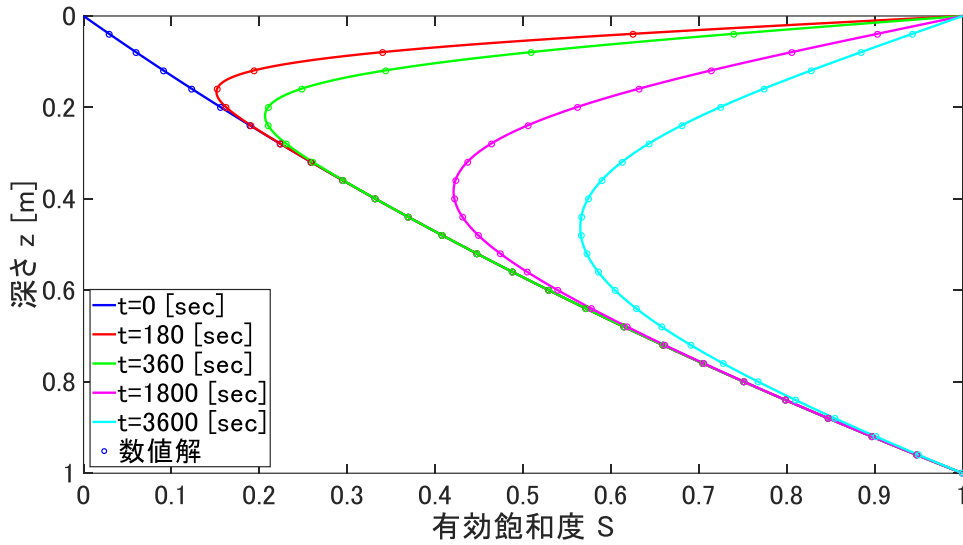


図 2.4 Case2 の地下水面がある場合の不飽和浸透.

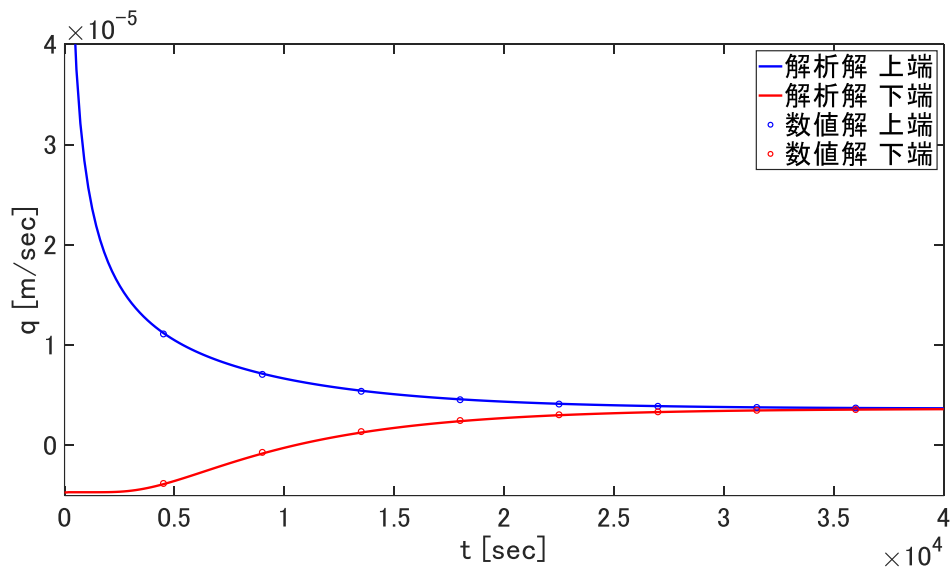


図 2.5 Case2 における上端および下端の流量変化.

2.4 上部境界条件が時間的に変化する際の疑似的な不飽和浸透計算

前節の Case2 では下部境界と上部境界の両方が飽和している場合の不飽和浸透を計算した。一方で、現実の基岩の状態を考えると、基岩上に中間流が発生している場合には上端に飽和境界を適用できる。しかし、中間流が発生するまでと消失した後においては、上端の水分量は飽和よりも小さくなる。このような場合に不飽和浸透の挙動がどうなるのかを分析する。ただし、本章で導出した解析解では時間的に変化する水分量を設定できないため、次のような手順を用いて疑似的に計算する。まず、上部境界に適用する仮想的な時系列水分量

データを作成する。ある時間ステップの間で時系列データの値を上部境界に適用し、解析解を用いた計算を行う。次の時間ステップでは時系列データから上部境界の水分量を更新し、初期条件として前の時間ステップにおける最終的な水分量分布を初期分布として計算する。この手順を繰り返すことで不飽和浸透の時間発展を疑似的に追跡する。

上部境界に適用する仮想的な時系列水分量データを図 2.6 に示す。時間ステップ $\Delta t = 1800$ [sec] であり、 $S = 0 \sim 1$ まで 0.1 ずつ増加して $t = 19800$ [sec] で飽和に達した後は、同様に 0.1 ずつ減少していく。このような時系列データを上部境界に適用したときの解析解を用いた不飽和浸透の計算を図 2.7、図 2.8 に示す。図 2.7 については、図 2.4 で示したような上部境界が瞬間的に飽和になるような計算の場合に比べて、上部境界付近で緩やかに水分量が増加している。また、図 2.8 については、中間流が消失した際に上部境界が乾燥していく過程で再配分される水分量の変化を表現できている。図 2.9 に上端と下端における流量変化を示す。上端の流量は、前節の Case2 と同様に上向きの負の流量から始まり、境界の水分量が飽和に達する $t = 19800$ [sec] まで徐々に増加し、境界の水分量が低下する $t = 19800$ [sec] より後では徐々に低下する。流量が低下する際、境界の水分量が急激に乾燥するため、途中まで下方へと浸透していた雨水の一部が再配分で上方へと流れを変えて、流量が最終的な定常状態の流量より小さい負の値をとる。境界の値が 0 となる $t = 37800$ [sec] 以降は再配分される上方への流量が低下するため、 $a = 0, b = 1$ の場合の定常状態へと収束している。一方で、下端の流量については、上方からの浸透が到達してから徐々に増加し、上端の流量のピークよりも遅れてピークへと達する。また、不飽和浸透過程を経た結果、流量の波形も上端に比べてより緩やかなものになっている。

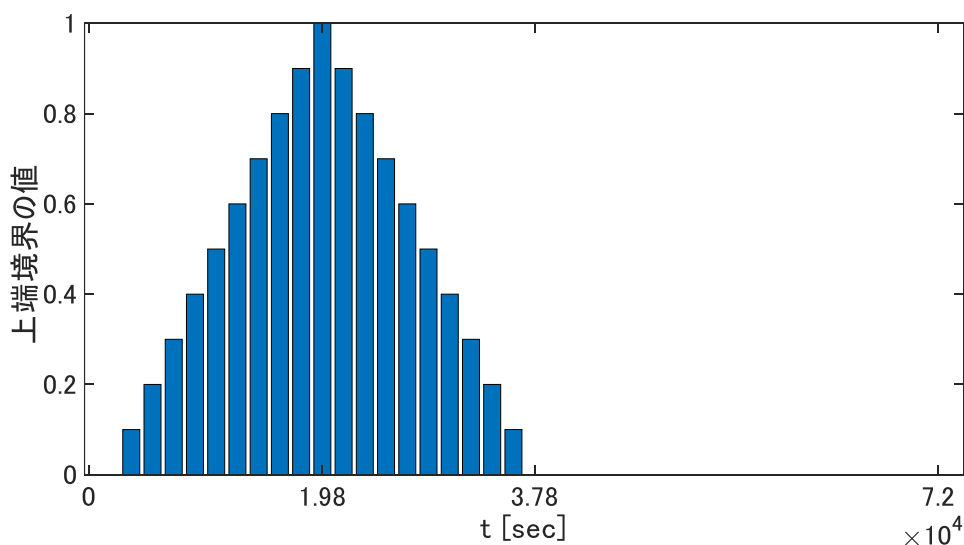


図 2.6 上部境界に適用する仮想的な時系列水分量データ。

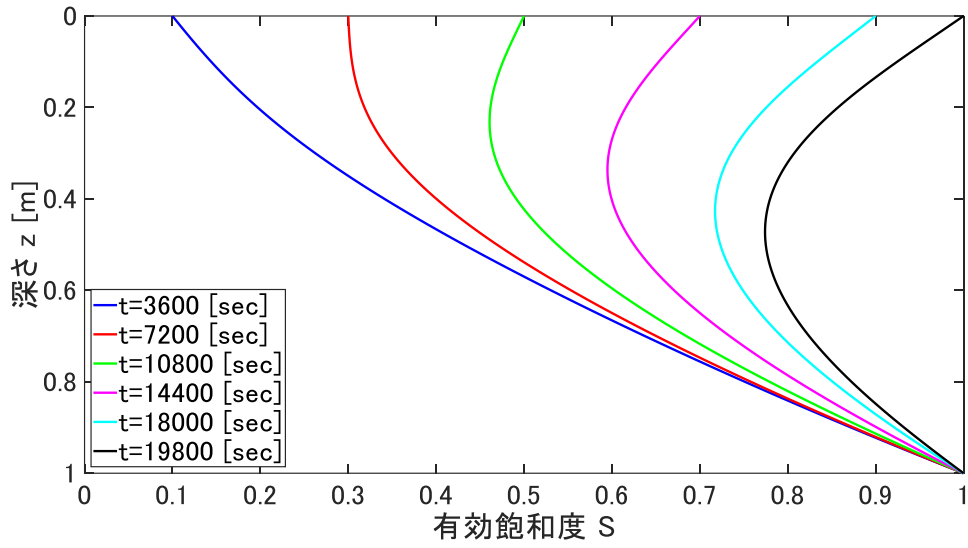


図 2.7 上部境界に時系列データを適用した水分量変化($t = 3600 \sim 19800$ [sec]).

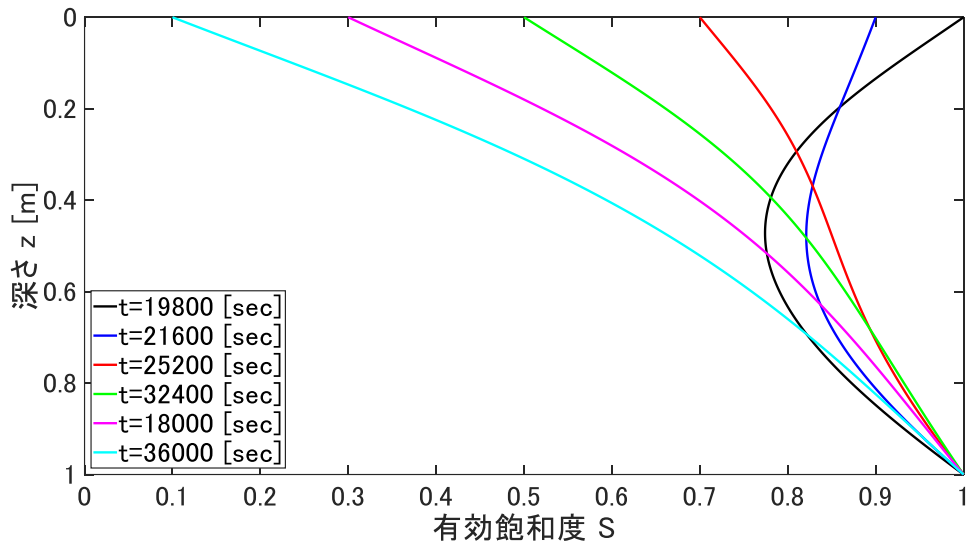


図 2.8 上部境界に時系列データを適用した水分量変化($t = 19800 \sim 36000$ [sec]).

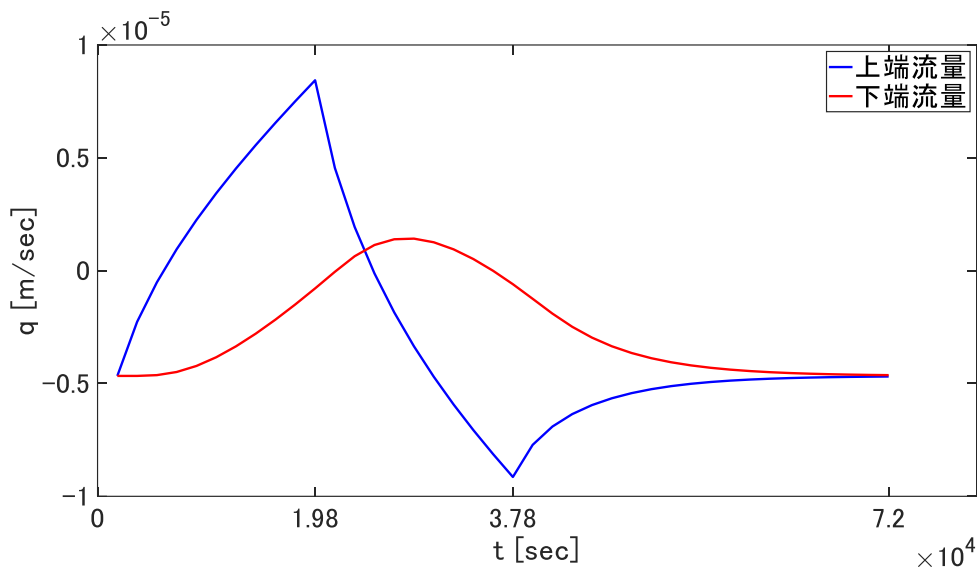


図 2.9. 上部境界に時系列データを適用した場合の上端と下端における流量変化。

2.5 まとめ

本章では、地下水面を有する基岩層における不飽和浸透を想定して、線形化した Richards 式から、任意の水分量境界条件と任意の初期分布という条件の下での解析解を導出した。導出の際には、境界条件をより簡単な形で書けるような変数変換を行ったのち、変数分離法で解析解を導出した。また、導出した解析解から任意の深さでの流量を解析的に求めた。得られた解析解を用いて、地下水面がある場合とない場合の不飽和浸透の計算を行った。その結果、地下水面がある場合は、ない場合に比べてより湿潤な状態になりやすいことが分かった。上端と下端の流量の波形はどちらの場合でも似ていたが、その絶対量は異なっていた。また、基岩上の中間流の発生や消失に対応できるように、水分量の時系列データを上部境界へと適用して計算する方法を提案し、仮想的な時系列水分量データを用いて計算を行った。その結果、中間流の発生や消失に伴う、緩やかな水分量変化や浸透した雨水の再配分といったより現実的な挙動を表現できることがわかった。

参考文献

- 1) Kosugi, K. I., Fujimoto, M., Katsura, S. Y., Kato, H., Sando, Y., & Mizuyama, T. (2011). Localized bedrock aquifer distribution explains discharge from a headwater catchment. *Water Resources Research*, 47(7).
- 2) 佐山敬洋, 小杉賢一朗, 岩見洋一. (2015). 山体地下水の流動を表現する分布型降雨流出モデルの開発. 土木学会論文集 B1 (水工学), 71(4), I_331-I_336.
- 3) Katsura, S. Y., Kosugi, K. I., Yamamoto, N., & Mizuyama, T. (2006). Saturated and unsaturated hydraulic conductivities and water retention characteristics of weathered granitic bedrock. *Vadose*

Zone Journal, 5(1), 35-47.

4) 菅原快斗, 佐山敬洋, 寶馨. (2018). 地下水面を有する土壌におけるリチャーズ式の解析解. *水工学論文集*, 62, 1-6.

5) Richards, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1(5), 318-333.

6) Gardner, W. R. (1958). Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil science*, 85(4), 228-232.

7) Tracy, F. T. (2011). Analytical and numerical solutions of Richards' equation with discussions on relative hydraulic conductivity. In *Hydraulic Conductivity-Issues, Determination and Applications*. IntechOpen.

8) Simunek, J., Van Genuchten, M. T., & Sejna, M. (2005). The HYDRUS-1D software package for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media. *University of California-Riverside Research Reports*, 3, 1-240.

3 章 分布型モデルへの適用を目的とした鉛直浸透流の観測と Richards 式の解析解による再現計算

3.1 はじめに

我が国の洪水予測を目的とした降雨流出モデルは基岩の不透水性を仮定し、飽和ダルシー則に従う飽和側方流とそれが発達して発生する地表面流を豪雨時の主たる流出成分とみなしてモデル化されることが多かった。しかし、近年の研究から斜面方向のパイプ流と呼ばれる高速な流れの存在が明らかになり、パイプ流の存在によって飽和帯の発達が抑制され土層の不飽和帯が維持されることによって、鉛直方向の不飽和浸透が降雨流出変換の役割を担うことが示されている¹⁾。また、風化花崗岩を有する流域において基岩への浸透が少なからず発生し、豪雨時でも比較的早く流出に寄与するということが明らかになっている²⁾。このような知見から、土層の不飽和浸透や基岩への浸透といった鉛直方向の雨水の流れについても分布型流出モデルへと組み込むことが重要になっている。

しかし、流域を平面 2 次元で離散化する分布型流出モデルにおいて、鉛直方向へも離散化を行うことは計算量の増大につながる。もちろん、流域を 3 次元で離散化し Richards 式を用いて降雨流出を解析する試みもされている³⁾が、複数流域を統合的に計算する分布型流出モデルにおいて同手法の適用は容易ではない。鉛直方向の離散化を行わずに浸透現象をモデル化する方法としては Green-Ampt 式⁴⁾や SCS-CN 法⁵⁾といった解析的手法があげられる。どちらも地表面から土層への浸透量を計算する式であり、Richards 式の解析解から物理的根拠を示すという研究もされている⁶⁾。一方で、このような解析的手法の多くは地表面が飽和しているといった単純な条件に基づいており、日本の森林流域のような降雨のすべてが土層へと浸透するという場合に解析的手法が現実の不飽和浸透を再現し得るのかは明らかでない。このように、分布型流出モデルに鉛直方向の浸透を組み込むにあたっては、実際の鉛直浸透現象の特徴を明らかにし、離散化を必要としない解析的手法でその特徴を再現可能であるかどうかを議論することが不可欠となる。

以上を踏まえて本章では、土層と基岩層の土壌水分量観測を行い、土層と基岩層における浸透現象にどのような特徴があるのかを分析する。また、土層において圧力水頭の観測を行い、得られたデータを用いて圧力拡散方程式の解析解を用いた再現計算を試み、現実の浸透現象への解析的手法の適用性を議論する⁷⁾。

3.2 観測手法

本研究は、滋賀県大津市の桐生水文試験地において土壌水分量と間隙水圧を観測した。試験地は風化花崗岩の表層地質を有し、流域面積は約 6 ha である。また、年平均降水量は約 1600 mm、年平均気温は約 14 °C、夏季に降雨が多く降雪はほとんどない⁸⁾。観測地点は

尾根の近くに位置しており，簡易貫入試験から土層と基岩の境界は 60~70 cm の深さにある。

土壌水分計は Sentek 社の EnviroSCAN を用いた。計測期間は 2017 年 6 月 6 日から 2018 年 11 月 24 日とし，10 分ごとに観測データを得た。センサーによって計測された抵抗値から体積含水率への変換は，マニュアルに示された規定値を用いた。しかし，有機物を多く含む土に規定のパラメータを用いると，体積含水率を過大評価する事例も報告されている⁹⁾。そのため，本研究は波形から示される応答特性に着目することにした。計測深度は，地表面から 30 cm，60 cm の深さの土層，地表面から 90 cm，120 cm，150 cm の深さの風化基岩層とした。また，土壌水分計の観測地点から約 1m 離れた地点においてテンシオメーターを用いて，地表面から 30 cm，60 cm，70 cm の深度で圧力水頭を測定した。なお，圧力水頭計測地点の土層と基岩の境界は地表面から約 70 cm の深さにある。計測期間は 2018 年 3 月 23 日から 2018 年 11 月 24 日までとし，同じく 10 分ごとに観測データを得た。降雨データについては，流域試験地の中心部において，開空状態で計測された結果を用いる。

3.3 解析手法

3.3.1 圧力拡散方程式の解析解とフラックスの導出

本章では観測された圧力水頭の再現計算に圧力拡散方程式の解析解を用いる。同式は降雨の土層への浸透によって生じる地下水位の増加とそれに伴う地滑り発生のメカニズムの理論的な分析に用いられている¹⁰⁾。この解析解は重ね合わせの原理を用いることによって，実際の観測降雨データを直接入力することができるのが特徴である。鉛直 1 次元の圧力拡散方程式は次式となる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

ここで t は時間， z は地表面からの深さ， ψ は圧力水頭， D は拡散係数である。また，圧力水頭の初期分布が一様であるとみなすと，任意の深さにおける流量は次式となる。

$$q = -k_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (3.2)$$

k_z は土層が十分に湿潤であるときの代表的な透水係数である。下方に無限に長い領域を考えると初期条件と下側境界条件は次のように書ける。

$$\psi(z, t = 0) = \psi_0 \quad (3.3)$$

$$\psi(z = \infty, t) = \psi_0 \quad (3.4)$$

ψ_0 は初期の圧力水頭である。森林流域のような透水性の高い土壌において，降った雨のほとんどは土中に浸透する。ここに時間 T の間に降雨強度 I の雨が降り，その後は降雨強度が 0 であったとする。このときの地表面の流量は降雨強度と等しくなる。式(3.2)から上側境界条件が次のように定まる。

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0} \begin{cases} -\frac{I}{k_z} & (0 \leq t \leq T) \\ 0 & (t > T) \end{cases} \quad (3.5)$$

以上の境界・初期条件の下での式(3.1)の解析解は次式となる.

$$\psi = \begin{cases} \psi_0 + \frac{I}{k_z} R(t) & (0 \leq t \leq T) \\ \psi_0 + \frac{I}{k_z} \{R(t) - R(t - \Delta t)\} & (t > T) \end{cases} \quad (3.6)$$

ただし応答関数 $R(t)$ は

$$R(t) = \left(\frac{4Dt}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right) - z \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z^2}{4Dt}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.7)$$

である. また, 式(3.6)と式(3.2)から流量が求まる.

$$q = \begin{cases} I \cdot R_q(t) & (0 \leq t \leq \Delta t) \\ I \{R_q(t) - R_q(t - \Delta t)\} & \end{cases} \quad (3.8)$$

ただし流量の応答関数 R_q は

$$R_f(t) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{z^2}{4Dt}}\right) \quad (3.9)$$

である.

実際に観測される降雨データは式(3.5)のような単一のパルスではなく, 時間ごとに異なる降雨強度の値となる. 式(3.1)は線形の偏微分方程式であり, 各時間ステップの降雨強度に基づく圧力水頭の変化を重ね合わせることで, 時系列降雨データに基づく圧力水頭変化を計算できる. ここに Δt 時間ごとの降雨強度を I_m ($m = 1, 2, \dots$)とする. 時刻 $n\Delta t$ ($n = 1, 2, \dots$)における圧力水頭の変化は次式で計算できる.

$$\psi(z, t = n\Delta t) = \psi_0 + \frac{I_n}{k_z} \cdot R(n\Delta t) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{I_m}{k_z} \left(R((n-m+1)\Delta t) - R((n-m)\Delta t) \right) \quad (3.10)$$

また, 同じく時刻 $n\Delta t$ における流量は

$$q(z, t = n\Delta t) = I_n \cdot R_f(n\Delta t) + \sum_{m=1}^{n-1} I_m \left(R_f((n-m+1)\Delta t) - R_f((n-m)\Delta t) \right) \quad (3.11)$$

となる.

3.3.2 計算条件

観測データを再現し得るパラメータ D と k_z は次のようにして求める. まず, パラメータ D は $0.1 \sim 100$ [cm^2/min]の範囲で, パラメータ k_z は $0.00001 \sim 0.1$ [cm/min]の範囲で対数的に等間隔となるよう100分割したパラメータ群を用意する. 上記の範囲は試行錯誤的に設定した. 用意したパラメータの下で解析解を用いた不飽和浸透計算を行い, その結果と30cm深度の観

測圧力水頭データから Nash-Sutcliffe 指標(以下 Nash 指標と表記)を計算する. そして Nash 指標が最も高いパラメータを最適なパラメータであるとみなす.

3.4 結果

3.4.1 土壌水分量観測の結果

図 3.1 に 2018 年の比較的降雨が多い期間(4 月から 7 月)における土壌水分量の変化を示す (60cm の深度はセンサー不良のため図示しない). また, 図 3.2 に特に降雨が多かったイベント(2018 年 7 月西日本豪雨)における土壌水分量の変化, 図 3.3 に降雨が比較的少なかったイベントにおける土壌水分量の変化を示す. 土壌水分量は非常に高い値を示し, 観測手法で述べたように有機物によって過大評価された可能性がある. 一方で, 降雨に対する応答波形は捉えられている. 観測結果は以下のようにまとめられる.

- ① 図 3.2 より 90 cm, 120 cm, 150 cm の深さで応答に時間遅れがあり, この事例ではそれぞれ 2~3 時間程度を要する.
- ② 図 3.3 より弱い雨に対しては基岩層のセンサーが反応しないことがあり, イベント中に雨水はほとんど基岩へと浸透しない.
- ③ 基岩層 90 cm における水分量の変化は非常に鋭敏であり, 土層 30 cm における変化はそれよりも緩やかである.
- ④ 基岩における時間遅れに対して, 土層 30 cm と基岩 90 cm 間の時間遅れは非常に短い.

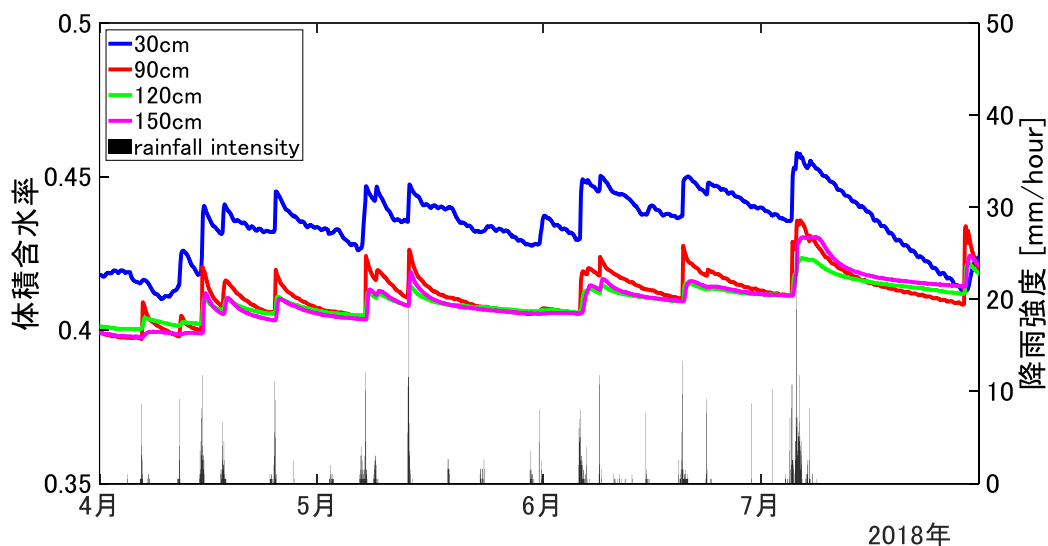


図 3.1 降雨が多い期間の土壌水分量の変化.

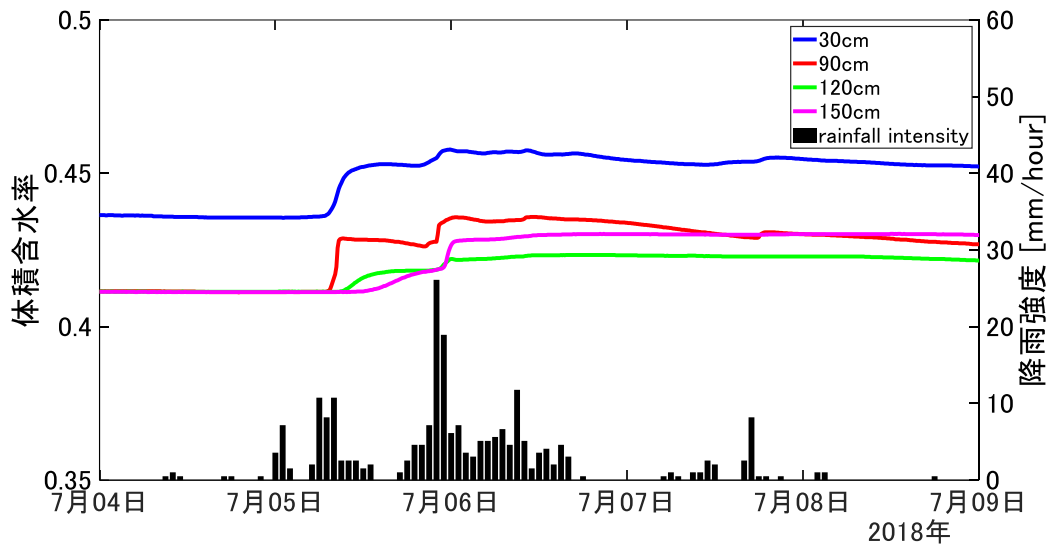


図 3.2 降雨が多い単一イベントにおける土壌水分量の変化.

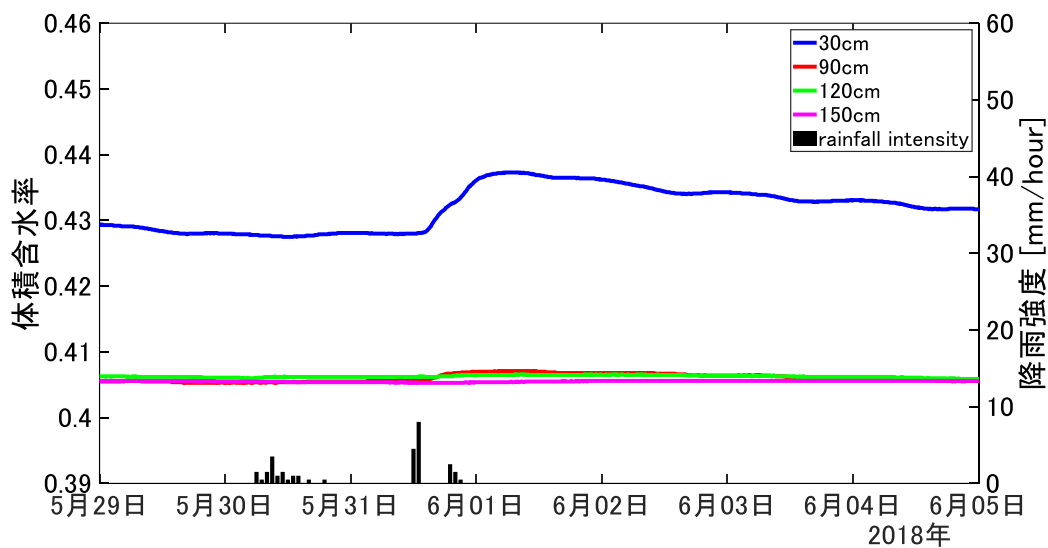


図 3.3 降雨が少ない単一イベントにおける土壌水分量の変化.

3.4.2 圧力水頭観測の結果と観測を再現し得るパラメータ

図 3.4 にテンシオメーターによって計測された深さごとの圧力水頭の変化を示す. ここでは, 30 cm の圧力水頭観測で得られたデータのうち観測開始時から 2018 年 10 月 1 日までの総降雨量 17 mm 以上のイベントを抽出して, 再現計算の対象とした. ただし, 8 月 1 日頃のイベントについては降雨データが得られなかったため除外した. また, 計算に用いる初期圧力水頭 ψ_0 は計算開始時の深さ 30cm の観測値を与えた. 計算条件で示したパラメータ群を用いた計算を行い, イベントごとに Nash 指標が最も高くなったパラメータとそのイベントの総降雨量・初期圧力水頭を表 3.1 に示す. 全 14 イベントのうち 12 イベントで Nash 指標

が 0.7 以上となるパラメータが存在した。この結果から、本章で用いた解析解のように鉛直方向の離散化を必要としない解析手法でも、パラメータによっては現実の鉛直不飽和浸透を再現し得ることが確認できた。

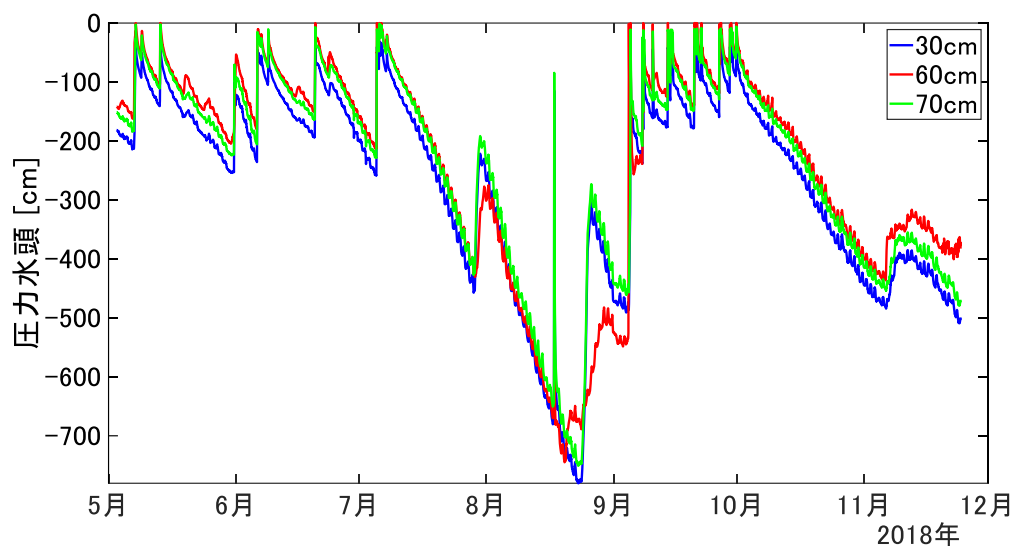


図 3.4 圧力水頭の観測結果.

表 3.1 Nash 指標が最も高くなったパラメータセットと総降雨量および深さ 30cm の初期圧力水頭.

イベント	Nash 指標	D [cm^2/min]	k_z [cm/min]	総降雨量 [mm]	ψ_0 [m]
E1(5/6~5/7)	0.72	0.27	7.7×10^{-5}	59	-214
E2(5/13~5/16)	0.86	10	7.4×10^{-3}	74	-140
E3(5/31~6/1)	0.79	1.6	2.6×10^{-4}	17	-252
E4(6/5~6/6)	0.86	2.3	8.7×10^{-4}	67	-232
E5(6/19~6/21)	0.89	1.7	8.7×10^{-4}	53	-191
E6(7/5~7/8)	-1.9	25	7.4×10^{-3}	215	-259
E7(8/23~8/25)	0.86	0.10	4.0×10^{-5}	85	-775
E8(9/4~9/5)	0.84	0.40	1.0×10^{-4}	53	-482
E9(9/6~9/10)	0.80	14	3.2×10^{-3}	57	-215
E10(9/13~9/15)	0.87	1.3	5.0×10^{-4}	24	-170
E11(9/20~9/21)	0.80	11	2.7×10^{-3}	49	-177
E12(9/26~9/27)	0.80	11	3.2×10^{-3}	44	-151
E13(9/29~9/30)	0.73	71	1.4×10^{-2}	42	-116
E14(9/30~10/1)	0.46	100	5.2×10^{-2}	37	-88

3.5 考察

3.5.1 再現計算の圧力水頭変化とその特徴

解析解を用いた観測圧力水頭の再現計算について各イベントの圧力水頭変化を図示し、その特徴を分析する。

Nash 指標が高くイベント期間全域でおおよそ波形変化を再現できた例として、イベント 2 とイベント 7 の圧力水頭変化を図 3.5 と図 3.6 に示す。イベント 2 は単峰型のイベントであり、ピーク値はほぼ同じで増減の傾向も再現できている。イベント 7 は初期圧力水頭が他のイベントに比べて著しく低く、非常に乾燥した土壌に雨水が浸透するイベントである。イベント 2 では降雨に対して観測圧力水頭が鋭敏に反応しているのに対して、イベント 7 は降雨に対して観測圧力水頭が非常に遅れて緩やかに反応する。イベント 7 で解析解は $D = 0.1 [\text{cm}^2/\text{min}]$ という非常に小さい値を用いることによって、この遅れと緩やかな変化という傾向を再現できている。次に、Nash 指標が高いもののイベントの一部期間で観測圧力水頭変化の特徴を再現できなかった例としてイベント 4 の圧力水頭変化を図 3.7 に示す。イベント 4 において、解析解はピーク値およびピークに達した後の低減を再現できている。一方で降雨の開始時からピークに至るまでは観測の波形を再現できていない。観測が降雨初期には圧力水頭が増加せずある時刻から急激に増加するのに対して、解析解は降雨初期から徐々に圧力水頭が増加してピークへと達している。これはイベント 4 がイベント 2 に比べて、初期圧力水頭が小さく乾燥しており、降雨も弱い雨が長く降り続くものであることが理由として考えられる。イベント初期に限定すればイベント 7 のように D を小さくにとって圧力水頭の増加を遅らせることができるものの、その場合にはピーク後の観測圧力水頭変化を再現することができなくなる。物理的には土壌水分量が高いほど拡散係数が大きくなるため、土壌水分量に応じて計算を更新するといった工夫が必要になる。

Nash 指標が 0.7 未満であるイベント 6 とイベント 14 の圧力水頭変化を図 3.8 と図 3.9 に示す。イベント 6 は複峰型のイベントであり、イベント初期の降雨によって圧力水頭が急激に上昇した後も繰り返し強い降雨が発生している。このような波形を再現できていないのは、イベント 4 と同様に現実の拡散係数の変動が大きく、拡散係数を一定とした解析解では表現しきれないのが原因と考えられる。イベント 14 は初期圧力水頭が最も高く $D = 100 [\text{cm}^2/\text{min}]$ が最適なパラメータとして選ばれている。土壌が湿潤なほど拡散係数は大きくなると考えられるので、パラメータの分布範囲外であるより大きな拡散係数を用いることによって再現性が向上する可能性がある。

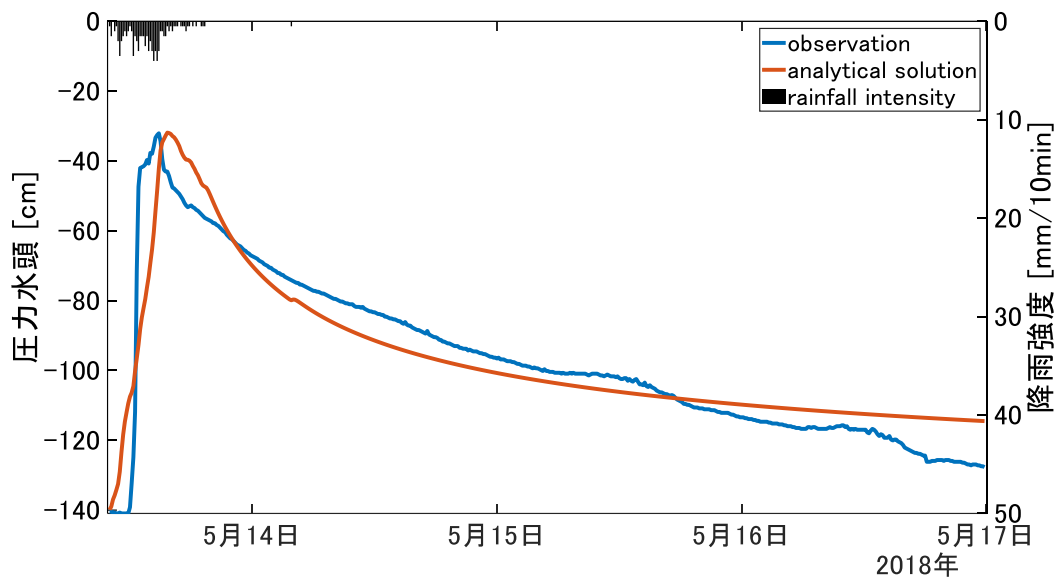


図 3.5 イベント 2 の再現計算の結果.

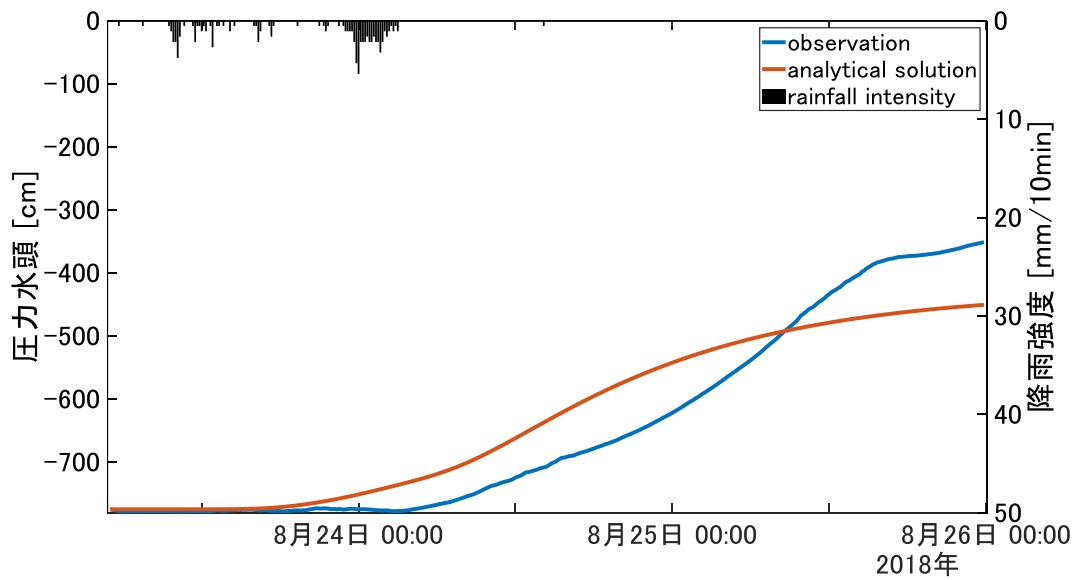


図 3.6 イベント 7 の再現計算の結果.

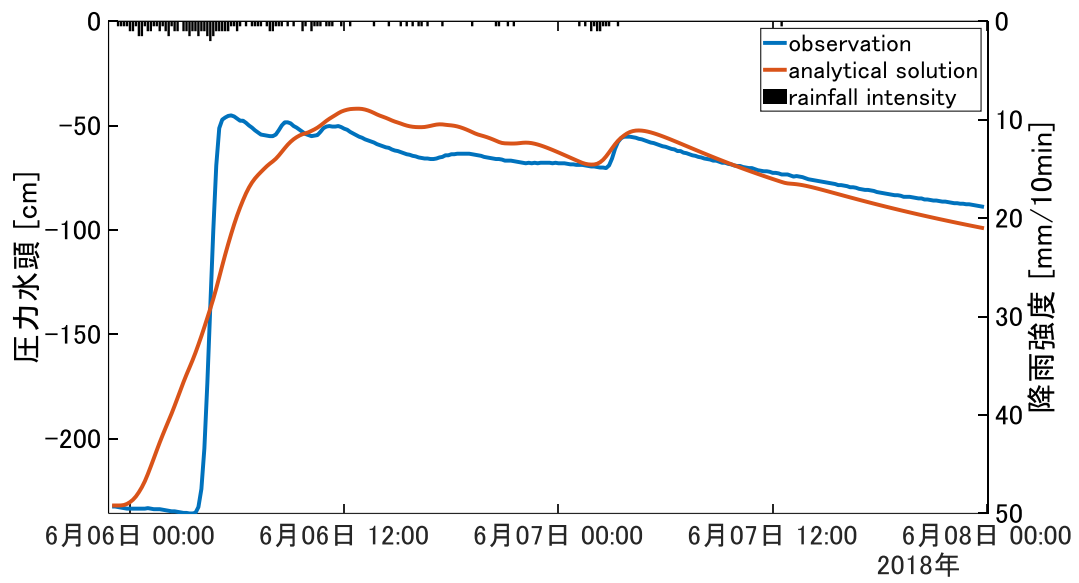


図 3.7 イベント 4 の再現計算の結果.

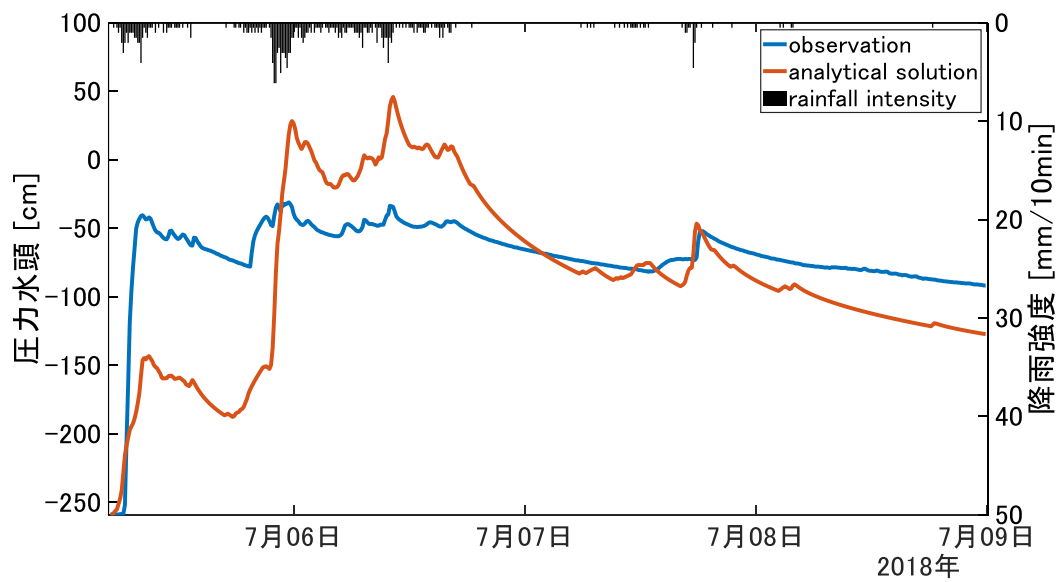


図 3.8 イベント 6 の再現計算の結果.

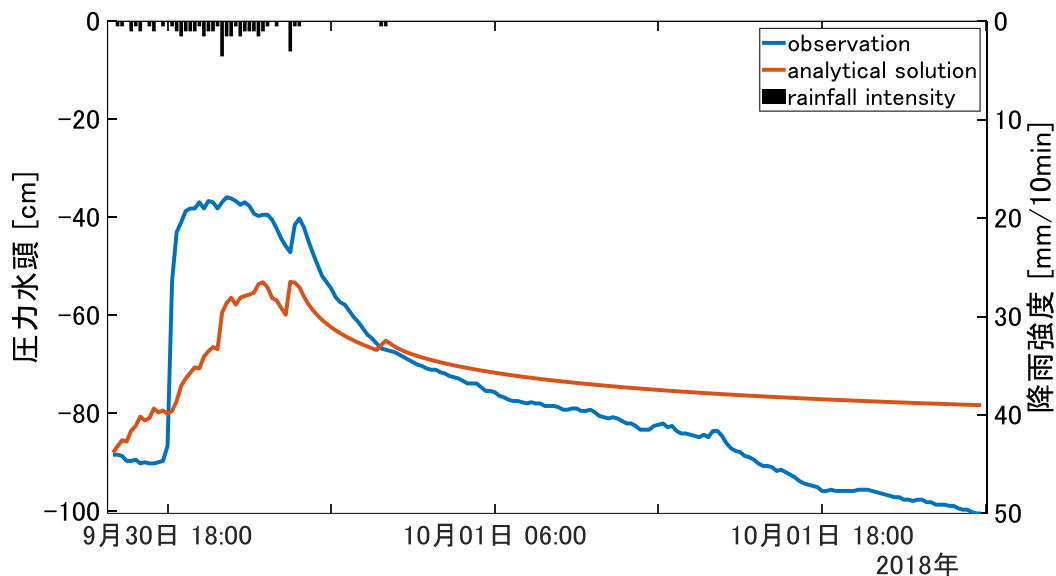


図 3.9 イベント 14 の再現計算の結果.

3.5.2 フラックスの計算と拡散係数・深さの影響

流出モデルの構築にあたっては、土層の鉛直不飽和浸透によって降雨がどのように変換されたうえで側方流へと供給されるのかが重要になる。そこで、深さ 30cm の観測圧力水頭が単峰型で単純なイベント 2 を対象として、式(3.11)を用いて深さ 30cm の流量変化を計算し、土層の鉛直不飽和浸透によってどのような降雨変換がなされるかを分析する。図 3.10 に複数の拡散係数 D の下で計算されたイベント 2 の深さ 30cm における流量変化を示す。 $D = 10$ [cm^2/min]が図 3.5 に示した圧力水頭変化の計算に用いたパラメータと同一のものである。土壌が湿潤なほど拡散係数は大きく、降雨は速やかに下方へと伝わる。 $D = 100$, 50 [cm^2/min]といった高い拡散係数の下では深さ 30cm でも降雨波形はほぼ崩れることなく伝わっており、降雨の細かい増減に対応して流量も増減する。 $D = 10$, 5 [cm^2/min]では降雨波形の細かい増減がならされ、流量は単峰型の単純な変化を示すようになる。 $D = 1$, 0.5 [cm^2/min]になると降雨に対して遅れたうえで、イベント期間を超えて非常に緩やかに流出する。拡散係数の値によってピーク流量がどのように変化するかを図 3.11 に示す。横軸は拡散係数 D の常用対数をとったものである。図 3.11 を見ると拡散係数が大きくなるほどピーク流量が大きくなることがわかる。イベント 2 における降雨のピークは 0.04 [cm/min]であるので、 $D \geq 10^5$ では降雨のピーク値と解析のピーク値がほぼ同じとなることがわかる。一方、 $D \leq 10^{-2}$ ではピーク値がほぼ 0 となり、極端に降雨がならされる。拡散係数の値によって降雨と解析のピーク時刻がどれくらい遅れるのかを図 3.12, 図 3.13 に示す。 $D \geq 10^{1.5}$ では遅れ時間が 0 であり、降雨と解析の両方が同じ時刻にピークを示す。 $10^1 \leq D \leq 10^{1.5}$ においては遅れ時間は 10 分であり、1 タイムステップだけピークが遅れる。 $D \leq$

10^1 からは指数関数的に遅れ時間が増加していく。

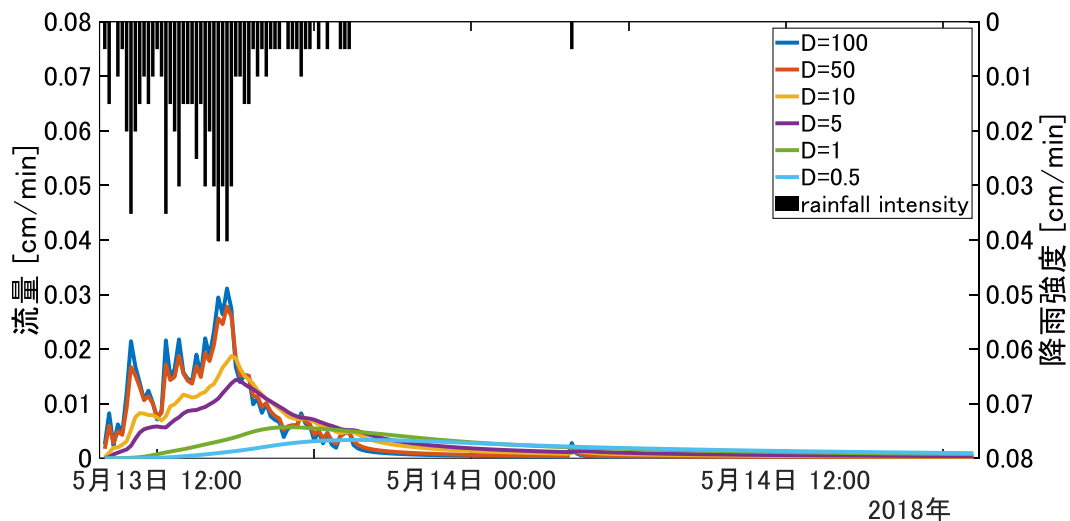


図 3.10 複数の拡散係数の下で計算されたイベント 2 の深さ 30cm の流量変化。

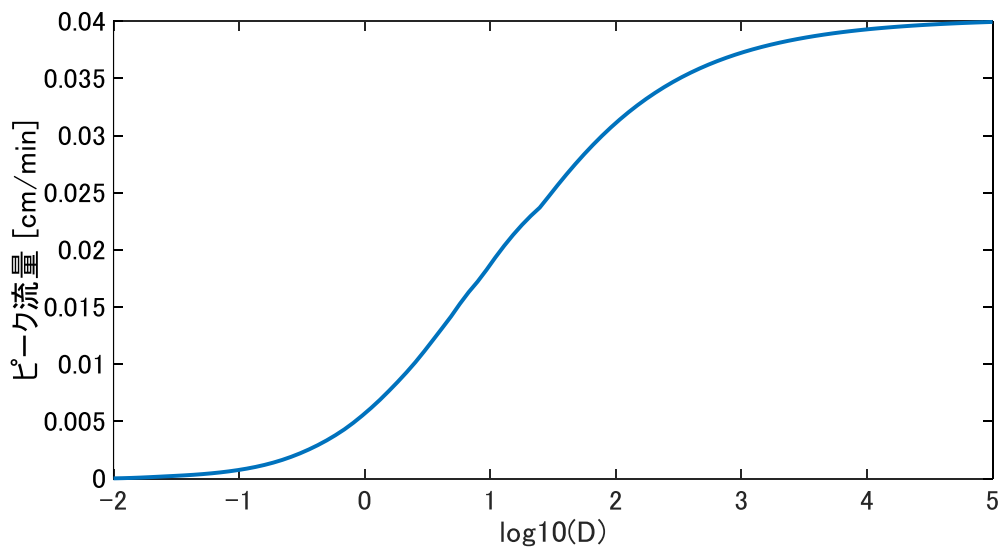


図 3.11 拡散係数とピーク流量の関係。

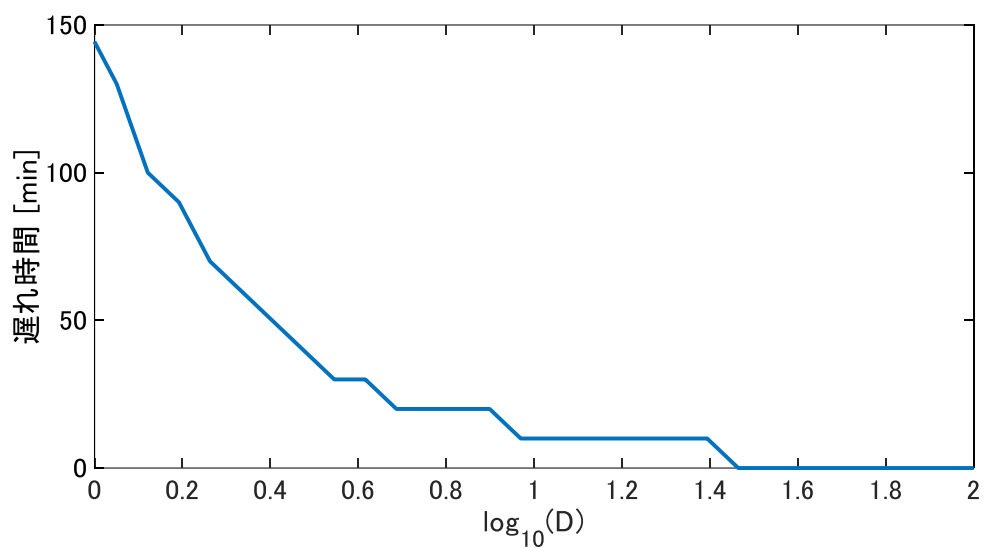


図 3.12 拡散係数とピークの遅れ時間の関係($D \geq 10^0$).

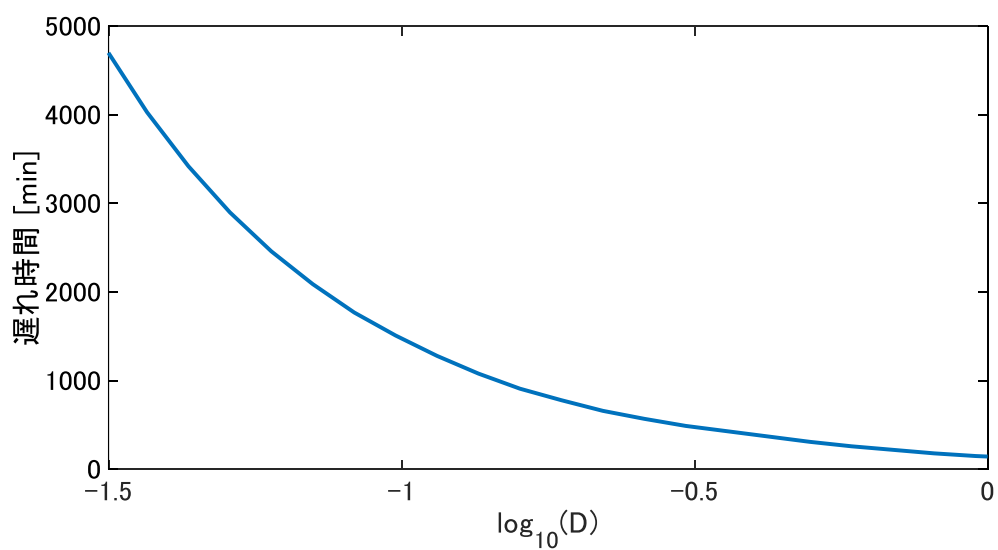


図 3.13 拡散係数とピークの遅れ時間の関係($D \leq 10^0$).

ここまでは深さ 30cm における流量変化に着目してきたが、実際の土壌では土層厚は一定ではなく地点によって鉛直不飽和浸透の浸透距離は異なる。そこで、深さによって鉛直不飽和浸透の降雨流出変換がどのように変化するのかを分析する。図 3.14 に解析解を用いて計算された各深さにおける流量変化を示す($D = 10$ [cm²/min])。図 3.10 の拡散係数による流量変化の違いと同様に、深さによって降雨波形がどの程度ならされるのかが異なっている。深さ 5cm では降雨とほぼ同じ増減の仕方をしているが、深くなるにつれ流量変化はならされていき、深さ 100cm にもなると非常に緩やかな流量変化を示す。図 3.15 に深さによってピーク流量がどの程度低減するのかを示す($D = 1, 10, 100$ [cm²/min])。深くなるにつれてピーク流量は低減し、低減の大きさは拡散係数 D によって大きく異なる。 $D = 1, 10$ [cm²/min] では地表面から深くなるにつれてその差は大きくなっていくが、途中から低減が小さくなるにつれその差は小さくなっていく。 $D = 100$ [cm²/min] は低減があまり小さくならないため、 $D = 1, 10$ [cm²/min] との差は $z = 100$ [cm] でも大きい。図 3.16 に深さごとのピーク遅れ時間を示す($D = 1, 10, 100$ [cm²/min])。拡散係数 D によってピーク遅れ時間が上昇し始める時間は異なっており、その後の遅れ時間の増加の仕方も異なっている。

以上をまとめると、拡散係数 D と深さ z はともに流量変化へ大きな影響を及ぼす。拡散係数が小さく、深さが大きいほど降雨波形はならされ緩やかな流量変化を示す。深さ 30cm において、ピーク流量の変動が大きくなるのはおおよそ $10^{-1} \leq D \leq 10^3$ の範囲であり、それ以外の範囲ではピーク流量の変動は小さい。また、拡散係数 D によって深さによるピーク流量の低減の仕方は異なっている。

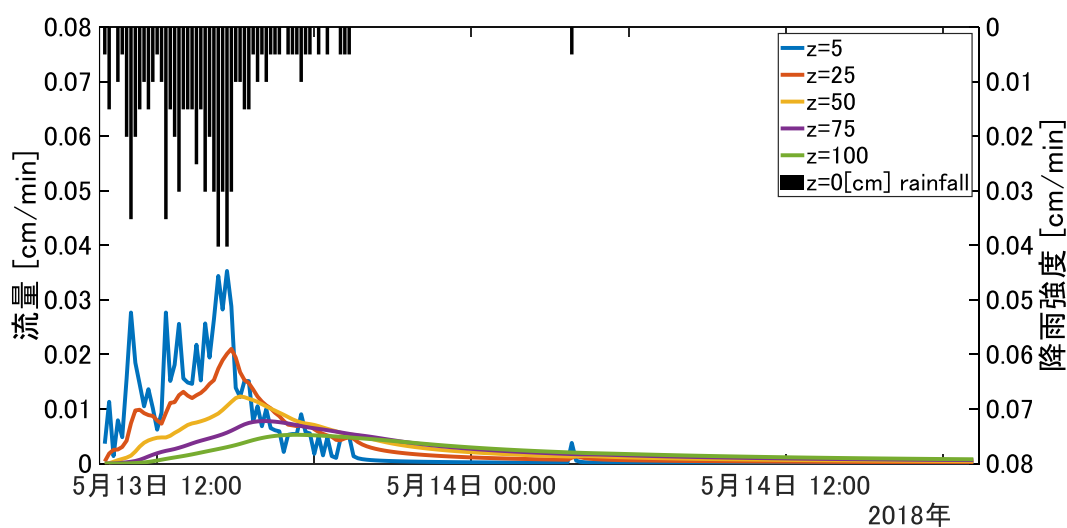


図 3.14 解析解を用いて計算された各深さにおける流量変化($D = 10$ [cm²/min])。

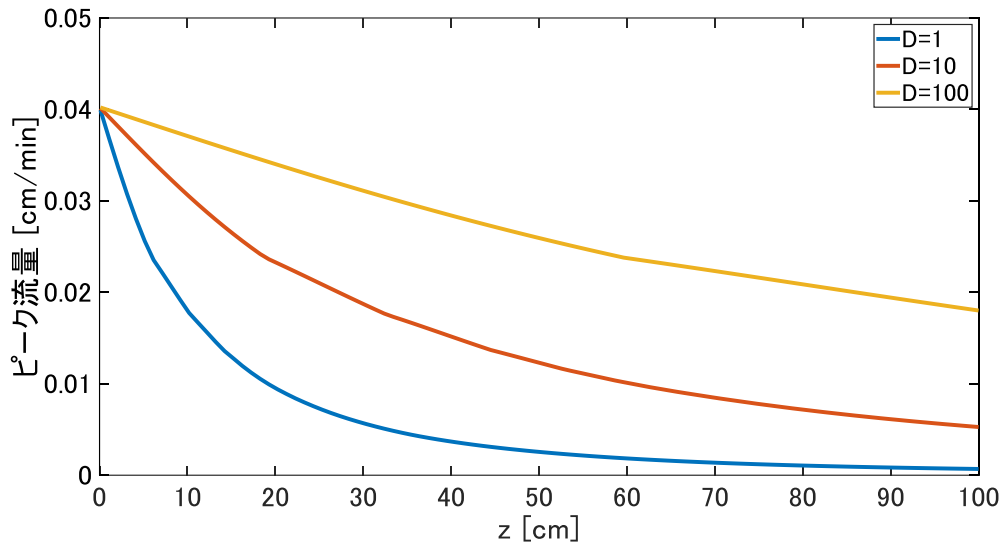


図 3.15 各深さにおけるピーク流量の変化.

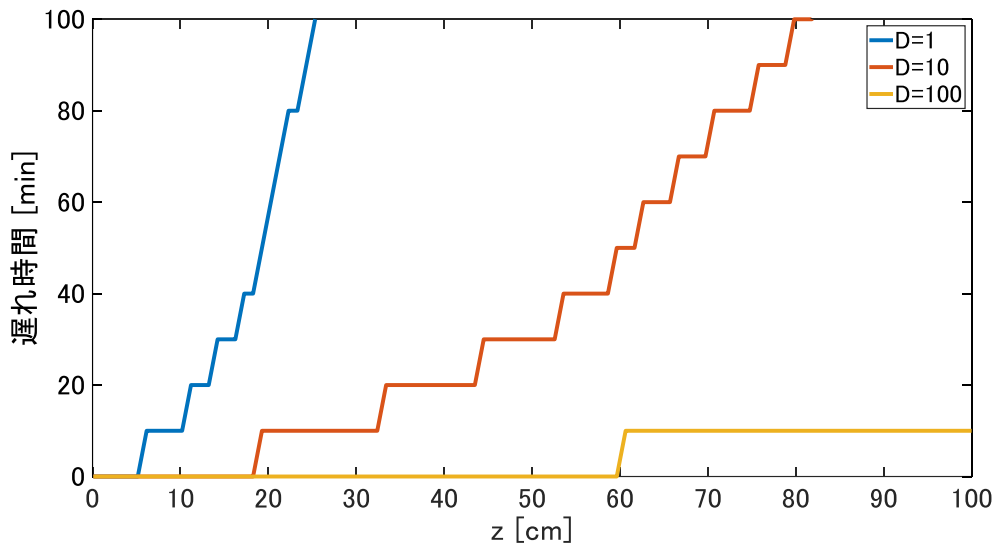


図 3.16 各深さにおけるピーク遅れ時間の変化.

3.5 まとめ

本章では、鉛直不飽和浸透の特徴を把握するため、滋賀県大津市の桐生水文試験地において土層と風化基岩層の土壌水分量観測を行った。観測の結果、現場の鉛直不飽和浸透に関して以下の知見を得た。

- ・ 90 cm, 120 cm, 150 cm の深さでは同程度の時間的な遅れが見られる。
- ・ 基岩層 90 cm における水分量の変化は非常に鋭敏であり、土層 30 cm における変化はそれよりも緩やかである。

離散化を必要としない解析的手法で現実の鉛直不飽和浸透を再現可能であるかを分析するために、圧力水頭を観測し、圧力拡散方程式の解析解を用いた再現計算を行った。解析解はいずれかのパラメータを用いることによって、全 14 イベント中 12 イベントで Nash 指標が 0.7 以上となった。一方で、降雨が繰り返し発生するなど現実の拡散係数の変動が大きいイベントにおいては、拡散係数を一定とした解析解では再現が難しいことが分かった。

圧力拡散方程式の解析解から流量を解析的に求め、空間的離散化を行わず降雨流出変換を簡易に計算できるようにした。解析から拡散係数が小さく、深さが大きいほど降雨波形はならされ緩やかな流量変化を示すことが分かった。

参考文献

- 1) 谷誠. (2018). 森林土壌の流出緩和効果に関する研究の展開過程. 水文・水資源学会誌, 31(2), 107-121.
- 2) Kosugi, K. I., Fujimoto, M., Katsura, S. Y., Kato, H., Sando, Y., & Mizuyama, T. (2011). Localized bedrock aquifer distribution explains discharge from a headwater catchment. *Water Resources Research*, 47(7), 1-16.
- 3) 白木克繁. (2000). 簡略化された 3 次元飽和不飽和浸透数値計算による森林山地流域土中水挙動の長期再現計算. 日本林學會誌, 82(4), 364-372.
- 4) Green, W. H., & Ampt, G. A. (1911). Studies on Soil Physics. *The Journal of Agricultural Science*, 4(1), 1-24.
- 5) Soil Conservation Service. (1972). National engineering handbook, section 4, hydrology.
- 6) Hooshyar, M., & Wang, D. (2016). An analytical solution of Richards' equation providing the physical basis of SCS curve number method and its proportionality relationship. *Water Resources Research*, 52(8), 6611-6620.
- 7) 菅原快斗, 佐山敬洋, 寶馨. (2019). 分布型モデルへの適用を目的とした鉛直浸透流の観測とリチャーズ式の解析解による再現計算. 水工学論文集, 64, 1243-1248.
- 8) 京都大学森林水文学研究室: 桐生水文試験地の概要, http://www.blumoon.kais.kyoto-u.ac.jp/kiryu/site_description.html, 閲覧日 2021/11/13.

- 9) 坂井勝, 取出伸夫, 坂本祐樹. (2015). プロファイルプローブ Drill & Drop Probe の埋設方法と簡易補正の検討. 土壌の物理性, 27.
- 10) Iverson, R. M. (2000). Landslide triggering by rain infiltration. *Water resources research*, 36(7), 1897-1910.

4章 重力項を考慮した Richards 式の解析解と既往の解析的手法との対応

4.1 はじめに

前章では時系列降雨データを入力として計算できる圧力拡散方程式の解析解を用いた観測圧力水頭の再現計算を行い、解析解でもパラメータを最適化することによって多くのイベントで良好な結果を得られることが分かった。一方で、最適化の際には多くのパラメータ候補から総当たりに最適パラメータを選択した。分布型流出モデルを適用する流域においては必ずしも観測データが得られるわけではなく、パラメータを最適化ではなく現地土壌の情報等からある程度推定できることが望ましい。また、圧力拡散方程式はダルシー則の圧力項のみを評価しており、重力項については考慮していない。降雨が止んだ後や弱い雨が定常的に続く場合などには重力項が卓越するため、より汎用的な解析を行うには重力項を考慮した解析解が必要になる。

第2章で解析解を導出した重力項を考慮した線形 Richards 式を、前章のように一定流量境界条件の下で解いたものとしては Braester の研究¹⁾があげられる。また、Chen ら²⁾は時間的に変化する関数を境界条件とした場合の解析解を求めている。さらに、Menziari ら³⁾は重ね合わせの原理を用いて、前章と同様に観測降雨データを入力とすることが可能な解析解を示した。これらの研究を踏まえ、本章では重力項を考慮したうえで、観測降雨データを入力とすることが可能な Richards 式の解析解を導出する。また、飽和境界の場合の解析解を導出し、既往の解析的手法との対応を明らかにすることで、既往研究で示されている土壌パラメータを援用できるようにする。

4.2 手法

4.2.1 Richards 式の線形化

鉛直1次元のダルシー則と Richards 式を次に示す。

$$q = -K \frac{\partial \psi}{\partial z} + K \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \psi}{\partial z} - K \right) \quad (4.2)$$

ここで t は時間、 z は上端からの深さ、 q は単位流量、 K は不飽和透水係数、 ψ は圧力水頭、 θ は体積含水率である。水分保持曲線に Gardner モデル⁴⁾を用い、相対透水係数が有効飽和度に等しいと仮定して Richards 式を線形化する。

$$S = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = e^{\alpha \psi} \quad (4.3)$$

$$K = k_s S \quad (4.4)$$

S は有効飽和度であり、 θ_s は飽和体積含水率、 θ_r は残留体積含水率、 α は水分保持曲線の形状を決定するパラメータ、 k_s は飽和透水係数である。式(4.2)、式(4.3)、式(4.4)から線形化した Richards 式が得られる。

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - V \frac{\partial S}{\partial z} \quad (4.5)$$

ただし、

$$D = \frac{k_s}{\alpha(\theta_s - \theta_r)} \quad (4.6)$$

$$V = \frac{k_s}{\theta_s - \theta_r} \quad (4.7)$$

である。また、式(4.3)、式(4.4)を用いたときダルシー則は次のようになる。

$$q = -\frac{k_s}{\alpha} \frac{\partial S}{\partial z} + k_s S \quad (4.8)$$

初期条件と下側境界条件として、初期の土壤水分量が土壤全体で θ_r 、鉛直下方向に半無限に長い土壤を考える。

$$S(z, t = 0) = 0 \quad (4.9)$$

$$\left. \frac{\partial S}{\partial z} \right|_{z=\infty} = 0 \quad (4.10)$$

4.2.2 フラックス境界の解析解

透水性の高い土壤では、降った雨が全て土中へと浸透する。このとき地表面境界ではダルシー則の流量 q と降雨強度 r が等しくなる。時間 Δt の間だけ降雨があった場合、境界条件は次のように書ける。

$$-\frac{k_s}{\alpha} \frac{\partial S}{\partial z} + k_s S \Big|_{z=0} = r \quad (0 < t \leq \Delta t) \quad (4.11)$$

$$-\frac{k_s}{\alpha} \frac{\partial S}{\partial z} + k_s S \Big|_{z=0} = 0 \quad (t > \Delta t) \quad (4.12)$$

式(4.9)~式(4.12)の初期・境界条件の下で式(4.5)を解くと、次の解析解が得られる(解の導出に関しては付録を参照すること)。

$$S = \begin{cases} \frac{r}{k_s} R(z, t) & (0 < t \leq \Delta t) \\ \frac{r}{k_s} (R(z, t) - R(z, t - \Delta t)) & (t > \Delta t) \end{cases} \quad (4.13)$$

応答関数 R は次のようになる。

$$R(z, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + \sqrt{\frac{V^2}{\pi D}} t \exp \left(-\frac{(z - Vt)^2}{4Dt} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{V}{D} z + \frac{V^2}{D} t \right) \exp \left(\frac{V}{D} z \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z + Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad (4.14)$$

ここで得られた解析解は、ある時間ステップのみの降雨を入力としたものである。一方、実際に観測から得られる降雨データは、時間ステップごとに異なる降雨強度となる。式(4.5)は線形偏微分方程式なので重ね合わせの原理を用いることができる。時間ステップごとに降雨強度が異なる時系列降雨データを入力としたときの式(4.5)の解は、各時間ステップの降雨による応答を重ね合わせることで得られる。時間ステップ Δt ごとの降雨データ r_n ($n = 1, 2, \dots$) に対して、時刻 $n\Delta t$ における有効飽和度の変化は次式で与えられる。

$$S(z, t = n\Delta t) = \frac{r_n}{k_s} R(z, \Delta t) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r_i}{k_s} (R(z, (n-i+1)\Delta t) - R(z, (n-i)\Delta t)) \quad (4.15)$$

本研究では、土層を鉛直浸透することで降雨がどのように波形変換されるのかが重要であるので、フラックスを解析的に求める。式(4.13)から

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \begin{cases} \frac{r}{k_s} \frac{\partial R(z, t)}{\partial z} & (0 < t \leq t_0) \\ \frac{r}{k_s} \frac{\partial}{\partial z} (R(z, t) - R(z, t - t_0)) & (t > t_0) \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial R(z, t)}{\partial z} = \frac{V^2}{D} t \frac{\exp \left(-\left(\frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right)^2 \right)}{\sqrt{\pi Dt}} - \frac{V}{D} \left(1 + \frac{V}{2D} z + \frac{V^2}{D} t \right) \exp \left(\frac{V}{D} z \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z + Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad (4.17)$$

である。式(4.13)、式(4.14)、式(4.16)、式(4.17)を式(4.8)に代入してフラックスが次のように求まる。

$$q = \begin{cases} r \cdot R_q(z, t) & (0 < t \leq t_0) \\ r (R_q(z, t) - R_q(z, t - t_0)) & (t > t_0) \end{cases} \quad (4.18)$$

応答関数 R_q は次式となる。

$$R_q(z, t) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + \exp \left(\frac{V}{D} z \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z + Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \quad (4.19)$$

有効飽和度と同様に、時間ステップ Δt ごとの降雨データ r_n ($n = 1, 2, \dots$) に対して、時刻 $n\Delta t$ におけるフラックスの変化は次式となる。

$$q(z, n\Delta t) = r_n R_q(z, \Delta t) + \sum_{i=1}^{n-1} r_i (R_q(z, (n-i+1)\Delta t) - R_q(z, (n-i)\Delta t)) \quad (4.20)$$

この式は降雨が土層を経過しどのような流れになるかを理論的に追跡することが可能である。

4.2.3 飽和境界の解析解

土壌の飽和透水係数が低く降雨強度が飽和透水係数を上回るときには、地表面が飽和する場合がある。この時は前節で示したフラックス境界ではなく、飽和境界の下で導出した解析解を用いる必要がある。地表面が飽和しているとき、境界条件は次のように書ける。

$$S(z = 0, t) = 1 \quad (4.21)$$

式(4.9), 式(4.10), 式(4.21)の初期・境界条件の下で式(4.5)を解くと、次の解析解が得られる。

$$S = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfc} \left(\frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + \exp \left(\frac{V}{D} z \right) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{z + Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) \quad (4.22)$$

地表面が飽和している場合のフラックスを解析的に求める。Sをzで微分したものは次のようになる。

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\exp \left(- \left(\frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right)^2 \right)}{\sqrt{\pi Dt}} + \frac{V}{2D} \exp \left(\frac{V}{D} z \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{z + Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) \quad (4.23)$$

式(4.8)からフラックスが次のように求まる。

$$q = \frac{k_s}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + k_s \frac{\exp \left(- \left(\frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right)^2 \right)}{\alpha \sqrt{\pi Dt}} \quad (4.24)$$

特にz = 0であるときの土壌の浸透能iは

$$i = \frac{k_s}{2} \operatorname{erfc} \left(- \frac{Vt}{2\sqrt{Dt}} \right) + k_s \frac{\exp \left(- \frac{V^2}{4D} t \right)}{\alpha \sqrt{\pi Dt}} \quad (4.25)$$

となる。

4.3 計算条件

前節で示した解析解の挙動を確認するため、土壌水分量とフラックス変化の計算を行う。土壌パラメータについては、Richards 式を数値的に解いて鉛直 1 次元の不飽和浸透を解析するソフトウェアである Hydrus-1D⁵⁾における Loam のパラメータを参考に設定した。ただし、飽和透水係数については、降雨が土壌へとすべて浸透すると仮定したフラックス境界の解析解に適用するには小さい値であったので、より大きい値へと変更した。表 4.1 に設定した土壌パラメータの一覧を示す。フラックス境界の解析解に用いる観測降雨データは、第 3 章で用いた滋賀県桐生水文試験地で観測された総降雨量 215mm のイベントを用いる。

表 4.1 計算に用いるパラメータ

k_s [cm/min]	α [1/cm]	θ_s	θ_r	D [cm ² /min]	V [cm/min]
0.11	0.58	0.46	0.027	0.44	0.25

4.4 結果

4.4.1 フラックス境界の解析解による計算結果

図 4.1 にフラックス境界の解析解を用いて計算した各深さの流量変化を示す. 図中で最も浅い位置にある $z = 10$ [cm] の変化は降雨強度の変化と非常に似ており, 時間的な遅れもほとんどない. 深さが深くなるにつれて流量変化は緩やかに拡散した形になり, 降雨がなだらかな波形へと変換される. また, 第 3 章のように Richards 式の拡散項のみを考えた場合には降雨波形は拡散してなだらかになるだけであるが, 本章のように重力項も考慮した場合には下方へと降雨波形が移動しながら拡散してなだらかになっていく. これにより, 弱雨が続くことによって土壌水分量の空間勾配が小さい場合など, 重力項が卓越する場合の流量変化についても計算を行うことが可能になる. 図 4.2 にフラックス境界の解析解を用いて計算した各時間の土壌水分量を示す. $t = 500$ [min] 時点ではイベント初期の降雨だけが土壌に浸透しているため土層上部のみの水分量が増加している. 流量の場合と同じく, 時間が経つにつれて地表面から浸透した降雨が拡散してなだらかな波形になりながら下方へと伝達している.

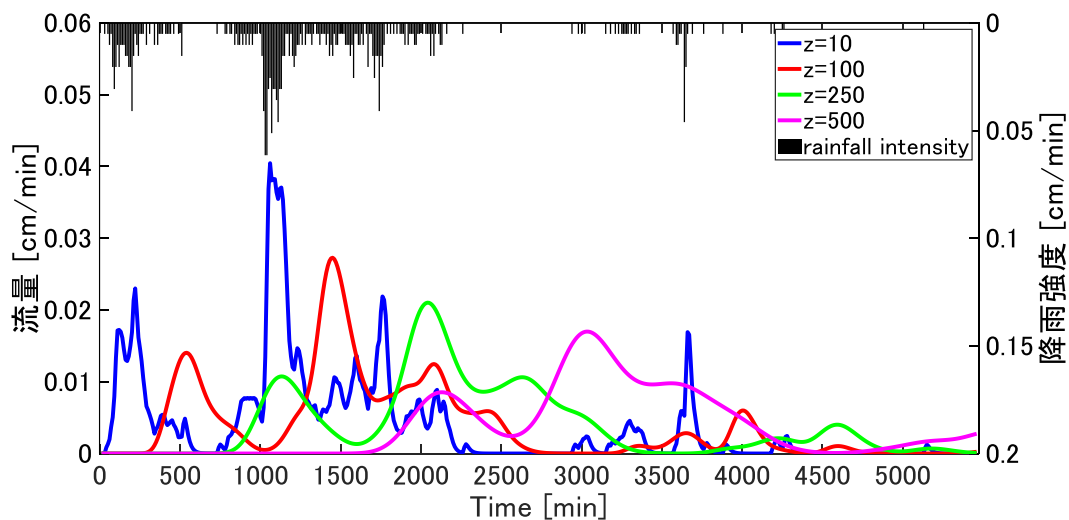


図 4.1 フラックス境界の解析解で計算された各深さの流量変化.

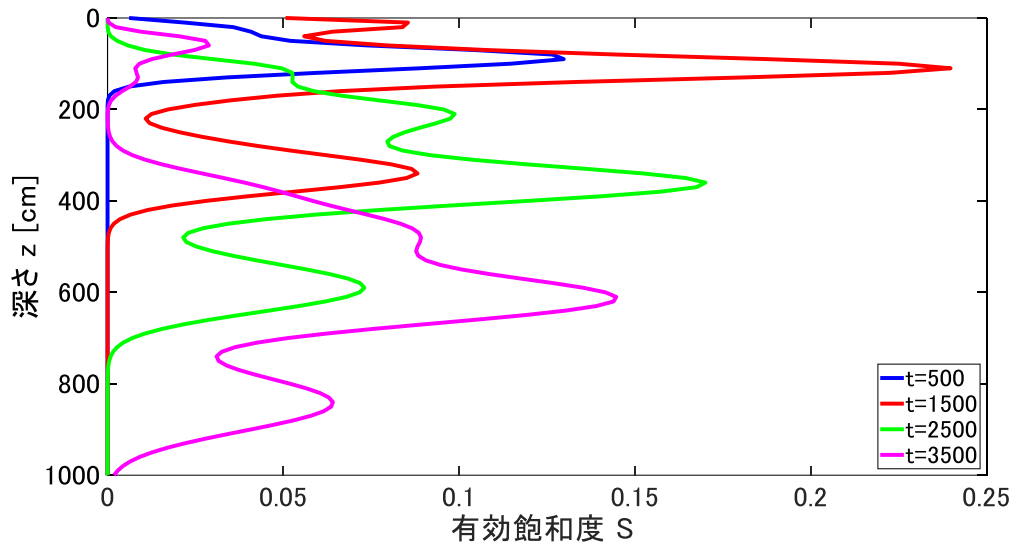


図 4.2 フラックス境界の解析解で計算された各時刻の土壌水分量.

4.4.2 飽和境界の解析解による計算結果

図 4.3 に飽和境界の解析解を用いて計算した各深さの流量変化を示す. $z = 0$ [cm] は地表面の浸透能であり, 地表面が瞬間的に飽和したことによって水分量の空間勾配が大きくなり, 非常に大きい値から飽和透水係数へと減衰する形になっている. これは Horton ら⁶⁾が示したような一般的な浸透能の表現式と同様の变化である. $z = 1$ [cm] の場合も地表面に非常に近い影響で, 瞬間的に飽和透水係数よりも大きい流量を示した後に減衰する波形となる. 一方で $z = 5, 10$ [cm] の場合は地表面が飽和して浸透した雨水が到達するまでは流量が増加せず, 雨水が到達した後は飽和透水係数の値へと緩やかに上昇していく. 図 4.4 に飽和境界の解析解を用いて計算した土壌水分量の変化を示す. $z = 0$ [cm] の地表面が飽和したことによって雨水が下方へと浸透していく様子が表現されている. 特に, $S = 1$ の飽和している領域が時間が経つにつれ下方へと移動しているが, これは重力項を考慮して S の空間勾配が 0 である飽和領域の水移動も解析できるようにした結果である.

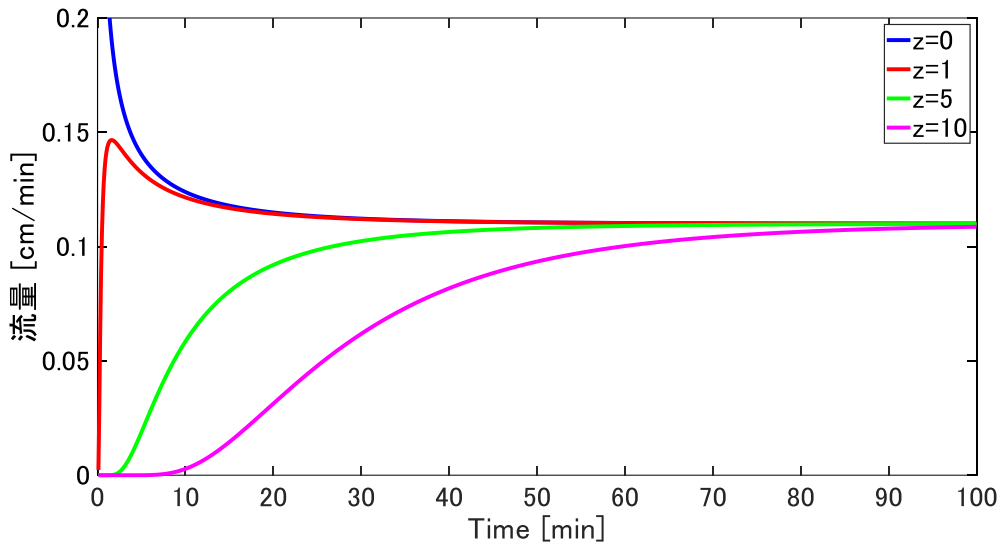


図 4.3 飽和境界の解析解で計算された各深さの流量変化.

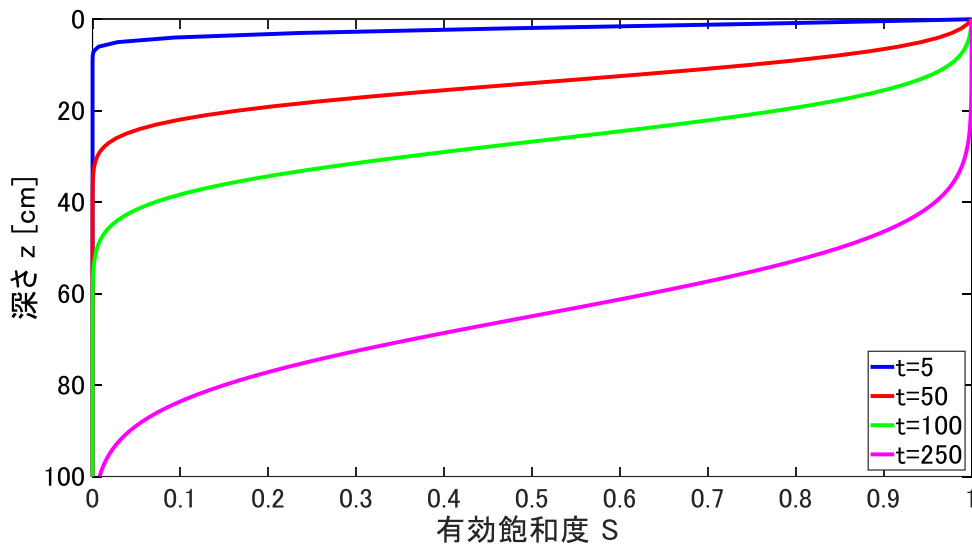


図 4.4 飽和境界の解析解で計算された各時刻の土壌水分量.

4.5 既往の解析的手法との対応

4.5.1 本章の解析解と Green-Ampt 式及び Philip 式の対応

本章では解析解の導出の際に不飽和透水係数と有効飽和度の関係を線形であると仮定した(式(4.4)). 一方で, 一般に用いられる不飽和透水係数の表現式 η は下に凸型の関数であり, 実際の土壌のパラメータをそのまま計算に用いた場合には, 現実よりも早い水分変化を示してしまう可能性がある. 本節ではこの問題を解決するため, 不飽和浸透を簡便に解析する

手法である Green-Ampt 式⁸⁾と本解析解の対応を明らかにし、Green-Ampt 式のパラメータを援用できるようにする。

Green-Ampt 式は湛水時の浸透能を求める式であり、浸潤面の降下という形で浸透現象を簡便に記述する。同式に対しては様々な土壌に対するパラメータが提示されている⁹⁾。そのため、本研究の式(4.25)と Green-Ampt 式との関係を明らかにすれば、Green-Ampt で用いられるパラメータセットを本章の解析解でも利用できる可能性がある。また、Green-Ampt 式は基本的に地表面飽和かつ浸潤面付近の水分量分布を考慮しない条件で浸透を計算する。一方、本章で示した解析解は飽和境界だけでなくフラックス境界での計算が可能であり、水分量の深さ分布を求めることが可能であり、より物理的な解析手法となりうる。そこで、以下では、まず Green-Ampt 式と線形化したリチャーズ式の浸透能を、同じく Richards 式から浸透能を解析的に求めた Philip 式へと帰着させることによって、パラメータの関係を求める。また、計算結果を比較することで、本研究の解析解が Green-Ampt 式と等価なパラメータを有しながら、より物理的な計算が可能であることを示す。

Philip¹⁰⁾は、重力項を排した非線形のリチャーズ式から浸透能式を得た。また、摂動展開を用いて、重力項が存在する場合の浸透能を級数解として求めた。級数解の代表的な2項をとったものが次式である。

$$i = St^{-\frac{1}{2}} + A \quad (4.26)$$

S は Sorptivity と呼ばれる定数、 A は重力項に対応した定数である。

湛水深を考慮しない場合の Green-Ampt 式は次の2式からなる。

$$i = K \frac{h_f + L}{L} \quad (4.27)$$

$$i = (\theta_s - \theta_r) \frac{dL}{dt} \quad (4.28)$$

K は透水係数、 h_f は毛管吸引圧、 L は浸潤面までの深さである。式(4.27)と式(4.28)から L を消去すると、

$$\frac{di}{i(i-K)^2} = -\frac{dt}{Kh_f(\theta_s - \theta_r)} \quad (4.29)$$

となる。小川ら¹¹⁾は次のような近似を用いて Green-Ampt 式と Philip 式との関係性を求めた。浸透初期段階において、 $i \gg K$ であるので、

$$i(i-K)^2 \cong (i-K)^3 \quad (4.30)$$

すなわち式(4.29)は

$$\frac{di}{(i-K)^3} = -\frac{dt}{Kh_f(\theta_s - \theta_r)} \quad (4.31)$$

これを解くと、

$$i = \sqrt{\frac{Kh_f(\theta_s - \theta_r)}{2}} t^{-\frac{1}{2}} + K = St^{-\frac{1}{2}} + A \quad (4.32)$$

となり，Green-Ampt 式が Philip 式に帰着された。

式(4.25)において， t が十分に小さいものとする，次のように近似できる。

$$\operatorname{erfc}\left(-\frac{Vt}{2\sqrt{Dt}}\right) = \operatorname{erfc}\left(-\frac{V\sqrt{t}}{2\sqrt{D}}\right) \cong 1 \quad (4.33)$$

$$\exp\left(-\frac{V^2}{4D}t\right) \cong 1 \quad (4.34)$$

すなわち式(4.25)は次のようになる。

$$i = \frac{k_s}{V} \sqrt{\frac{D}{\pi}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} + \frac{k_s}{2} = \sqrt{\frac{k_s(\theta_s - \theta_r)}{\alpha\pi}} \cdot t^{-\frac{1}{2}} + \frac{k_s}{2} = St^{-\frac{1}{2}} + A \quad (4.35)$$

以上のように式(4.32)と式(4.35)が Green-Ampt 式と本章の解析解を Philip 式に帰着させた結果となる。この結果からパラメータの対応としては次の二つが考えられる。

一つ目は Green-Ampt 式の透水係数 K が飽和透水係数 k_s に等しい場合である。このとき $K = k_s$ であり， S の比較から $h_f = \frac{2}{\pi\alpha}$ となる。このとき式(4.32)と式(4.35)の A は一致しないが，浸透初期においては拡散項に関する第一項の影響が大きいため，近似的には等しくなる。

二つ目は式(4.32)と式(4.35)における A の比較から， $K = \frac{k_s}{2}$ とするパターンである。 S の比較から $h_f = \frac{4}{\pi\alpha}$ となる。これらの結果から $K = k_s, \frac{k_s}{2}$ のどちらを用いても，それに応じた h_f をとれば，浸透初期において Green-Ampt 式は近似的に等しくなることが分かる。また，毛管吸引圧 h_f は土壌パラメータ α に対応している。

Bouwer(1966)は実験から，Green-Ampt 式の透水係数 K に対して飽和透水係数は過大であり，初期値 $K = \frac{k_s}{2}$ から $K = k_s$ へ上昇していくと主張している。この結果は本研究の二つ目のパラメータの対応と一致している。また，Green-Ampt 式では初期値 $K = \frac{k_s}{2}$ から $K = k_s$ までの上昇は表現できないが，本研究の式(4.35)では浸透初期で $K = \frac{k_s}{2}$ に対応したパラメータを用いながら，飽和透水係数へと収束する計算が可能である。

4.5.2 本章の解析解と Green-Ampt 式で等価なパラメータを用いた計算

解析解と Green-Ampt 式で等価なパラメータを用いて計算を行い，両者の比較を行う。表 4.2 に表 4.1 で示したパラメータと等価な Green-Ampt 式のパラメータを示す。ただし，Case1 は $K = k_s$ の場合であり，Case2 は $K = \frac{k_s}{2}$ の場合である。図 4.5 に Green-Ampt 式と解析解で等価なパラメータを用いた際の浸透能の変化を示す。前節で示したパラメータの対応は浸透初期段階で成り立つものであり，図 4.5 でも浸透初期段階では解析解と Green-Ampt 式はほとんど同じ変化を示すが，時間が経過するにつれて違いが大きくなる。図 4.6 に解析解の土壌水分量変化と Case2 のパラメータを用いて計算された浸潤面の深さを示す。Green-Ampt

式は浸潤面の深さのみを追跡し、土壌水分量の変化は考慮しない。一方、解析解は Green-Ampt 式と同様に簡単に浸透能を計算できるうえ、土壌水分量の変化についても追跡可能である。

表 4.2 解析解と等価な Green-Ampt 式のパラメータ.

	θ_s	θ_r	h_f [cm]	k_s [cm/min]	K [cm/min]
Case1	0.46	0.027	1.1	0.11	0.11
Case2	0.46	0.027	2.2	0.11	0.055

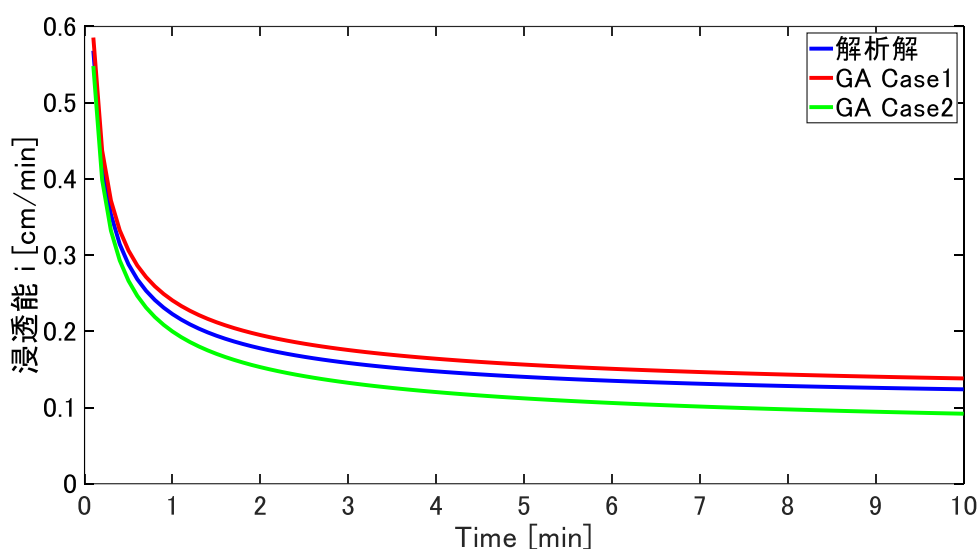


図 4.5 等価なパラメータを用いた際の解析解と Green-Ampt 式の浸透能変化.

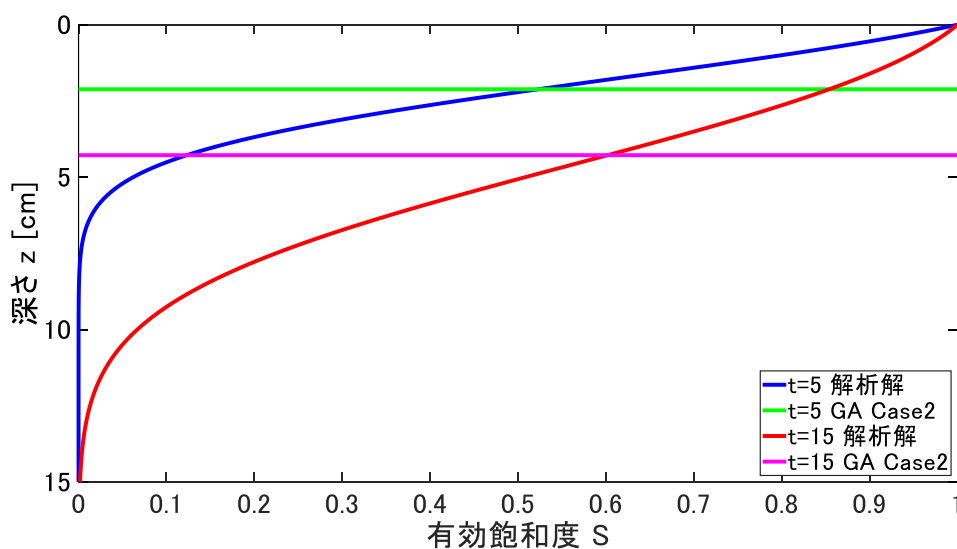


図 4.6 等価なパラメータを用いた際の解析解の土壌水分変化と Green-Ampt 式の浸潤面.

4.6 まとめ

本章では、重力項を考慮したうえで観測降雨データを入力として計算できる Richards 式の解析解を導出した。重力項を考慮したことにより、降雨波形が拡散しなだらかになる過程だけではなく、鉛直下方へと移流する過程についても計算することが可能になった。弱雨が続く場合など土壌水分の鉛直勾配が小さいときは重力項が卓越するため、より現実的な計算を行うことが可能になった。また、飽和境界を用いた場合の解析解を導出し、Green-Ampt 式で用いられるパラメータとの対応を明らかにした。Green-Ampt 式は様々な土壌に対するパラメータが提示されており、そのパラメータを援用することによって、より簡便に解析解で用いるパラメータを決定できるようにした。

参考文献

- 1) Braester, C. (1973). Moisture variation at the soil surface and the advance of the wetting front during infiltration at constant flux. *Water Resources Research*, 9(3), 687-694.
- 2) Chen, J. M., Tan, Y. C., Chen, C. H., & Parlange, J. Y. (2001). Analytical solutions for linearized Richards equation with arbitrary time-dependent surface fluxes. *Water Resources Research*, 37(4), 1091-1093.]
- 3) Menziani, M., Pugnaghi, S., & Vincenzi, S. (2007). Analytical solutions of the linearized Richards equation for discrete arbitrary initial and boundary conditions. *Journal of Hydrology*, 332(1-2), 214-225.
- 4) Gardner, W. R. (1958). Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil science*, 85(4), 228-232.
- 5) Simunek, J., Van Genuchten, M. T., & Sejna, M. (2005). The HYDRUS-1D software package for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media. *University of California-Riverside Research Reports*, 3, 1-240.
- 6) Horton, R. E. (1939). Analysis of runoff-plat experiments with varying infiltration-capacity. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 20(4), 693-711.
- 7) Van Genuchten, M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5), 892-898.
- 8) Green, W. H., & Ampt, G. A. (1911). Studies on Soil Phycs. *The Journal of Agricultural Science*, 4(1), 1-24.
- 9) Rawls, W. J., Brakensiek, D. L., & Miller, N. (1983). Green-Ampt infiltration parameters from soils data. *Journal of hydraulic engineering*, 109(1), 62-70.
- 10) Philip, J. R. (1957). The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solution. *Soil science*, 83(5), 345-358.
- 11) 小川進, 和泉清. (1987). 都市の微小流域の流出解析. 水理講演会論文集, 31, 11-16.

5章 水分保持曲線を反映する流量流積関係式の導出と分布型流出モデルへの適用

5.1 はじめに

日本の森林流域では、土層と基岩の境界面上に発生する飽和側方流が豪雨時の主要な流出成分であると考えられている。加えて、土壌中の不飽和浸透流は流出量を低減させ流出波形を緩やかにする貯留効果を有する¹⁾。不飽和浸透流は Richards 式²⁾を解くことで追跡が可能となるが、強い非線形性などから流域スケールで 3 次元的に解くことは依然として容易ではない。より簡略的に不飽和浸透流を解析する手法としては、流量と水量の関係である流量流積関係式に不飽和浸透流を内包し、平面 2 次元の連続式と連立して解析する手法が提案されている^{3),4)}。ただし、簡略化の影響により、このようなモデルでは、実際の土壌を用いた実験・観測からパラメータを決定する Richards 式とは異なり、観測流量データを用いた最適化によってパラメータを決定する必要がある。そのため、実際の流域土壌が持つ土壌物理性を適切に反映できない可能性がある。森林土壌の貯留効果を的確にモデルへと反映するためには、実験・観測データからパラメータを決定できる流量流積関係式を導出する必要がある。

高棹ら⁵⁾は飽和側方流を飽和ダルシー則、表面流の流量を水深のべき乗関数で表現した流量流積関係式を導いた。また、椎葉ら³⁾は飽和帯が発生しないような低出水時の流出を再現するために、圃場容水量に対応するパラメータを用いて、斜面に沿った不飽和側方流をモデル化した。さらに、立川ら⁴⁾は不飽和ダルシー則を用いることによって、より物理的なパラメータに基づく不飽和側方流モデルを提案した。このモデルは土壌を飽和側方流が流れる大空隙部と不飽和側方流が流れるマトリクス部の二つに分け、マトリクス部の空隙率に対する水分量の割合を変数として不飽和透水係数を推定する。この際、体積含水率を斜面から垂直方向に平均化するため圧力水頭の勾配が 0 となり、圧力水頭と体積含水率の関係を表す水分保持曲線を反映する必要がなくなる。モデル構造が簡便になる一方で、現地観測や実験から得られる保水性の違いがモデルに反映できないという問題が生じる。水分保持曲線を流量流積関係に内包したモデルとして、Kong ら⁶⁾は斜面に対して垂直方向の圧力水頭を平衡分布であると仮定し、圧力水頭の勾配を評価したうえで不飽和側方流をモデル化した。このモデルは van Genuchten モデル⁷⁾のパラメータの一部を変更した修正モデルを水分保持曲線として含む。ただし、修正モデルは不飽和透水係数を Mualem の提案した表現式⁸⁾から解析的に導出することができないため、不飽和透水係数と体積含水率の関係は水分保持曲線と同形で与えられるという強い仮定を置く。一般的に不飽和透水係数は測定が難しく、モデル化にあたっては不飽和透水係数を水分保持曲線のパラメータで表現することが望ましい。

以上を踏まえ、本研究は、水分保持曲線に Brooks-Corey モデル⁹⁾を用いることで水分保持曲線を内包したうえで、そのパラメータから不飽和透水係数を評価できる流量流積関係式

を導出する。また、得られた流量流積関係式を分布型流出モデルに適用し、水分保持曲線のパラメータが流出に及ぼす影響を分析する¹⁰⁾。

5.2 流量流積関係式の導出

5.2.1 本研究で想定する斜面と用いる基礎式

図 5.1 に本研究で想定する斜面と流出機構の模式図を示す。土層の飽和透水係数は降雨強度に比べて十分に大きく、降雨はすべて土層へと浸透するものとする。不透水の基岩上に飽和帯が発生していない場合には土層全体の不飽和側方流が流出の成分となり、飽和帯が発生している場合には飽和側方流と飽和帯より上部の不飽和側方流の和が流出の成分となる。斜面に沿って下方に x 軸、斜面から垂直に z 軸を取ると、各方向のダルシー則は次式となる。

$$q_x = -K \frac{\partial \psi}{\partial x} + K \sin \phi \quad (5.1)$$

$$q_z = -K \frac{\partial \psi}{\partial z} - K \cos \phi \quad (5.2)$$

ここで、 q_x と q_z は x 軸と z 軸方向の単位流量、 ψ は圧力水頭、 K は不飽和透水係数、 ϕ は傾斜角である。 x 軸方向の圧力水頭変化が小さい、すなわち斜面方向は重力流れが支配的であると考えると、

$$q_x = K \sin \phi \quad (5.3)$$

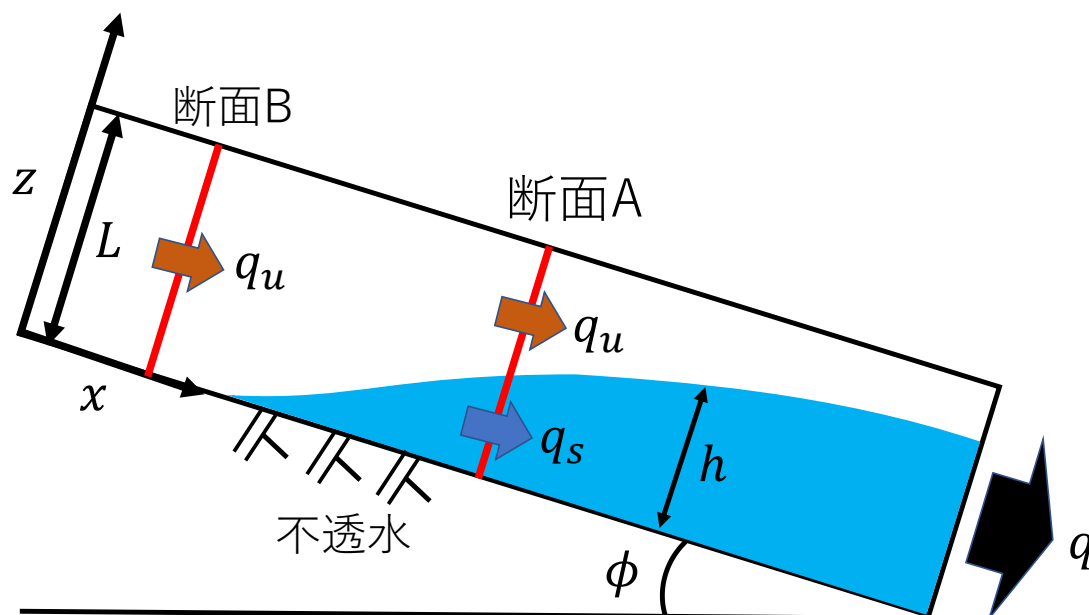


図 5.1 想定している斜面の模式図。断面 A は飽和帯が発生している断面。断面 B は飽和帯が発生していない断面。

となる. $z = 0$ に不透水層があるものとし, 土層厚を L とすると, x 軸方向の総流量 q は次式となる.

$$q = \int_0^L q_x dz \quad (5.4)$$

さらに, 飽和帯の水深を h とすると, q は不飽和領域からの流量 q_u と飽和領域からの流量 q_s の和として, 次のように書ける.

$$q = q_u + q_s \quad (5.5)$$

$$q_u = \int_h^L q_x dz = \sin \phi \int_h^L K dz \quad (5.6)$$

$$q_s = \int_0^h q_x dz = k_s h \sin \phi \quad (5.7)$$

ここで, k_s は飽和透水係数である.

次に, 貯留量 S を式(5.8)で定義する.

$$S = \int_0^L \theta dz \quad (5.8)$$

θ は体積含水率であり, 貯留量 S は z 軸方向の全水量を表す. 貯留量 S を不飽和の成分 S_u と飽和の成分 S_s に分離する.

$$S = S_u + S_s \quad (5.9)$$

$$S_u = \int_h^L \theta dz \quad (5.10)$$

$$S_s = \int_0^h \theta dz = \theta_s h \quad (5.11)$$

θ_s は飽和体積含水率である. 本研究では, 流量 q と貯留量 S の関係を流量流積関係式と呼ぶことにする. 飽和帯のみを考えた場合には, 流量流積関係式は q_s と S_s から一意に定まる. 一方, 不飽和帯を考慮した場合にはある貯留量 S_u に対して体積含水率 $\theta(K)$ の分布が一意に定まらない. すなわち, 同じ貯留量であっても水分量が一樣に分布しているのか, 一部に偏った分布をしているのかによって斜面方向の流量は異なる. そこで S_u と θ の関係を一意に定めるために, $q_z = 0$ すなわち z 軸方向の平衡状態を仮定する. これは z 方向の降雨浸透が終了した状態であり, 降雨イベントが進み土壌が湿潤になった場合など, z 方向の不飽和浸透の影響が小さい時に適用できる. 一方で, 土層が非常に厚い, 土壌が極端に乾燥しているといった場合には z 方向の不飽和浸透が卓越するため, モデルの精度に影響する可能性があることに注意する. 式(5.2)から,

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\cos \phi \quad (5.12)$$

となる. すなわち圧力水頭分布は, 平衡状態で直線となる. ψ から θ と K の分布を求め, 式(5.6)と式(5.10)の積分を計算すれば流量流積関係式を求めることができる.

5.2.2 既往研究の手法

既往研究⁶⁾で採用されている水分保持曲線の van Genuchten モデルを次に示す⁷⁾.

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = (1 + (-\alpha\psi)^n)^{-m} \quad (5.13)$$

ここで、 S_e は有効飽和度、 θ_r は残留体積含水率、 α 、 n 、 m は水分保持曲線の形状を決定するパラメータである。 $m = 1 - \frac{1}{n}$ であると仮定した場合には、統計・物理的に不飽和透水係数をモデル化した Mualem の表現式⁸⁾から、不飽和透水係数が解析的に求まる。

$$K = k_s S_e^l \left(1 - \left(1 - S_e^{\frac{1}{m}} \right)^m \right)^2 \quad (5.14)$$

l は間隙結合係数である。Troch¹¹⁾は、van Genuchten モデルにおいて $m = 1 + \frac{1}{n}$ としたものを修正 van Genuchten モデルとし、その場合に式(5.10)の積分が解析的に求まることを示した。また、Kongら⁶⁾は、不飽和透水係数 K についても修正 van Genuchten モデルと同形であると仮定することによって、式(5.6)の積分も解析的に解くことができ、流量流積関係式が求まることを示した。この時の不飽和透水係数 K は次式のようなになる。

$$K = k_s \cdot (1 + (-\alpha'\psi)^{n'})^{-m'} \quad (5.15)$$

ここに、 $m' = 1 + \frac{1}{n'}$ である。このときの流量流積関係式は式(5.6)と式(5.10)の積分を解析的に解くことで求められている。ただし、式(5.14)のように不飽和透水係数を式(5.13)のような水分保持曲線から求めていないため、式(5.15)の α' と n' は水分保持曲線とは独立に求める必要がある。一般的に不飽和透水係数は水分保持曲線に比べて測定が困難であることから、式(5.15)の α' と n' をどのように決めるのかが問題となる。また、式(5.15)は Mualem の手法で求められたものではないため、その物理性が問題となる可能性もある。

5.2.3 新たな流量流積関係式の導出

5.2.3.1 本研究で用いる水分保持曲線と不飽和透水係数の関係式

本研究では $\theta - \psi - K$ の関係に以下の Brooks-Corey Mualem のモデルを用いる^{8),9)}.

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} \left(\frac{\psi_e}{\psi} \right)^\lambda & (\psi < \psi_e) \\ 1 & (\psi \geq \psi_e) \end{cases} \quad (5.16)$$

$$K = k_s \cdot S_e^n \quad (5.17)$$

ψ_e は空気侵入圧、 λ は非線形性についてのパラメータ、 $n = 2 + l + \frac{2}{\lambda}$ である。Brooks-Corey Mualem のモデルを用いた場合にも、式(5.6)と式(5.10)の積分を解析的に求めることができる。加えて、式(5.17)のように不飽和透水係数 K を Mualem の手法を用いて水分保持曲線から決定できるため、既往研究の手法で示したような問題を解消したうえで流量流積関係式を求められる。

5.2.3.2 飽和帯が発生している場合の流量流積関係式

以下 $0 < h \leq L$ の場合を考える. この時, 図 5.2 に示したように飽和と不飽和境界 ($z = h$) の圧力水頭は $\psi = \psi_e$ であり, 底面 ($z = 0$) は飽和と不飽和境界 ($z = h$) から鉛直距離で $h \cos \phi$ の距離にあるので, 式(5.12)から,

$$\psi = (h - z) \cos \phi + \psi_e \quad (5.18)$$

となる. よって $z \geq h$ における体積含水率の分布は式(5.16)から,

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left(\frac{\psi_e}{(h - z) \cos \phi + \psi_e} \right)^\lambda \quad (5.19)$$

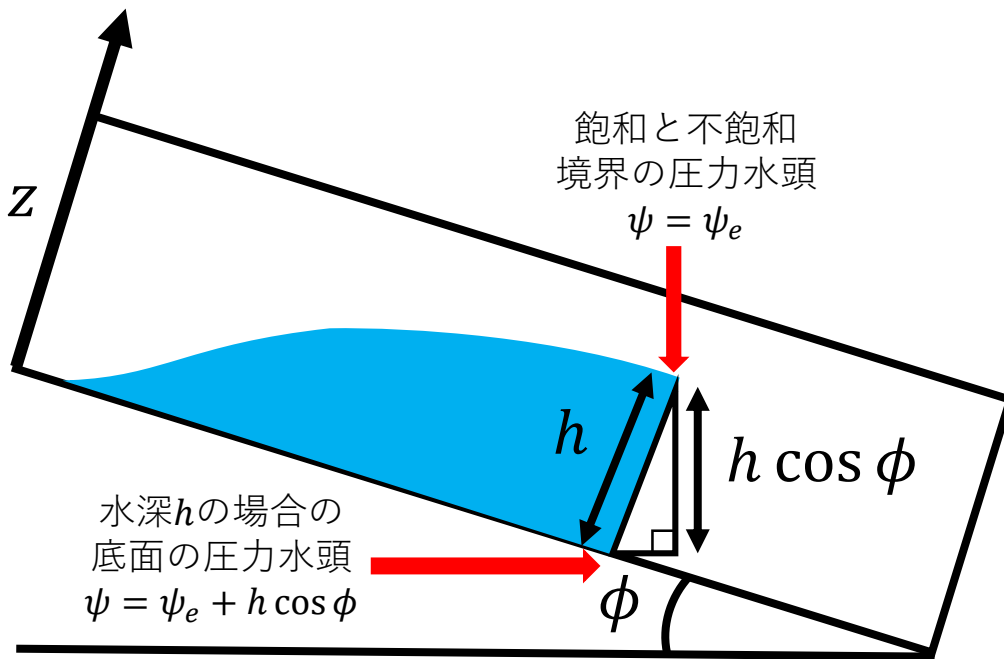


図 5.2 飽和帯が発生しているときの圧力水頭の関係.

となる. 式(5.10)の積分を計算すると次式が得られる.

$$S_u = \theta_r(L - h) + \frac{(\theta_s - \theta_r)\psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(1 - \left(\frac{(h - L) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1 - \lambda} \right) \quad (5.20)$$

$z \geq h$ における K の分布は式(5.17)と式(5.19)から,

$$K = k_s \left(\frac{\psi_e}{(h - z) \cos \phi + \psi_e} \right)^{n\lambda} \quad (5.21)$$

となる. 式(5.6)の積分を計算すると次式が得られる.

$$q_u = \frac{k_s \psi_e \sin \phi}{(1 - n\lambda) \cos \phi} \left(1 - \left(\frac{(h - L) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1 - n\lambda} \right) \quad (5.22)$$

上記から, 飽和帯が発生しているときの流量流積関係式が, h を媒介変数として定まる. ま

た,

$$S_{thre} = \lim_{h \rightarrow 0} S = \theta_r L + \frac{(\theta_s - \theta_r)\psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(1 - \left(\frac{\psi_e - L \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} \right) \quad (5.23)$$

であり, 貯留量 S がこの値を超えると飽和帯が発生する.

5.2.3.3 飽和帯が発生していない場合の流量流積関係式

以下 $h = 0$ の場合を考える. $z = 0$ における圧力水頭を ψ_b とすると, 式(5.12)から圧力水頭の分布は,

$$\psi = \psi_b - z \cos \phi \quad (5.24)$$

となる. 飽和帯が発生している場合と同様の手順から次式が得られる.

$$S_u = \theta_r L + \frac{(\theta_s - \theta_r)\psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{\psi_b}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} - \left(\frac{\psi_b - L \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} \right) \quad (5.25)$$

$$q_u = \frac{k_s \psi_e \sin \phi}{(1 - n\lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{\psi_b}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} - \left(\frac{\psi_b - L \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} \right) \quad (5.26)$$

上記から, 飽和帯が発生していないときの流量流積関係式が, ψ_b を媒介変数として定まる.

5.2.3.4 表面流が発生している場合の流量流積関係式

以下 $h > L$ の表面流が発生している場合を考える. 本研究では表面流と飽和側方流を一つの連続式で解析できるようなモデルを提案する. 貯留量を次式で定義する.

$$S = \theta_s L + h - L \quad (5.27)$$

n_s を斜面粗度とすると, マニング則とダルシー則の和から,

$$q = k_s L \sin \phi + \frac{\sqrt{\sin \phi}}{n_s} (h - L)^{\frac{5}{3}} \quad (5.28)$$

が得られる. ただし, このようなモデル化では次のような問題が生じる. c を次式とする.

$$c = \frac{\partial q}{\partial S} \quad (5.29)$$

$h > L$ の場合

$$c = \frac{5\sqrt{\sin \phi}}{3n_s} (h - L)^{\frac{2}{3}} \quad (5.30)$$

であり,

$$\lim_{h \rightarrow L+0} c = 0 \quad (5.31)$$

となる. 一方で, $L \geq h > 0$ の場合には,

$$c = \frac{k_s \sin \phi}{\theta_s - \theta_r} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{(h - L) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{-n\lambda} \right)}{\left(1 - \left(\frac{(h - L) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{-\lambda} \right)} \quad (5.32)$$

であり、ロピタルの定理から、

$$\lim_{h \rightarrow L-0} c = \frac{k_s n \sin \phi}{\theta_s - \theta_r} \quad (5.33)$$

となる。以上から、表面流を単純にマニング則とダルシー則の和で計算すると c が不連続になり、数値計算が不安定になる可能性がある。そこで、本研究では、補正項として $\frac{k_s n \sin \phi}{\theta_s - \theta_r} (h - L)$ を q に加える。

$$q = k_s L \sin \phi + \frac{\sqrt{\sin \phi}}{n_s} (h - L)^{\frac{5}{3}} + \frac{k_s n \sin \phi}{\theta_s - \theta_r} (h - L) \quad (5.34)$$

このように q をモデル化することによって、 c を連続にとることが可能になる。

5.2.3.5 得られた流量流積関係式のまとめ

ここまで得られた流量流積関係式をまとめると次のようになる。

$S \leq \theta_r L$: 流れなし

$$\forall S \quad q = 0 \quad (5.35)$$

$\theta_r L < S \leq S_{thre}$: 不飽和側方流

$$S = \theta_r L + \frac{(\theta_s - \theta_r) \psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{\psi_b}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} - \left(\frac{\psi_b - L \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} \right) \quad (5.36)$$

$$q = \frac{k_s \psi_e \sin \phi}{(1 - n\lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{\psi_b}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} - \left(\frac{\psi_b - L \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} \right) \quad (5.37)$$

$S_{thre} < S \leq \theta_s L$: 飽和+不飽和側方流

$$S = \theta_s h + \theta_r (L - h) + \frac{(\theta_s - \theta_r) \psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(1 - \left(\frac{(h - L) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} \right) \quad (5.38)$$

$$q = k_s h \sin \phi + \frac{k_s \psi_e \sin \phi}{(1 - n\lambda) \cos \phi} \left(1 - \left(\frac{(h - L) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} \right) \quad (5.39)$$

$\theta_s L < S$: 表面流

$$S = \theta_s L + h - L \quad (5.40)$$

$$q = k_s L \sin \phi + \frac{\sqrt{\sin \phi}}{n_s} (h - L)^{\frac{5}{3}} + \frac{k_s n \sin \phi}{\theta_s - \theta_r} (h - L) \quad (5.41)$$

5.3 分布型流出モデルへの適用と計算条件

5.3.1 RRI モデルの概要

本研究では得られた流量流積関係式を分布型流出モデルの Rainfall-Runoff-Inundation モデル(RRI モデル)¹²⁾に適用する。RRI モデルは、流域を平面二次元のグリッドセルに分割し、降雨流出と洪水氾濫を一体的に解析するモデルである。我が国の出水に豊富な適用実績を

有し、近年では平成 30 年 7 月豪雨や令和元年東日本台風を対象としたダム流域での再現計算で良好な結果を示している¹³⁾。河道セルでは、一次元の Diffusive wave モデルと越流公式から水収支を計算する。平地セルでは、Green-Ampt 式に基づく損失を考慮した表面流を二次元の Diffusive wave モデルで解析する。山地セルでは、先述した立川らの流量流積関係式⁴⁾と二次元の Diffusive wave モデルから、飽和・不飽和側方流と表面流を追跡する。

5.3.2 計算手法と適用の際に用いた仮定

流量流積関係式を適用するにあたって、計算手法と用いた仮定について説明する。以下、表記を簡単にするため一次元の式で示す。連続式は次式で表される。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} = r \quad (5.42)$$

y は水平方向の座標、 t は時間、 r は降雨強度である。流量流積関係式は式(5.35)~(5.41)を用いて、連続式と連立して水収支を計算する。ただし、本研究で導出した流量流積関係式を用いて平面二次元の計算を行う場合、グリッドセル間の流量 q を求める際の傾斜角 ϕ はグリッドセル間の標高差から推定できるものの、式(5.36)と式(5.38)でグリッドセルの S と h (または ψ_b)の関係を求める場合に用いる傾斜角 ϕ は、流下方向が複数あるため一意に定めることが難しい。そこで、RRI モデルと同様に次のような仮定を用いる。

$$\sin \phi \approx \tan \phi \approx \frac{\Delta(H + el)}{\Delta y} \quad (5.43)$$

$$\cos \phi \approx 1 \quad (5.44)$$

ここで el は該当グリッドセルの標高である。また、 H は以下の式で定義される。

$$H = \begin{cases} \frac{S}{\theta_s} & (S \leq \theta_s L) \\ S + L - \theta_s L & (S > \theta_s L) \end{cases} \quad (5.45)$$

5.3.3 対象流域とパラメータ

提案したモデルの挙動を確認するために、複数のダム流域と出水イベントを対象に流出計算を行った。対象流域と出水イベントは以下の手順で選定した。まず、関東地方全域を対象として RRI モデルを構築する。その領域内で観測流量が得られる主要な 16 のダム流域を選ぶ。計算はすべてのダム流域を一括して行うため、なるべく多くのダムで降雨量が多くなるような代表イベントを選ぶ必要がある。そこで、各ダム流域において観測期間内(2006~2018 年)で流入量の多かった 10 イベントを抽出する。この 16 ダム流域×10 イベントのうちで重複しているイベントの数を計算し、重複数の多い 10 イベントを代表イベントとして降雨データを作成した。ただし、各ダム流域で見ると、この 10 イベントでも総降雨量が非常に小さいものが含まれている。そのため、指標計算の際には各ダム流域で総降雨量が

多い7イベントを対象とした。そのうえで、その7イベントの観測流量に欠損が見られる流域と、上流ダムが観測流量に大きく影響している流域を除外した。以上のプロセスから決まった9つの対象流域と各流域で解析対象となった7イベントの流域平均総降雨量の一覧を表5.1に示す。土壌タイプによって異なる保水性が解析流量に与える影響を分析するために複数の土壌パラメータを用意した。具体的には、Richards式を数値的に解いて鉛直浸透を解析するソフトウェアであるHydrus-1D¹⁴⁾で使用されているパラメータを用いた。土壌タイプは、Sandy loam, Loam, Silt loam, Clay loamの4つを選択した。また、間隙結合係数 l はすべての土壌タイプで $l = 0.5$ とした。土層厚 L については、日本のダム流域を対象に解析を行った既往研究^{4) 12)}において $\theta_s L$ が0.5[m]前後に設定されていることを踏まえ、 $\theta_s L$ が同程度となるように $L = 1$ [m]とした。用意したパラメータの一覧を表5.2に示す。ただし、Hydrus-1Dで設定されている飽和透水係数は、日本の森林流域に適用するには低い(4種の

表 5.1 対象流域名と流域面積および各降雨イベントの総降雨量[mm]。イベントは各流域で大きいものから順にE1~E7とした。

流域	流域面積 (km ²)	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
矢木沢	167	568	198	150	146	135	85	78
奈良俣	95	410	161	159	146	119	93	83
相俣	111	342	193	190	177	176	147	117
菌原	607	286	277	189	177	161	160	159
草木	254	475	314	297	267	250	222	220
下久保	323	308	194	191	167	154	134	130
川俣	179	434	342	285	240	222	217	211
浦山	52	519	440	245	242	219	212	206
二瀬	170	382	355	239	210	205	187	177

表 5.2 土壌タイプとパラメータ。 S_{thre} については式(5.23)から計算したものを示した($\cos \phi \approx 1$)。

土壌タイプ	θ_s	θ_r	λ	n	ψ_e [m]	S_{thre} [m]
Sandy loam	0.45	0.04	0.32	8.71	-0.15	0.31
Loam	0.46	0.03	0.22	11.6	-0.11	0.34
Silt loam	0.50	0.02	0.21	12.0	-0.21	0.40
Clay loam	0.37	0.08	0.19	12.8	-0.26	0.32

中で最も高い Sandy loam でも 7.2×10^{-6} [m/sec] = 26 [mm/hour] と低い). 本研究では飽和透水係数が降雨強度よりも十分に大きいことを前提としている. また, 飽和透水係数を大きくとりすぎると, パイプ流のような土層中の高速排水が起こり水分保持曲線の影響を適切に評価できない可能性がある. これらの理由から, 本研究ではどの土壌タイプでも飽和透水係数 $k_s = 0.001$ [m/sec] とし, その他の水分保持曲線のパラメータが流出に与える影響に焦点を当てることにした. また, 斜面粗度 $n_s = 0.1$ [$m^{-1/3} \cdot sec$] とし, 空間解像度は 5 秒(約 150 m) に設定した.

5.4 結果

5.4.1 土壌タイプ毎の流量流積関係式

図 5.3 に本研究で用いる 4 つの土壌タイプの流量流積関係式を示す. 単位長さ斜面を想定し, $\cos \phi \approx 1$, $\sin \phi \approx \tan \phi \approx 0.1$, $L = 1$ [m], それ以外の土壌パラメータは表 5.2 に示したものをを用いた. ★は S_{thre} の点を示しており, これより左側の貯留量では飽和帯は発生せず不飽和側方流のみが流出の成分となる(図 5.1 の断面 B の状態). また, ★より右側の貯留量になると飽和帯が発生し, 飽和側方流とそれより上側に発生している不飽和側方流の和が流出量となる(図 5.1 の断面 A の状態). 各曲線上で最も値が大きい流量 0.0001 [m^2/sec] の点が, 土層全体が飽和した状態である. 飽和透水係数が同じであるのに各土壌タイプで飽和帯が発生する領域の傾きが同じにならないのは, 飽和帯より上側の不飽和帯の水分量によって水深を上昇させるのに必要な貯留量が異なるためである. 既往研究⁴⁾の流量流積関係式で

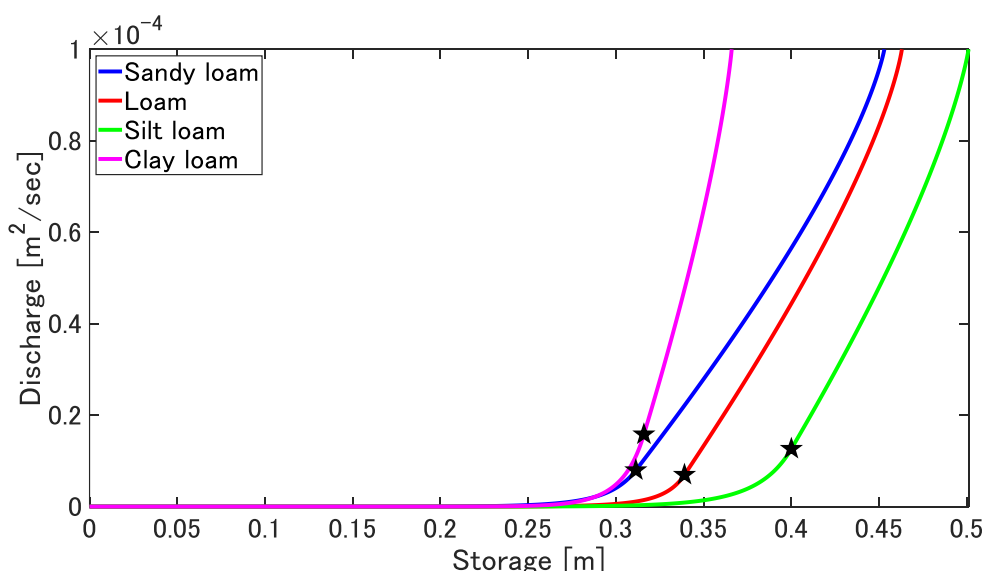


図 5.3 土壌タイプ毎の流量流積関係. 単位長さ斜面を想定し, $\cos \phi \approx 1$, $\sin \phi \approx \tan \phi \approx 0.1$, $L = 1$ [m], それ以外の土壌パラメータは表 5.2 のものをを用いた. ★が S_{thre} の点であり, 流量 0.0001 [m^2/sec] のとき土層が完全に飽和した状態となる.

は S_{thre} をパラメータとしていた。一方、本研究では S_{thre} は土壌パラメータから決まり、自由に設定することはできない。これにより、妥当な初期条件を設定する必要があるものの、より現実的な貯留量変動の下で流量を算定できる。また、その現実的な貯留量から土壌水分量分布や水深を直接求めることができるため、流量以外の現地観測との比較もより簡便に行えるという利点がある。

5.4.2 観測流量との比較とハイドログラフの特徴

開発したモデルの再現性を定量的に評価するために、解析値と観測値から Nash–Sutcliffe 指標を計算した。各流域で Nash–Sutcliffe 指標の平均値を求める際には、各イベントで4つの初期条件のうち最も同指標が高くなるものを用いた。各流域における Nash–Sutcliffe 指標の7イベント平均値を表 5.3 に示す。ただし、相俣のイベント5については小降雨が繰り返して発生するもので、他の降雨イベントと比べて極端に観測のピーク流量が小さいため、解析値との比較を行ううえで適さないと判断し、Nash–Sutcliffe 指標を計算する際には除外した。矢木沢ダムと奈良俣ダムを除く9流域中7流域において、いずれかの土壌タイプで流域平均の Nash–Sutcliffe 指標は0.8以上となり、本研究で提案した流量流積関係式でも観測流量を再現可能なことを確認できた。土壌タイプによって流出挙動は顕著に異なっていたものの、それらの流域で良好な再現結果を与える土壌タイプは複数存在していた。これは、同様のハイドログラフを示す土壌タイプと初期条件の組み合わせ(例えば流出量の多い土壌タイプ

表 5.3 各流域における Nash–Sutcliffe 指標の7イベント平均値(相俣のイベント5のみ除外)。

流域	Sandy loam	Loam	Silt loam	Clay loam
矢木沢	0.50	0.47	0.54	0.35
奈良俣	0.63	0.65	0.72	0.65
相俣	0.79	0.79	0.82	0.58
菌原	0.89	0.89	0.90	0.47
草木	0.82	0.81	0.82	0.67
下久保	0.79	0.80	0.82	0.54
川俣	0.87	0.84	0.86	0.53
浦山	0.88	0.83	0.85	0.12
二瀬	0.90	0.90	0.91	0.51

プ+乾燥した初期条件と流出量の少ない土壌タイプ+湿潤な初期条件)が複数存在することが理由である。再現性が悪かった矢木沢と奈良俣は隣接する流域であり、観測流量が解析流量よりも鋭敏な波形を示す傾向があった。本研究で検証した土壌タイプと初期条件では良好な再現性が得られなかったが、土層厚をより薄く設定して降雨流出の応答特性を早くするなど、ここでは検討していないパラメータを変更することで再現性が向上する可能性がある。本研究の条件設定では Clay loam の Nash-Sutcliffe 指標が全体的に低い傾向にあった。これは、Clay loam の θ_s が 4 種の土壌タイプの中で最も低く、土層厚 $L = 1$ [m] では十分な貯留を行えなかったことが原因と考えられる。

土壌タイプ・初期条件の違いによってハイドログラフがどのように変化するかを、二瀬ダム流域のハイドログラフを例として示す。対象イベントは降雨規模と波形の異なる事例としてイベント 1 (総降雨量 382 mm) とイベント 3 (総降雨量 239 mm) とした(図 5.4)。図 5.5 に各土壌タイプのパラメータから計算されたハイドログラフを示す。イベント 1 は二山洪水であり、Time = 80 [hour] の前後において、前半のピークでは土壌タイプごとの流量の違いが大きいのにに対して、後半のピークでは違いが小さくなっている。これは、どの土壌タイプでも Time = 80 [hour] 付近で流域全体がより湿潤な状態になり、その後は流出に対する表面流の割合が増加し、土壌タイプごとの違いが出にくくなったためと考えられる。一方、より総降雨量の少ないイベント 3 においてはピーク付近でも土壌タイプごとの貯留効果の違いが明確に現れている。

図 5.6 に異なる初期条件の下で計算されたハイドログラフを示す。どの土壌タイプにおいても、より乾燥した初期条件を用いた場合に流量が低下する。ただし、特定の時刻を過ぎると流域全体が湿潤な状態になり初期条件による違いは見られなくなる。例えば、イベント 1 において、Sandy loam, Loam, Silt loam の 3 つのタイプでは Time = 80 [hour] 付近までは初期条件の違いが現れるが、それ以降ではどの初期条件でもほとんど同じ変化を示している。また、他の 3 つの土壌タイプに比べて空隙が小さい Clay loam では、より早い時間で同じ変化を示すようになる。イベント 1 ではピーク前の降雨量が多いため、ピーク時に初期条件の違いはほとんど現れない。一方、総降雨量のより小さいイベント 3 において、Sandy loam, Loam, Silt loam の 3 つのタイプではピーク時でも初期条件の違いによる貯留効果の違いが現れている。

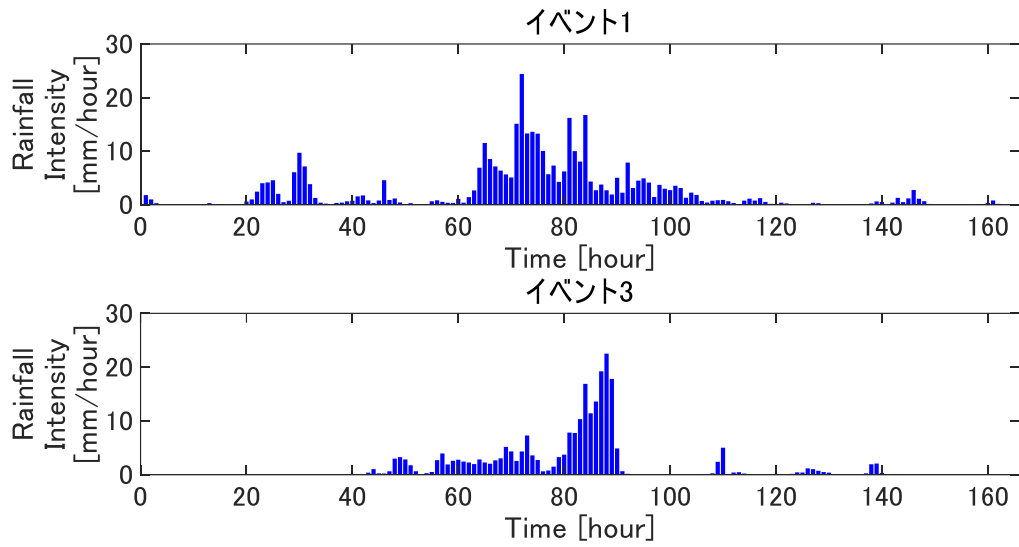


図 5.4 二瀬ダム流域のイベント 1 とイベント 3 の降雨データ。

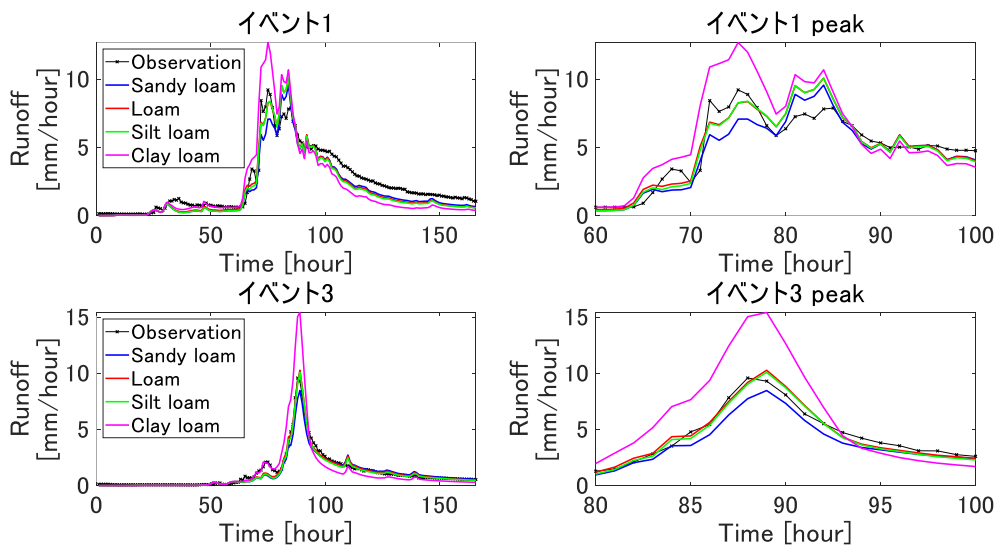


図 5.5 各土壌タイプのパラメータで計算された二瀬ダム流域のハイドログラフ。無降雨期間 30 日の初期条件を用いた(右側の図はピーク付近の計算・観測ハイドログラフを拡大表示している)。

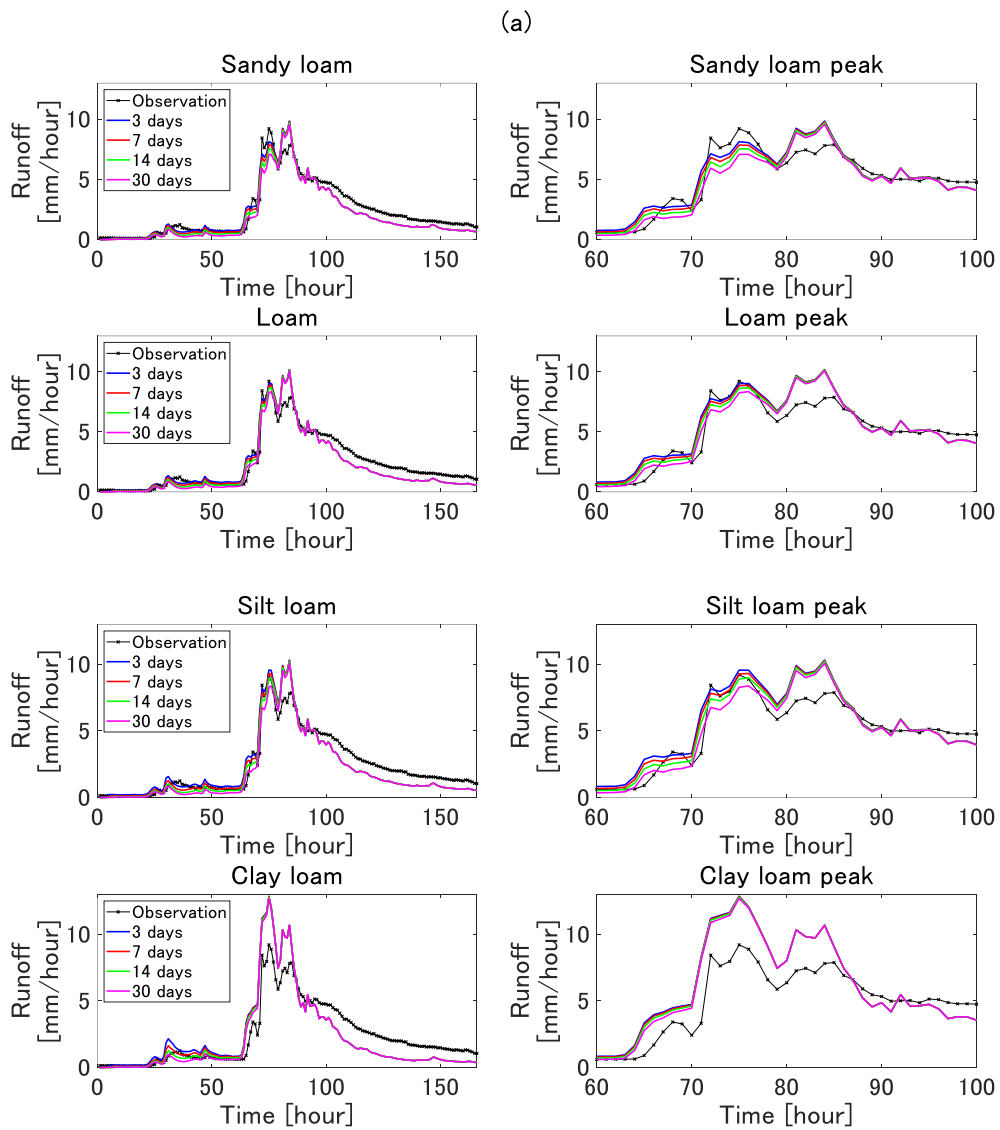


図 5.6 無降雨期間の異なる初期条件によるハイドログラフの違い. 二瀬ダム流域のイベント 1 (a) とイベント 3 (b) (右側の図はピーク付近の計算・観測ハイドログラフを拡大表示している).

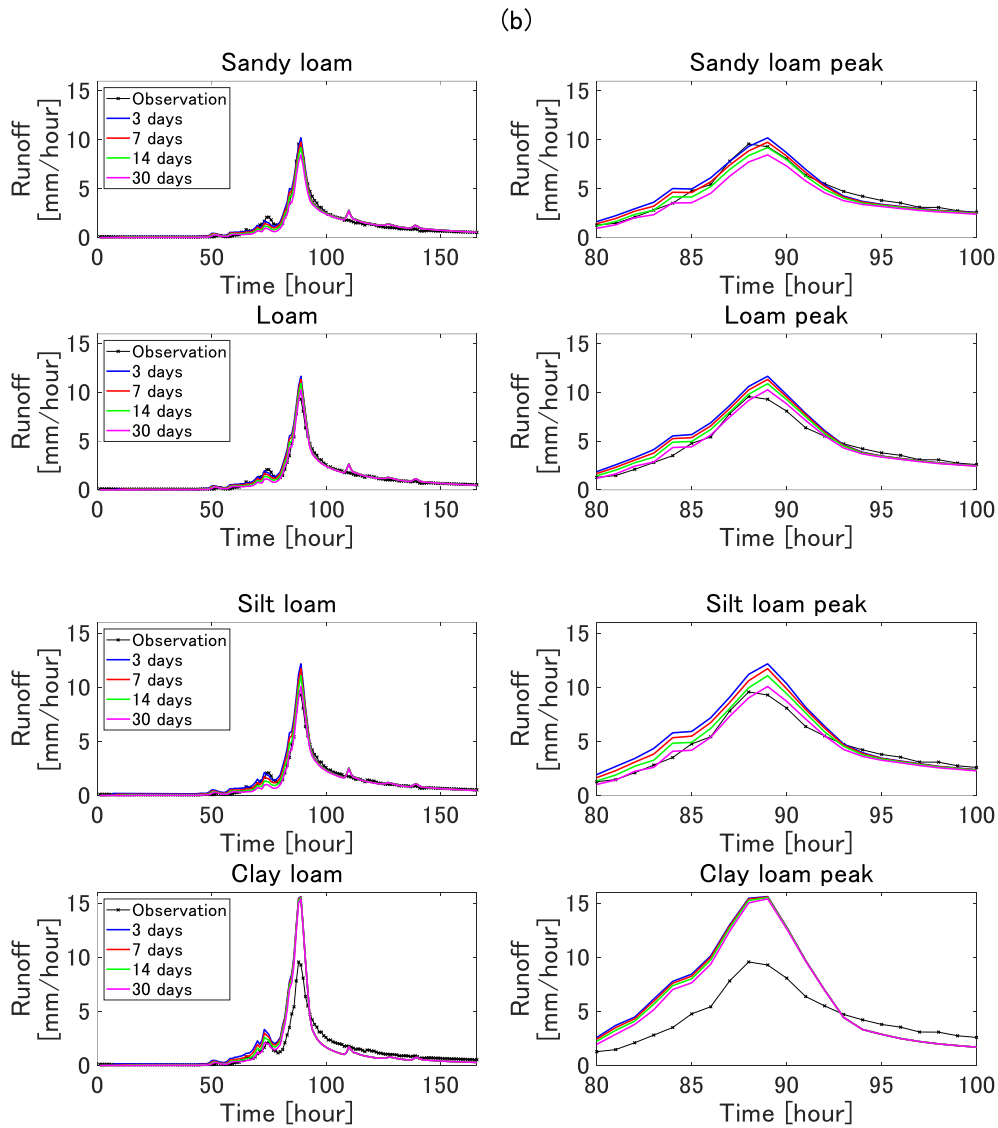


図 5.6 無降雨期間の異なる初期条件によるハイドログラフの違い. 二瀬ダム流域のイベント 1 (a) とイベント 3 (b) (右側の図はピーク付近の計算・観測ハイドログラフを拡大表示している). (続き)

5.5 考察

5.5.1 土壌タイプによる初期条件の違い

土壌タイプによる初期条件の違いを分析するため, 次のような指標を導入して事前計算時の流域水量の変化を示す.

$$S_{sat} = \theta_s L - S \quad (5.46)$$

ここで, $\theta_s L$ は土層が完全に飽和するのに必要な貯留量である. すなわち, 現在の貯留量 S から表面流が発生するまでに必要な水量が S_{sat} となる. 事前計算における, 全 9 流域すべての

斜面セルで S_{sat} の平均をとったものを図 5.7 に示す. 縦に並んだ 4 つの★は同一の無降雨期間のものであり, 左から 3 日, 7 日, 14 日, 30 日の無降雨期間を経た状態を表す. 例えば, 最も右上に位置している★の点は, 30 日の無降雨期間を経た Sandy loam の全流域平均 S_{sat} の値である. この時 $S_{sat} \cong 0.18$ [m]であり, 分布を考慮しなければ, おおよそ 180 mm までなら瞬間的に降雨が降ったとしても表面流が発生しない, すなわち流域に貯留できる状態であるといえる. 4 つの土壌タイプでは表面流の発生しやすい順から Clay loam, Silt loam, Loam, Sandy loam となる. ただし無降雨期間が 30 日に達すると Silt Loam と Loam の S_{sat} はほぼ同じ値となる.

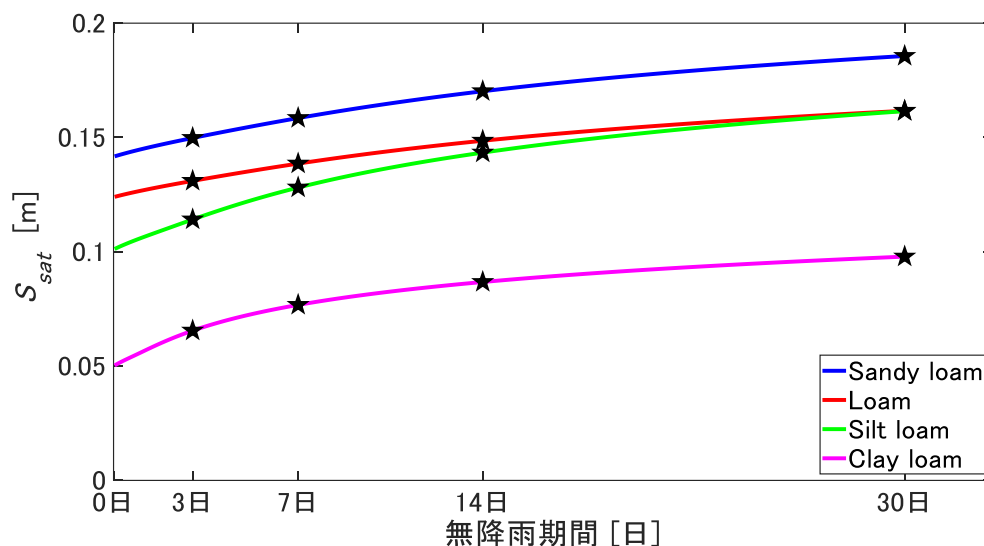


図 5.7 事前計算における, 流域平均 S_{sat} の時間変化. 時間がたつにつれて水が抜けていく様子を表しており, 縦軸で上方に行くほど表面流が発生しにくい状態にある. 縦に並んだ 4 つの★は同一の無降雨期間のものであり, 左から 3 日, 7 日, 14 日, 30 日の無降雨期間を経た状態を表す.

5.5.2 土壌タイプの違いがピーク流量に与える影響

土壌タイプによってピーク流量がどのように変わるのかを分析するため, 次のような指標を計算した.

$$Q_{p-soil} = \frac{q_{p-soil}}{\text{mean}(q_{p-soil})} \quad (5.47)$$

q_{p-soil} はある流域・イベントにおける 4 つの土壌タイプの下で計算されるピーク流量であり, $\text{mean}(q_{p-soil})$ はその平均値である. すなわち, Q_{p-soil} は流域・イベントごとに 4 つの値

を持ち、その土壌タイプの Q_{p-soil} が大きいほど 4 つの土壌タイプの中で相対的にピーク流量が大きいことを意味する(図 5.7 における縦に並んだ 4 つの★の土壌タイプの比較). 7 日と 30 日の無降雨期間を経た初期条件の下での、 Q_{p-soil} とイベント総降雨量の関係を図 5.8 と図 5.9 に示す. どちらの場合でも総降雨量 300 mm を超えるような大規模出水においては 4 つの土壌タイプの違いは小さくなる. これはピーク前の降雨が十分にあり、どの土壌タイプでも流域の大部分で土層が飽和に近い状態になるためだと考えられる. また、総降雨量が 100mm 以下と相対的に小さいイベントにおいては、Sandy loam と Loam と Silt loam の差が小さい傾向が見られる. これは、表面流がほとんど発生せず、ピーク時には河道付近の降雨が流出の主成分となり、土壌による水分保持曲線の違いがピーク流量に現れにくかったことが原因の一つとして考えられる. 図 5.7 で示したように、Sandy loam と Loam と Silt loam はどの初期条件でも、表面流の発生まで流域平均で貯留量として 100 mm 以上の余裕がある. 一方で、Clay loam は無降雨期間 30 日の初期条件でも 90 mm の余裕しかないため、総降雨量 100 mm 以下のイベントでも表面流が発生しやすく Q_{p-soil} が大きくなるのだと考えられる.

ピーク流量の大きさについては多くの流域・イベントにおいて、Clay loam が最も高く、Sandy loam が最も小さい傾向にある. また、無降雨期間 7 日と 30 日の二つの初期条件における、Loam と Silt Loam の Q_{p-soil} を散布図にしたものを図 5.10 と図 5.11 に示す. 図 5.10 を見るとほとんどの点は傾き 1 の直線よりも上側にあり、無降雨期間 7 日の初期条件を用いた場合には Silt loam の方が Loam よりピーク流量が大きい傾向にあることがわかる. 一方、図 5.11 を見ると多くの点が傾き 1 の直線を中心として分布するような形となっており、無降雨期間 30 日の初期条件を用いた場合には Silt loam と Loam のピーク流量はおおよそ同程度になる傾向にある.

これらの結果をまとめると、同じ無降雨期間の初期条件を用いた場合、ピーク流量が大きくなりやすい順から土壌タイプを並べると Clay loam, Silt loam, Loam, Sandy loam となる. ただし、無降雨期間 30 日の初期条件の下では、Silt Loam と Loam のピーク流量はおおよそ同程度となる. また、この土壌タイプの違いによるピーク流量の大小は、図 5.7 の★で示した初期条件における、表面流の発生しやすさを示した S_{sat} の関係に対応している(S_{sat} が大きいほどピーク流量が小さい).

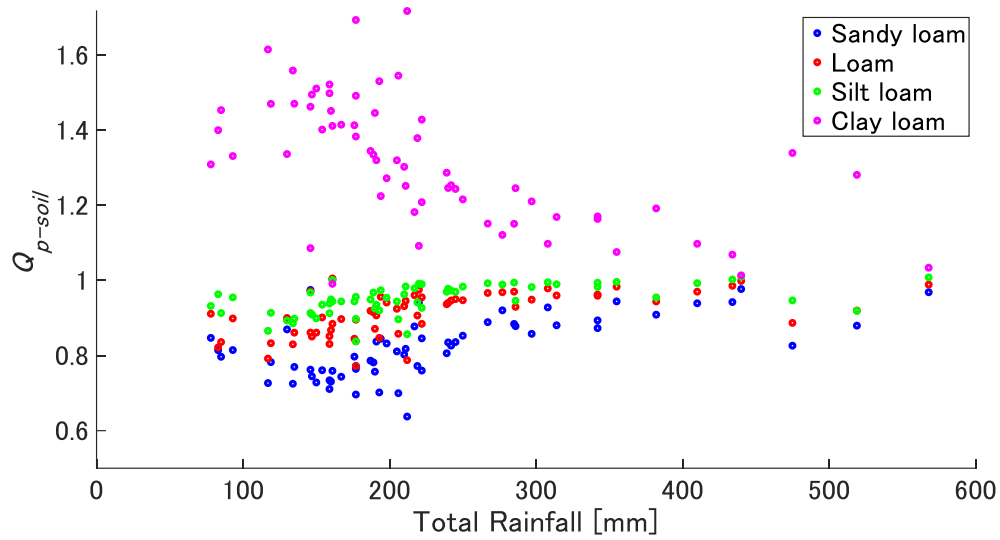


図 5.8 Q_{p-soil} と総降雨量の関係(無降雨期間 7 日の初期条件). 縦軸で上方に行くほど 4 つの土壌タイプの中でピーク流量が大きい. 縦軸で 1 の値が 4 つの土壌タイプの平均.

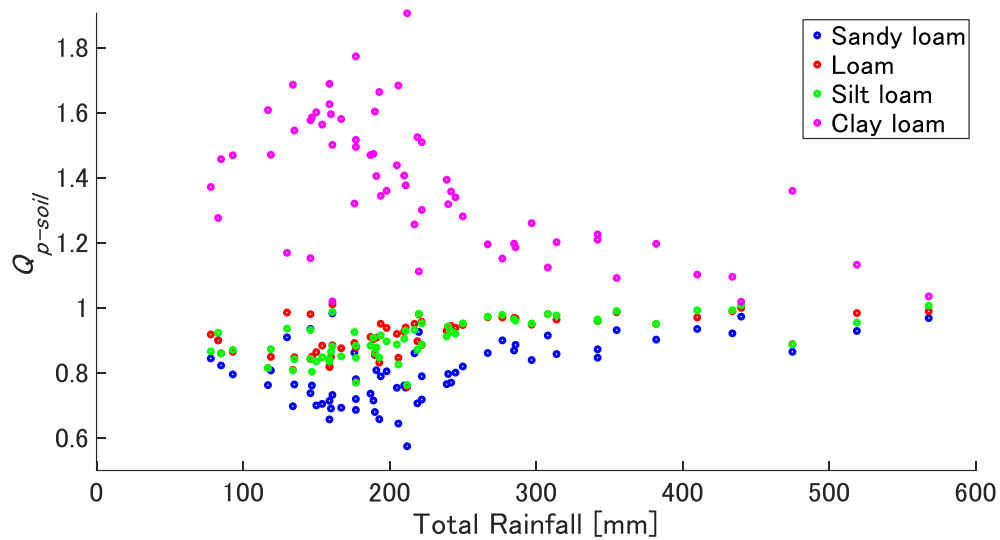


図 5.9 Q_{p-soil} と総降雨量の関係(無降雨期間 30 日の初期条件). 縦軸で上方に行くほど 4 つの土壌タイプの中でピーク流量が大きい. 縦軸で 1 の値が 4 つの土壌タイプの平均.

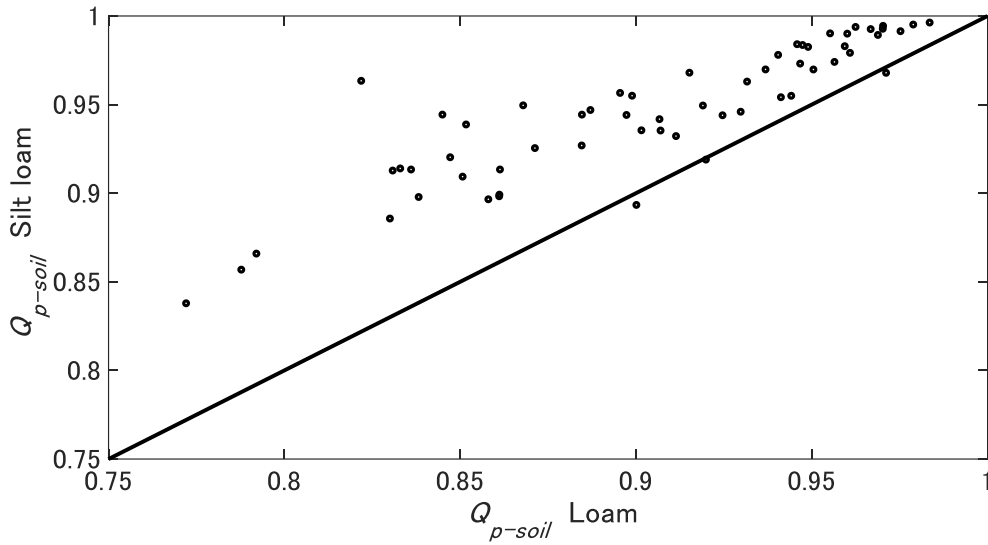


図 5.10 Loam と Silt loam の Q_{p-soil} の散布図(無降雨期間 7 日の初期条件). 直線は傾き 1 で切片 0 の直線. 直線状でピーク流量は等しい.

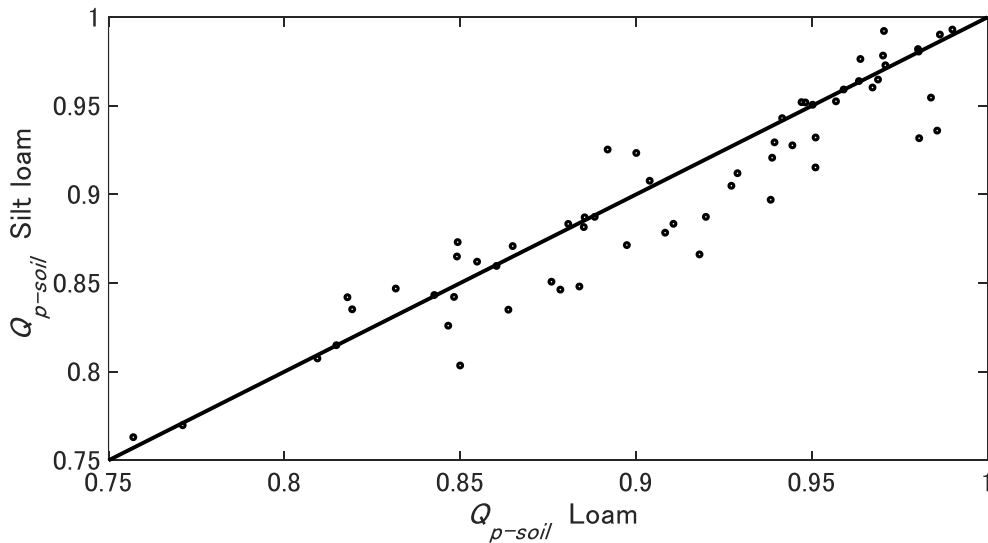


図 5.11 Loam と Silt loam の Q_{p-soil} の散布図(無降雨期間 30 日の初期条件).

5.5.3 初期条件の違いがピーク流量に与える影響

前節では同じ無降雨期間を経た, 4 つの土壌タイプのピーク流量の違いを示した(図 5.7 における縦に並んだ 4 つの★の土壌タイプの比較). 本節では, 同じ土壌タイプでも無降雨期間の長さによってピーク流量がどの程度変化するのか(図 5.7 における同一曲線内の 4 つの★の初期条件の比較)を示す. $Q_{p-init\pm}$ を次式で定義する.

$$Q_{p-init+} = \frac{\max(q_{p-init})}{\text{mean}(q_{p-init})} \quad (5.48)$$

$$Q_{p-init-} = \frac{\min(q_{p-init})}{\text{mean}(q_{p-init})} \quad (5.49)$$

q_{p-init} はある土壌タイプにおいて4つの初期条件(無降雨期間3日, 7日, 14日, 30日)のもとで計算されるピーク流量, $\max(q_{p-init})$ はその最大値, $\min(q_{p-init})$ はその最小値, $\text{mean}(q_{p-init})$ はその平均値である. すなわち $Q_{p-init\pm}$ は初期条件の乾湿によってピーク流量がどの程度変動するのかを示す指標となる.

図 5.12 に各流域・イベントにおける $Q_{p-init\pm}$ と総降雨量の関係を示す. 図 5.12 の縦軸で1から離れている点ほど4つの初期条件の間でピーク流量の変動が大きく(初期条件の影響が大きい), 1に近い点はピーク流量の変動が小さい(初期条件の影響が小さい). 総降雨量が300 mm以上の大規模出水では土壌タイプ間で初期条件の影響は小さくなり, 300 mm未満のイベントについては総降雨量が小さくなるにつれて初期条件の影響は大きくなる. また, 初期条件によってピーク流量は最大で0.75~1.25倍程度まで変動し, 変動幅は土壌タイプによっても異なる. 総降雨量が300 mm以上のイベントで違いが小さいのは前節で述べた理由と同様で, ピーク前の事前降雨で流域が十分湿潤な状態になるためだと考えられる. ただし, 500mm付近の2イベントにおいて, 一部の土壌タイプで初期条件の影響が大きくなっている. この2イベントのうち, 総降雨量519mmのイベントは, 多峰性の降雨イベントであり, 土壌タイプと初期条件によって流量がピークに達するタイミングとその流量が大きく異なる. また, 総降雨量475mmのイベントはピーク前の事前降雨が非常に少ない特徴的な時間分布となっており, それ以外のイベントに比べて初期条件がより顕著にピーク流量に影響していた.

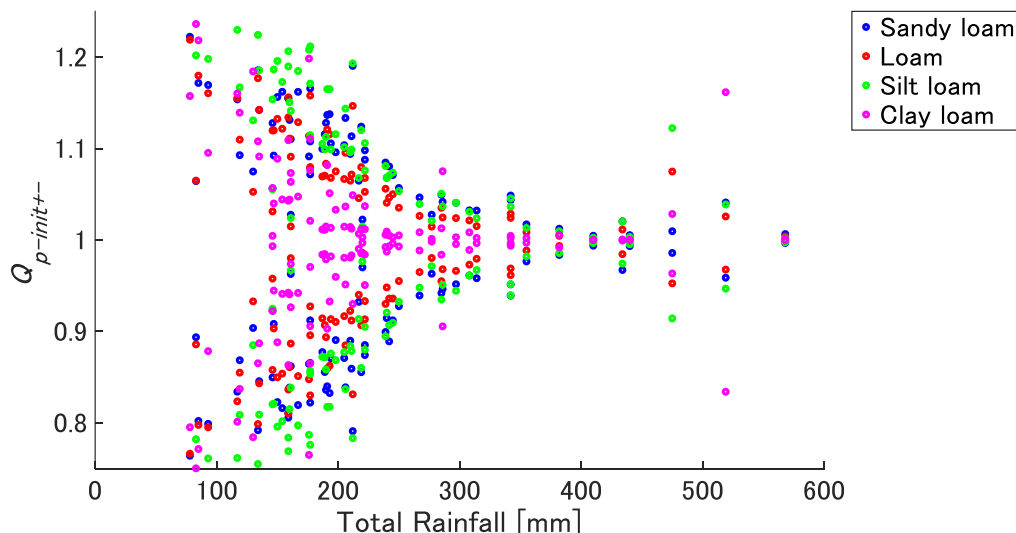


図 5.12 $Q_{p-init\pm}$ と総降雨量の散布図. 縦軸の値が1から離れるほど4つの初期条件の間でピーク流量の変化が大きい(初期条件の影響が大きい).

5.6 まとめ

本章では、水分保持曲線を反映する流量流積関係式を導出し、分布型流出モデルに適用した。導出した流量流積関係式は、水分保持曲線と不飽和透水係数の関数として Brooks-Corey Mualem モデルを用い、斜面に対して垂直方向の平衡状態を仮定することによって解析的に導出した。得られた流量流積関係式を分布型流出モデルの RRI モデルへと適用し、実際の降雨イベントを対象として流出計算を行った。土壌タイプは Sandy loam, Loam, Silt loam, Clay loam の 4 つを設定し、異なる無降雨期間を経た複数の初期条件を用意した。

その結果、いずれかの土壌パラメータを用いることで対象 9 流域中 7 流域において Nash-Sutcliffe 指標が 0.8 以上となり、本研究で提案した流量流積関係式でも観測流量を再現できることを確認した。また、土壌タイプと初期条件によって、流量を低減させる貯留効果は顕著に異なっていた。しかし、十分な降雨によって流域が湿潤な状態になると、初期条件と土壌タイプの違いは小さくなることが分かった。さらに、水分保持曲線がピーク流量に与える影響を分析した結果、次のような知見を得た。

- ・同じ無降雨期間を経た初期条件を用いた場合のピーク流量の大きさは Clay loam > Silt loam \geq Loam > Sandy loam という傾向にあった。
- ・初期条件の違い(無降雨期間の長さ)によって最大で 1.25 ~ 0.75 倍程度ピーク流量が変動し、その変動幅は降雨規模と土壌タイプによって異なっていた。
- ・土壌タイプと初期条件によるピーク流量の違いは、初期条件を作成する事前計算における、表面流発生までの水量を表す S_{sat} の違いに対応していた。

本章では土層厚 L と飽和透水係数 k_s を固定したが、どちらも降雨流出現象に大きな影響を及ぼすパラメータである。 L を小さくすると土壌の貯留量が減少し、 k_s を小さくすると排水性能が低下することから、どちらも表面流が発生しやすくなり水分保持曲線の影響は小さくなることが予想される。逆に、 L と k_s を大きくすると水分保持曲線の影響は大きくなることが予想される。ただし、 L と k_s を大きくとりすぎると表面流ではなく土層内の飽和側方流がピーク流出の主成分となる可能性があるため、そのような場合に水分保持曲線がどのような影響を及ぼすようになるかは、今後詳細な検討が必要になる。

参考文献

- 1) 谷誠. (2018). 森林土壌の流出緩和効果に関する研究の展開過程, 水文・水資源学会誌, 31(2), 107-121.
- 2) Richards, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums, *Physics*, 1(5), 318-333.
- 3) 椎葉充晴, 立川康人, 市川温, 堀智晴, 田中賢治. (1998). 圃場容水量・パイプ流を考慮した斜面流出モデルの開発, 京都大学防災研究所年報, 第 41 号, B-2, 229-235.
- 4) 立川康人, 永谷言, 寶馨. (2004). 飽和・不飽和流れの機構を導入した流量流積関係式の開

発, 水工学論文集, 48, 7-12.

- 5) 高棹琢馬, 椎葉充晴, 北村英和. (1976). 分布型出水モデルによるシミュレーションと集中化スケール, 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, II-74.
- 6) Kong, J., Shen, C., Luo, Z., Hua, G., & Zhao, H. (2016). Improvement of the hillslope-storage Boussinesq model by considering lateral flow in the unsaturated zone. *Water Resources Research*, 52(4), 2965-2984.
- 7) Van Genuchten, M. T. (1980). A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil science society of America journal*, 44(5), 892-898.
- 8) Mualem, Y. (1976). A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water resources research*, 12(3), 513-522.
- 9) Brooks, R. H., & Corey, A. T. (1966). Properties of porous media affecting fluid flow. *Journal of the irrigation and drainage division*, 92(2), 61-88.
- 10) 菅原快斗, 佐山敬洋. (2021). 水分保持曲線を反映する流量流積関係式の導出と分布型流出モデルへの適用. 土木学会論文集 B1 (水工学), 77(1), 124-135.
- 11) Troch, P. (1992). Conceptual basin-scale runoff process models for humidcatchments : Analysis, synthesis and applications, *Ph.D. thesis. GhentUniv.*, Ghent, Netherlands.
- 12) Sayama, T., Ozawa, G., Kawakami, T., Nabesaka, S., & Fukami, K. (2012). Rainfall-runoff-inundation analysis of the 2010 Pakistan flood in the Kabul River basin. *Hydrological Sciences Journal*, 57(2), 298-312.
- 13) Sayama, T., Yamada, M., Sugawara, Y., & Yamazaki, D. (2020). Ensemble flash flood predictions using a high-resolution nationwide distributed rainfall-runoff model: case study of the heavy rain event of July 2018 and Typhoon Hagibis in 2019. *Progress in Earth and Planetary Science*, 7(1), 1-18.
- 14) Simunek, J., Van Genuchten, M. T., & Sejna, M. (2005). The HYDRUS-1D software package for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media. *University of California-Riverside Research Reports*, 3, 1-240.

6章 パイプ流の影響を考慮した流量流積関係式の導出と流域貯留量への影響

6.1 はじめに

前章では水分保持曲線を反映する流量流積関係式を導出し、分布型流出モデルへと適用した。また、構築した分布型流出モデルを用いて流出計算を行い、現実的な土壌パラメータの下で観測流量を再現可能であることを確認した。一方で、飽和透水係数についても実測に近い値を用いた場合には、次のような問題が発生する。従来の流出モデルは、豪雨時の早い降雨流出応答を飽和帯が発達した地表面流がもたらすものとしてモデル化を行ってきた。実際、3次元の Richards 式を数値的に解くことで、現実的な飽和透水係数の下では地表面流が降雨ピーク時の主要な流出成分となることが示されている¹⁾。一方で、詳細な観測データを用いたハイドログラフの成分分離を行った結果から、降雨イベント時に流出する雨水の多くは土壌に貯留されていた雨水であることが明らかになっている²⁾。また、土壌中に存在するパイプと呼ばれる大空隙内の流れがピーク時における側方浸透流の多くを占めることがわかると³⁾、表面流ではなく土壌中のパイプ流が速やかな降雨流出応答を生み出すという考えが一般的になった。パイプ流のモデル化については、Richards 式と Manning 式を組み合わせることによって雨水流動を詳細に記述する解析手法が提案されている⁴⁾ものの、分布型流出モデルのように流域全体を対象とした計算手法については十分な議論がなされていない。

分布型流出モデルにおいて降雨流出の速やかな応答を土壌内の流れで表現する方法として最も簡単であるのは、飽和透水係数を現実の値よりも大幅に大きくとることである。実際、近年の大規模洪水を分布型流出モデルで再現した研究⁵⁾や分布型流出モデルのパラメータ最適化についての研究⁶⁾において 0.1~0.01 [m/sec]程度の非常に大きい飽和透水係数が用いられている。このような方法は非常に簡便である一方で、前章で提案した流量流積関係式のように実際の観測・実験データから飽和透水係数を決定することができない。また、土層全体の飽和透水係数を大きくとった場合には、土壌からの排水が過剰に進み前章のような方法では現実的な初期条件を設定することが困難になる可能性もある。これらの問題を解決するためには、パイプのような土壌からの高速排水と現実の飽和透水係数に基づく遅い飽和側方流を両立できるようなモデルが必要になる。

そこで、本章では土層の一部の飽和透水係数が異なるパイプ流を想定した流量流積関係式を導出し、分布型流出モデルへと適用する。そして、パイプが有る場合と無い場合及び土層全体が高透水係数である場合にどのような違いがあるのかを分析する。

6.2 パイプ流を考慮した流量流積関係式の導出

6.2.1 想定する斜面と基礎式

本章で想定する斜面の模式図を図 6.1 に示す。斜面に沿って下方に x 軸を、斜面から垂直方向に z 軸をとる。 $z = 0$ に不透水性の基岩が存在し、土層厚は L 、斜面の傾斜角は ϕ である。 $L_1 < z < L_2$ の範囲に透水係数の異なるパイプが存在し、このパイプからの流量 q_p と $0 \leq z \leq L_1$ の下部土層からの流量 q_{sd} と $L_2 \leq z \leq L$ の上部土層からの流量 q_{su} の和が側方方向の総流量 q となる。ただし、本章ではパイプは飽和透水係数のみが異なるものとし、周囲の土層との土壌特性の違いや雨水のやり取りについては考慮しない。

x 軸と z 軸方向のダルシー則は次式となる。

$$q_x = -K \frac{\partial \psi}{\partial x} + K \sin \phi \quad (6.1)$$

$$q_z = -K \frac{\partial \psi}{\partial z} - K \cos \phi \quad (6.2)$$

q_x と q_z は x 軸と z 軸方向の単位流量、 ψ は圧力水頭、 K は不飽和透水係数である。 x 軸方向の圧力水頭変化が小さい、すなわち斜面方向は重力流れが支配的であると考え、

$$q_x = K \sin \phi \quad (6.3)$$

となる。したがって x 軸方向の総流量 q は次のようになる。

$$q = \int_0^L q_x dz = \sin \phi \int_0^L K dz \quad (6.4)$$

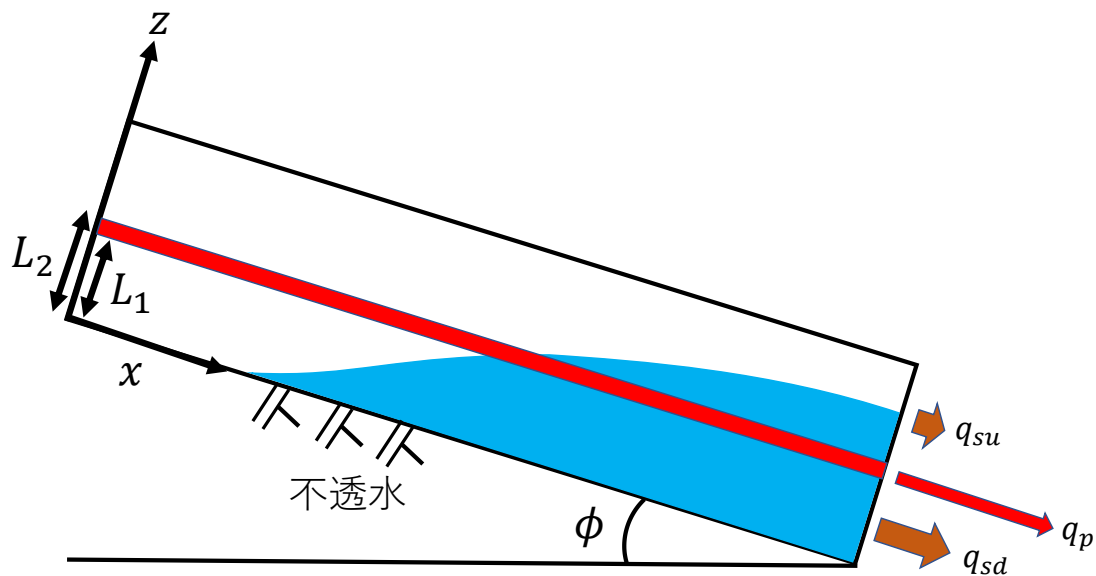


図 6.1 土層内に高透水係数のパイプが存在する斜面の模式図。

貯留量 S を次式で定義する.

$$S = \int_0^L \theta dz \quad (6.5)$$

θ は体積含水率である. 前章と同様に, z 軸方向の水分量分布を一様に定めるため $q_z = 0$ すなわち z 軸方向の平衡分布を仮定する.

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\cos \phi \quad (6.6)$$

$\theta - \psi - K$ 関係には Brooks Corey-Mualem のモデルを用いる

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} \left(\frac{\psi_e}{\psi}\right)^\lambda & (\psi < \psi_e) \\ 1 & (\psi \geq \psi_e) \end{cases} \quad (6.7)$$

$$K = K_s \cdot S_e^n \quad (6.8)$$

S_e は有効飽和度, θ_s は飽和体積含水率, θ_r は残留体積含水率, ψ_e は空気侵入圧, λ は非線形性についてのパラメータ, $n = 2 + l + \frac{2}{\lambda}$ である. 飽和透水係数 K_s は z によって次のように変わるものとする.

$$K_s = \begin{cases} k_s & (0 \leq z \leq L_1, L_2 \leq z \leq L) \\ k_p & (L_1 < z < L_2) \end{cases} \quad (6.9)$$

したがって, 各領域からの流量と総流量は次のようになる.

$$q_{sd} = k_s \sin \phi \int_0^{L_1} S_e^n dz \quad (6.10)$$

$$q_p = k_p \sin \phi \int_{L_1}^{L_2} S_e^n dz \quad (6.11)$$

$$q_{su} = k_s \sin \phi \int_{L_2}^L S_e^n dz \quad (6.12)$$

$$q = \int_0^L q_x dz = q_{sd} + q_p + q_{su} \quad (6.13)$$

6.2.2 飽和帯が発生している場合

飽和帯の水深を h とする. 式(6.6)から圧力水頭の分布は,

$$\psi = (h - z) \cos \phi + \psi_e \quad (6.14)$$

となる. 体積含水率と貯留量は式(6.5)と式(6.7)から次式となる.

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left(\frac{\psi_e}{(h - z) \cos \phi + \psi_e} \right)^\lambda \quad (6.15)$$

$$S = \theta_s h + \theta_r (L - h) + \frac{(\theta_s - \theta_r) \psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(1 - \left(\frac{(h - L) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} \right) \quad (6.16)$$

また, 飽和帯が発生する貯留量 S_{thre} が次式で得られる.

$$S_{thre} = \lim_{h \rightarrow 0} S = \theta_r L + \frac{(\theta_s - \theta_r) \psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(1 - \left(\frac{\psi_e - L \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} \right) \quad (6.17)$$

6.2.2.1 $0 < h \leq L_1$ ($S_{thre} < S \leq S(h = L_1)$)の場合

以下 $0 \leq h \leq L_1$ ($S_{thre} < S \leq S(h = L_1)$) の水深が下部土層にある場合を考える。下部土層では飽和帯と不飽和帯の両方が存在するので式(6.10)と式(6.15)から

$$q_{sd} = k_s h \sin \phi + k_s \sin \phi \int_h^{L_1} \left(\frac{\psi_e}{(h-z) \cos \phi + \psi_e} \right)^{n\lambda} dz \quad (6.18)$$

となる。表記を簡単にするため次のような関数を導入する。

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \sin \phi \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\psi_e}{(h-z) \cos \phi + \psi_e} \right)^{n\lambda} dz \\ &= \frac{\psi_e \sin \phi}{(1 - n\lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{(h-z_1) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} - \left(\frac{(h-z_2) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

すなわち q_{sd} は次式となる。

$$q_{sd} = k_s h \sin \phi + k_s f(h, L_1) \quad (6.20)$$

パイプと上部土層は不飽和部のみ存在するため次のようになる。

$$q_p = k_p f(L_1, L_2) \quad (6.21)$$

$$q_{su} = k_s f(L_2, L) \quad (6.22)$$

6.2.2.2 $L_1 < h < L_2$ ($S(h = L_1) < S < S(h = L_2)$)の場合

$L_1 < h < L_2$ ($S(h = L_1) < S < S(h = L_2)$) の水深がパイプ内にある場合を考える。この時土層下部は完全に飽和しているため、

$$q_{sd} = k_s L_1 \sin \phi \quad (6.23)$$

となる。また、パイプは飽和と不飽和部の両方が存在するため、

$$q_p = k_p (h - L_1) \sin \phi + k_p f(h, L_2) \quad (6.24)$$

となり、土層上部は不飽和部のみ存在するため、

$$q_{su} = k_s f(L_2, L) \quad (6.25)$$

となる。

6.2.2.3 $L_2 \leq h \leq L$ ($S(h = L_2) \leq S \leq \theta_s L$)の場合

$L_2 \leq h \leq L$ ($S(h = L_2) \leq S \leq S(h = L)$) の水深が土層上部にある場合を考える。この時土層下部とパイプは完全に飽和しているため、

$$q_{sd} = k_s L_1 \sin \phi \quad (6.26)$$

$$q_p = k_p (L_2 - L_1) \sin \phi \quad (6.27)$$

となる。土層上部は飽和と不飽和部の両方が存在しているため、次式となる。

$$q_{su} = k_s (h - L_2) \sin \phi + k_s f(h, L) \quad (6.28)$$

6.2.3 飽和帯が発生していない場合 ($S \leq S_{thre}$)

以下 $S \leq S_{thre}$ の飽和帯が発生していない場合を考える。 $z = 0$ における圧力水頭を ψ_b とす

ると、式(6.6)から

$$\psi = \psi_b - z \cos \phi \quad (6.29)$$

となる。体積含水率と貯留量は式(6.5)と式(6.7)から次式となる。

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left(\frac{\psi_e}{\psi_b - z \cos \phi} \right)^\lambda \quad (6.30)$$

$$S = \theta_r L + \frac{(\theta_s - \theta_r) \psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{\psi_b}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} - \left(\frac{\psi_b - L \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} \right) \quad (6.31)$$

土層全体が不飽和であるので土層下部の流量は、

$$q_{sd} = k_s \sin \phi \int_0^{L_1} \left(\frac{\psi_e}{\psi_b - z \cos \phi} \right)^{n\lambda} dz \quad (6.32)$$

である。表記を簡単にするため次のような関数を導入する。

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2) &= \sin \phi \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{\psi_e}{\psi_b - z \cos \phi} \right)^{n\lambda} dz \\ &= \frac{\psi_e \sin \phi}{(1 - n\lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{\psi_b - z_1 \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} - \left(\frac{\psi_b - z_2 \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

すなわち q_{sd} は次のようになる。

$$q_{sd} = k_s g(0, L_1) \quad (6.34)$$

同様にパイプと土層上部の流量が求まる。

$$q_p = k_p g(L_1, L_2) \quad (6.35)$$

$$q_{su} = k_s g(L_2, L) \quad (6.36)$$

6.2.4 $L < h$ ($\theta_s L < S$) の表面流が発生している場合

以下 $L < h$ ($\theta_s L < S$) の表面流が発生している場合を考える。前章と同様にダルシー則とマニング則の和から流量を計算し、 $\frac{\partial q}{\partial S}$ が連続となるように補正項を加えると次の流量流積関係式が得られる。

$$S = \theta_s L + h - L \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} q &= k_s L_1 \sin \phi + k_p (L_2 - L_1) \sin \phi + k_s (L - L_2) \sin \phi \\ &\quad + \frac{\sqrt{\sin \phi}}{n_s} (h - L)^{\frac{5}{3}} + \frac{k_s n \sin \phi}{\theta_s - \theta_r} (h - L) \end{aligned} \quad (6.38)$$

6.2.5 得られた流量流積関係式のまとめ

以上の流量流積関係式をまとめると次のようになる。

$S \leq \theta_r L$: 流れなし

$$\forall S \quad q = 0 \quad (6.39)$$

$\theta_r L < S \leq S_{thre}$: 不飽和帯のみ

$$S = \theta_r L + \frac{(\theta_s - \theta_r) \psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{\psi_b}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} - \left(\frac{\psi_b - L \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} \right) \quad (6.40)$$

$$q = k_s g(0, L_1) + k_p g(L_1, L_2) + k_s g(L_2, L) \quad (6.41)$$

$$g(z_1, z_2) = \frac{\psi_e \sin \phi}{(1 - n\lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{\psi_b - z_1 \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} - \left(\frac{\psi_b - z_2 \cos \phi}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} \right) \quad (6.42)$$

$S_{thre} < S \leq \theta_s L$: 飽和帯が発生

$$S = \theta_s h + \theta_r (L - h) + \frac{(\theta_s - \theta_r) \psi_e}{(1 - \lambda) \cos \phi} \left(1 - \left(\frac{(h - L) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1-\lambda} \right) \quad (6.43)$$

(1) $S_{thre} < S \leq S(h = L_1)$: 水深が土層下部に存在

$$q = k_s h \sin \phi + k_s f(h, L_1) + k_p f(L_1, L_2) + k_s f(L_2, L) \quad (6.44)$$

$$f(z_1, z_2) = \frac{\psi_e \sin \phi}{(1 - n\lambda) \cos \phi} \left(\left(\frac{(h - z_1) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} - \left(\frac{(h - z_2) \cos \phi + \psi_e}{\psi_e} \right)^{1-n\lambda} \right) \quad (6.45)$$

(2) $S(h = L_1) < S < S(h = L_2)$: 水深がパイプ内に存在

$$q = k_s L_1 \sin \phi + k_p (h - L_1) \sin \phi + k_p f(h, L_2) + k_s f(L_2, L) \quad (6.46)$$

(3) $S(h = L_2) \leq S \leq \theta_s L$: 水深が土層上部に存在

$$q = k_s L_1 \sin \phi + k_p (L_2 - L_1) \sin \phi + k_s (h - L_2) \sin \phi + k_s f(h, L) \quad (6.47)$$

$\theta_s L < S$: 表面流が発生

$$S = \theta_s L + h - L \quad (6.48)$$

$$q = k_s L_1 \sin \phi + k_p (L_2 - L_1) \sin \phi + k_s (L - L_2) \sin \phi + \frac{\sqrt{\sin \phi}}{n_s} (h - L)^{\frac{5}{3}} + \frac{k_s n \sin \phi}{\theta_s - \theta_r} (h - L) \quad (6.49)$$

6.3 計算条件

6.3.1 流量流積関係の計算条件

新しく得られた流量流積関係式の挙動を確認するため、各種パラメータの下で計算を行う。特に、前章で導出した流量流積関係式から新たに追加されたパラメータが及ぼす影響について分析する。なお、以下ではパラメータの意味をより明確にするため $L_p = L_2 - L_1$ として、パラメータ k_p, L_1, L_p に着目する。ここで各パラメータの物理的意味について述べる。 k_p はパイプの飽和透水係数であり、パイプの排水速度に影響する。 L_1 はパイプ底面の高さであり、 L_1 によってパイプへの雨水の入りやすさが変わる。 L_p はパイプの太さであり、パイプの容量に相当する。

流量流積関係の計算に用いるパラメータは前章で示した Loam のパラメータを用いる。表 6.1 に Loam のパラメータを再掲する。また、それ以外のパラメータについては $k_s = 0.001$ [m/sec], $\phi = 15^\circ$, $L = 1$ [m] とした。新たに追加されたパラメータはそれぞれ $k_p = 0.001, 0.01, 0.025$ [m/sec] $L_1 = 0.2, 0.3, 0.4$ [m] $L_p = 0.1, 0.2, 0.3$ の場合を計算する。これらのパラメータは流量流積関係の違いが明確になるように選択した。

表 6.1 Loam の土壌パラメータ.

Soil type	θ_s	θ_r	λ	n	ψ_e [m]	S_{thre} [m]
Loam	0.46	0.03	0.22	11.6	-0.11	0.34

6.3.2 分布型流出モデルの計算条件

新たに導出した流量流積関係式を前章と同様の手法で分布型流出モデルの RRI モデルへと適用した. 開発した分布型流出モデルの計算から, パイプが有る場合と無い場合及び土層全体の飽和透水が高い場合で流量変化と流域内での表面流の発生がどのように異なるのかを分析する. 計算に用いる飽和透水係数以外の土壌パラメータは前節で示したものをを用いる. また, 現実のパイプ構造は場所によって異なることが予想されるが, 本章では流域一様に $L_1 = 0$ [m], $L_p = 0.1$ [m] とする. 飽和透水係数については次の 4 Case の場合を考える.

(Case 1) $k_s = k_p = 0.001$ [m/sec] のパイプが存在しない場合

(Case 2) $k_s = k_p = 0.05$ [m/sec] の土層全体が高透水係数の場合

(Case 3) $k_s = 0.001$ [m/sec], $k_p = 0.01$ [m/sec] のパイプの飽和透水係数が土層の 10 倍である場合

(Case 4) $k_s = 0.001$ [m/sec], $k_p = 0.05$ [m/sec] のパイプの飽和透水係数が土層の 50 倍である場合

対象とする流域とイベントについては, 前章で示した二瀬ダムのイベント 1 を対象とする. 二瀬ダムの流域面積は 170km^2 であり, 降雨イベントの総降雨量は 382mm である. 初期条件は次のような事前計算から決定した. 降雨強度 10 [mm/hour] の雨が 40 時間続き, その後は 30 日間無降雨が続く降雨データを作成し, 初期の貯留量が 0 という条件のもとで計算を行う. 計算終了時の貯留量分布を初期条件として使用する.

6.4 結果と考察

6.4.1 パイプに関するパラメータが流量流積関係に与える影響.

図 6.2 に k_p を変化させたときの流量流積関係を示す. $L_1 = 0.3$ [m], $L_p = 0.1$ [m] である. また, $h = 0$ は飽和帯が発生し始める点, $h = L_1$ は水深がパイプの下端に到達する点, $h = L_2$ は水深がパイプの上端に到達する点である. 飽和帯が発生するまではパイプ内の水量はそれほど多くならないため, 不飽和透水係数の非線形性の影響が大きくなり k_p の違いはそれほど現れない. 飽和帯が発生するとパイプ内の水量も徐々に増えていくため k_p の違いが徐々に表れ始める. そして, $h = L_1$ に達するとそれ以降の水深の増分はすべてパイプ内のもとなるため k_p の違いが最も大きく表れる範囲となる. $h = L_2$ に達するとそれ以降の貯留量の増分はすべて上部土層のもとなるため, どの場合でも同じ変化を示す. k_p の値を大きく変えたとしても, パイプの太さが L_p に限定されるため土層が完全に飽和している際の流量は大きく変わらない. $h = L_2$ に達する前ではパイプの影響で流量は大きく増加するが, $h = L_2$ に達した後は流量の増加率は急激に小さくなる. これはパイプがあっても雨水を排水しきれない状態に相当し, パイプの閉塞などが想定される.

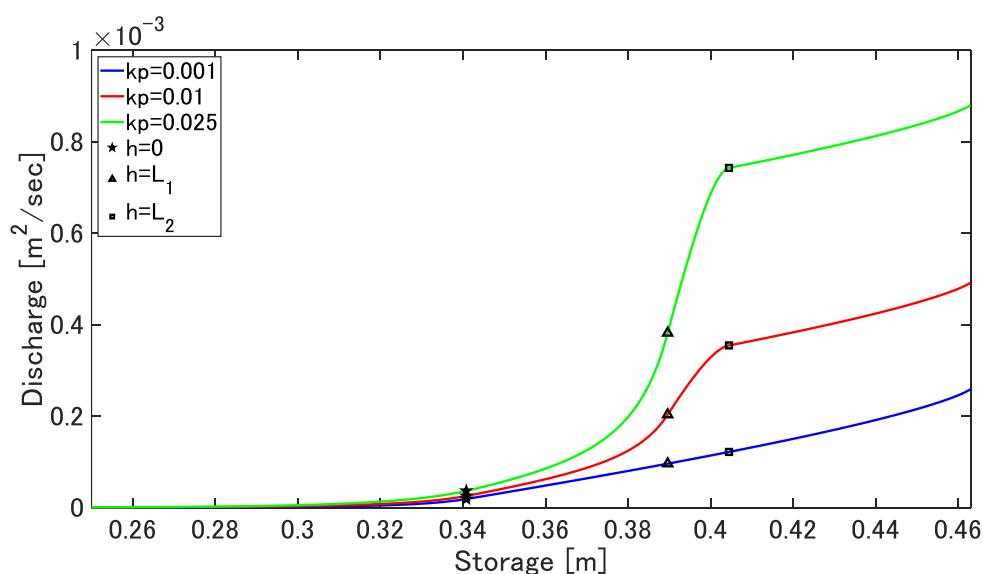


図 6.2 k_p を変化させたときの流量流積関係の違い. $L_1 = 0.3$ [m], $L_p = 0.1$ [m]. $h = 0$ は飽和帯が発生し始める点, $h = L_1$ は水深がパイプの下端に到達する点, $h = L_2$ は水深がパイプの上端に到達する点.

図 6.3 に L_1 を変化させたときの流量流積関係を示す。 $k_p = 0.01$ [m/sec], $L_p = 0.1$ [m] である。 z 軸方向の平衡分布を仮定しているため、 L_1 が小さいほど S が小さい場合でもパイプ内の水量が多くなる。 k_p の場合と同じく飽和帯が発生するまでは不飽和透水係数の非線形性の影響が大きいため L_1 の違いがそれほど現れない。 飽和帯が発生し始めると、 L_1 が小さいほどより少ない貯留量で流量が増加し始める。 同じく L_1 が小さいほどより少ない貯留量でパイプが完全に飽和し、水深が上部土層へと達する。 異なるのはパイプの位置だけなので、 $h = L_2$ に達するとどの場合でも同じ変化を示すようになる。

図 6.4 に L_p を変化させたときの流量流積関係を示す。 $k_p = 0.01$ [m/sec], $L_1 = 0.2$ [m] である。 飽和帯が発生するまでの違いがないのは k_p と L_1 の場合と同様だが、 飽和帯が発生してから $h = L_1$ となるまでもほとんど違いが現れない。 これは、パイプの範囲が大きくなったとしても、大きくなった範囲で増加する水量が非常に少ないために流量が増加しないことが原因と考えられる。 一方で、 $h = L_2$ となると大きくなったパイプの範囲の水量が増加するため L_p による違いが大きくなる。

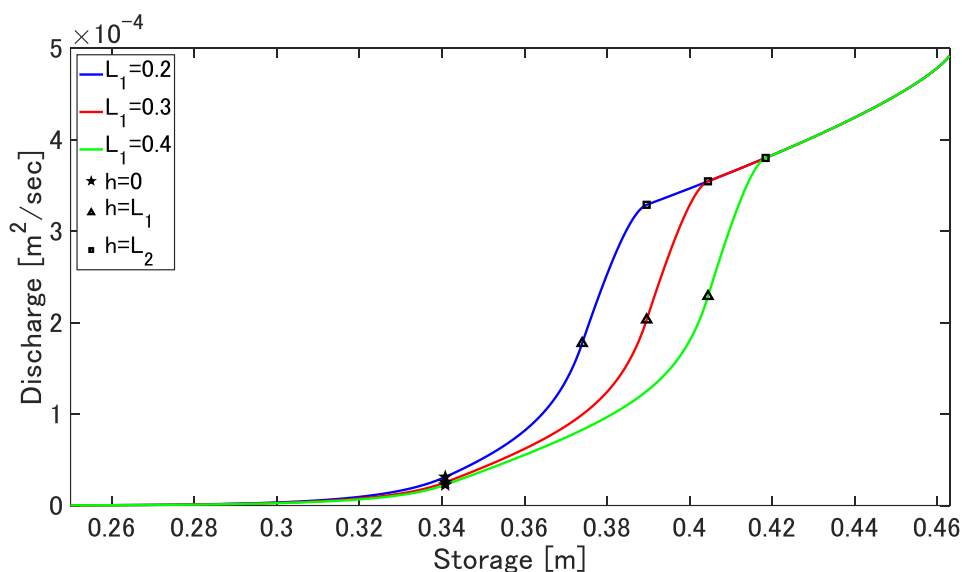


図 6.3 L_1 を変化させたときの流量流積関係の違い。 $k_p = 0.01$ [m/sec], $L_p = 0.1$ [m].

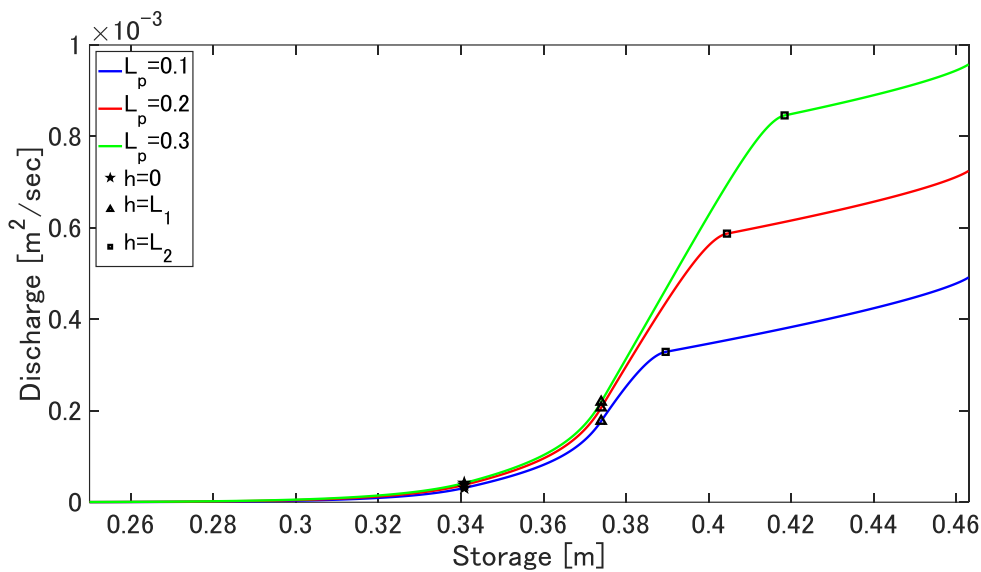


図 6.4 L_p を変化させたときの流量流積関係の違い. $k_p = 0.01$ [m/sec], $L_1 = 0.2$ [m].

6.4.2 流量変化と流域の貯留量

図 6.5 に前節で示した各 Case のパラメータの下で計算された二瀬ダム流域の流量変化を示す. また, 併せて貯留量の流域平均値の変化を図 6.6 に示す. $S = 0.34$ [m]は飽和帯が発生し始める貯留量, $S = 0.46$ [m]は土層が完全に飽和する貯留量である.

イベント開始時から最初のピーク前の Time 70 [hour]頃までは, それぞれのケースでハイドログラフに顕著な違いは見られない. これは流域全体が乾燥しており, 降雨があってもほとんどのセルで不飽和側方流が主要な成分となり, 飽和透水係数よりも不飽和透水係数の非線形性によって流量が非常に小さくなっているためだと考えられる. 実際, 貯留量変化を見てもどの Case でもほとんど同じ貯留量変化を示している. Time 70~80 [hour]における最初のピークでは, 各 Case の違いが最も大きく出ている. ピーク流量は Case2 と Case4 が高く, Case1 と Case3 はそれよりも低く観測流量に近い値となっている.

Case2 は土層全体が $k_s = 0.05$ [m/sec]の高透水係数の場合で, 飽和帯が発生する貯留量 $S = 0.34$ [m]に達して, 降雨は速やかに排水される状態になり, 最初のピークでも流量は非常に大きくなっている. Case4 は $k_p = 0.05$ [m/sec]の Case1 と同じ値の飽和透水係数であるパイプが存在している場合である. $L_1 = 0$ [m]であるのでこの場合も同じく, 飽和帯が発生する貯留量に達すると降雨は速やかに排水される状態になる. この二つのケースは, 飽和帯が発生している場合は同じ飽和透水係数に基づいて排水が行われるため非常に似た波形を示しているが, 次のような違いがハイドログラフに影響している可能性がある. 一つは土層全体が高透水係数である Case2 の方が, 雨水が排水されやすいという点である. 最初のピークに達する前では Case4 の方が Case2 よりも流量が大きい. これは, 初期条件作成時の排水量が Case2 の方が多くなり, Case4 よりも乾燥してより貯留できる状態になったためであると考えられる. 実際, 計算開始時の流域平均貯留量で 0.03 [m] (30mm)の差が

出ている。一方で、最初のピーク値は逆に Case2 の方が Case4 よりも流量が若干大きい。これが二つ目の違いで、パイプの排水量に限界があることが理由ではないかと考えられる。Case4 のパイプの飽和透水係数は雨水を排水するには十分な値であるが、雨水が斜面の下部において集積すると水深が増加し、パイプの排水速度が十分であってもパイプ部が満水になり、雨水の一部が土層の流れに配分されピーク流量が若干小さくなったのではないかと考えられる。

Case1 はパイプが存在しない場合で、最初のピークまでどの Case よりも流量が低い。これは、飽和透水係数が低く表面流が早い流出の成分となるため、飽和帯が発生すると速やかに雨水を排水する Case2 と Case4 よりも、速やかな降雨流出応答を示すようになるまでに必要な貯留量が多いためである。貯留量変化を見ても $S = 0.34$ [m] に達しても貯留量は増加し続け、ピーク時刻付近で表面流が発生する貯留量 $S = 0.46$ [m] に達する。Case3 はパイプが存在するが $k_p = 0.01$ [m/sec] と Case4 よりも飽和透水係数が低い場合である。同じパイプを有する Case4 と比べて最初のピーク流量は低くなっている。これはパイプの排水速度が低いため十分な排水が行われずに、表面流が発生するまで流量が増加しにくくなったことが理由である。ピーク値が Case1 よりも若干多いのは、表面流が流出の主成分であるのは同じだが、パイプからの流量も寄与していることが原因と考えられる。貯留量変化を見ても、飽和帯が発生する貯留量に達しても貯留量は増加し続けるものの Case1 ほど貯留量は多くなく、パイプからの排水と表面流の両方が寄与していると推察できる。Time 80 [hour] より後の二度目のピークでは、Case1 と Case3 で流域の多くが表面流が発生するような湿潤状態になり、どの Case でも降雨のほとんどが流出する状態になったためピーク流量に違いがなくなっている。

Time 125 [hour] 前後の低減部では、Case1 が最も流量が多く、次いで Case3 で、さらに Case2 と Case4 が同程度に低くなっている。Case1 が最も高いのは表面流がなくなっても土層は飽和に近い状態にあり、飽和側方流の成分が多いためである。Case3 も同様であるがパイプが存在するため、Case1 よりも低減しやすい。Case2 と Case4 は早い流出を示す飽和側方流がなくなると不飽和側方流が流出の主成分となるため、通減部の流量が低くなっている。

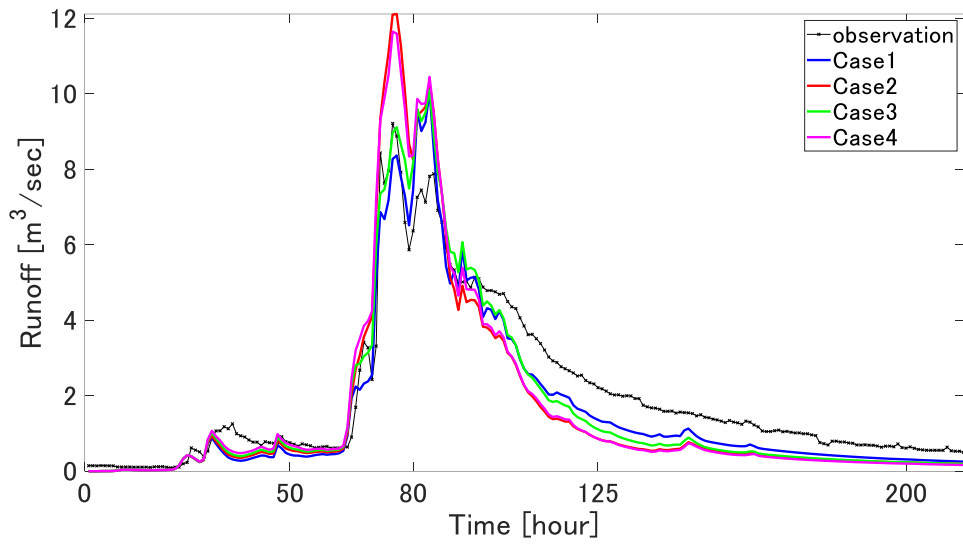


図 6.5 各 Case のパラメータを用いて計算された二瀬ダム流域の流量変化.

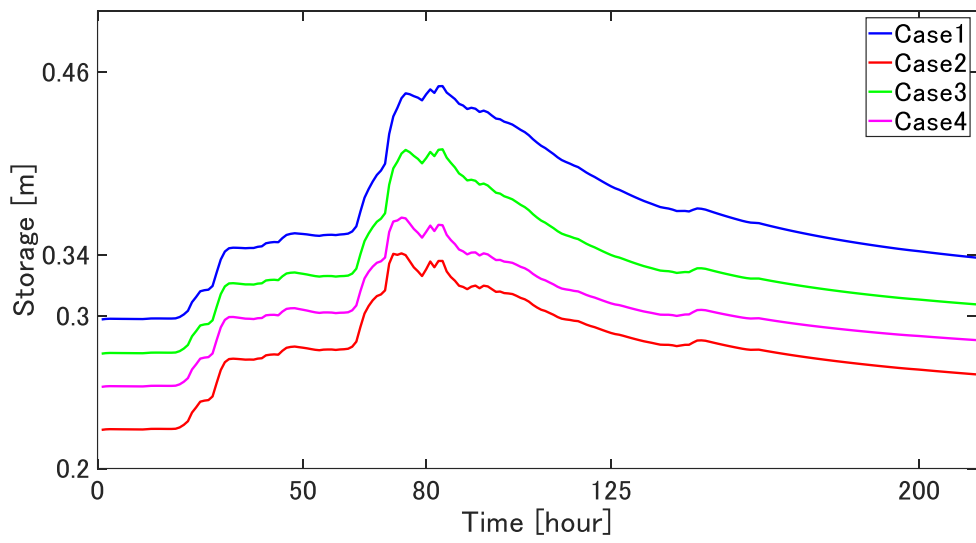


図 6.6 各 Case における貯留量の流域平均値.

6.4.3 ピーク時刻に発生している流れの分布

ピーク時の表面流の発生範囲が各 case でどのように変わるのかを分析する。どの Case でも速やかな降雨流出を示す二つ目のピークである Time 84 [hour]の結果を示す。図 6.7, 図 6.8, 図 6.9, 図 6.10 にそれぞれ Case1, Case2, Case3, Case4 の二つ目のピーク時刻に発生している流れの流域分布を示す。各流れの貯留量の範囲は、不飽和側方流は $\theta_r L < S \leq S_{thre}$, 飽和・不飽和側方流は $S_{thre} < S \leq \theta_s L$, 表面流は $\theta_s L < S$ である。図 6.7 から, $k_s = 0.001$ [m/sec]程度の飽和透水係数ではピーク時刻には流域の大部分で表面流が発生し流出の主成分となることがわかる。図 6.8 から, 土層全体が高透水係数の場合はピーク時刻でも表面流はほとんど発生せず飽和側方流が流出の主成分となっている。また飽和帯が発生しているのも河道付近に限定され, 斜面の多くは不飽和側方流のみが発生している。図 6.9 からパイプがあることによって表面流の発生範囲は図 6.7 よりも減っており, 不飽和側方流のセルも増加している。それでも多くのセルで表面流が発生しており $k_p = 0.01$ [m/sec]の排水速度では雨水を排水しきれない可能性が示唆される。図 6.10 から $k_p = 0.05$ [m/sec]程度の排水速度がある場合は図 6.8 の場合と同様に不飽和側方流のみが発生しているセルが多くなる。一方で, 河道付近で発生する流れには違いがみられる。Case4 は Case2 に比べて河道付近で表面流が発生しているセルが増えている。これは, ハイドログラフでもふれたが, パイプの排水速度が速くても斜面下部では水深が増加するため, パイプが満水になってパイプで排水しきれない成分が増えることが原因だと考えられる。河道付近で表面流が発生していてもパイプからの排水は継続されているので, それぞれがどの程度流出に寄与しているかは分布からは判断できず, 今後の検討課題となる。

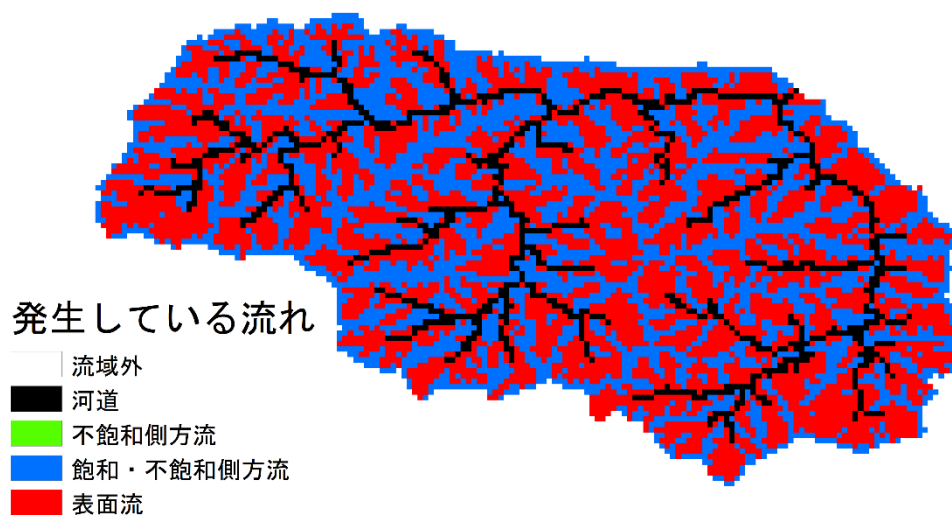


図 6.7 二つ目のピーク時刻 Time 83 [hour]に発生している流れ(Case1).

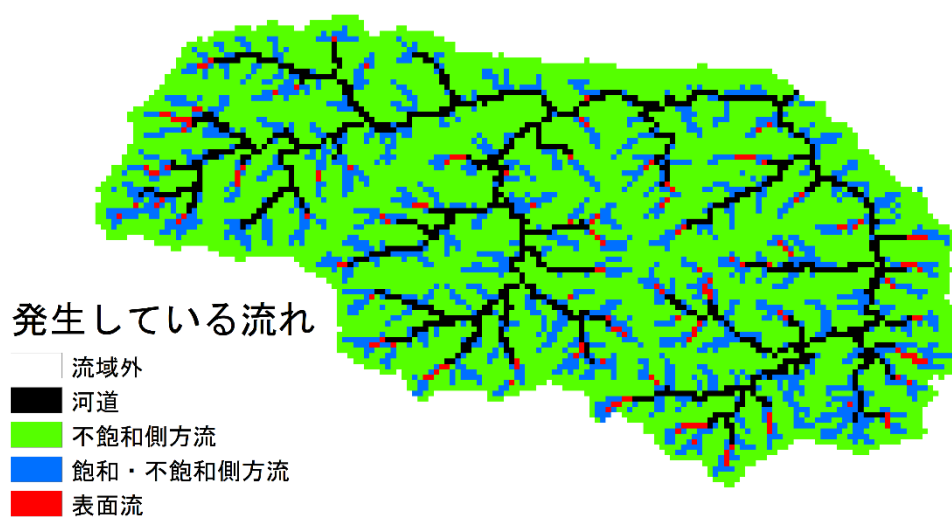


図 6.8 二つ目のピーク時刻 Time 83 [hour]に発生している流れ(Case2).

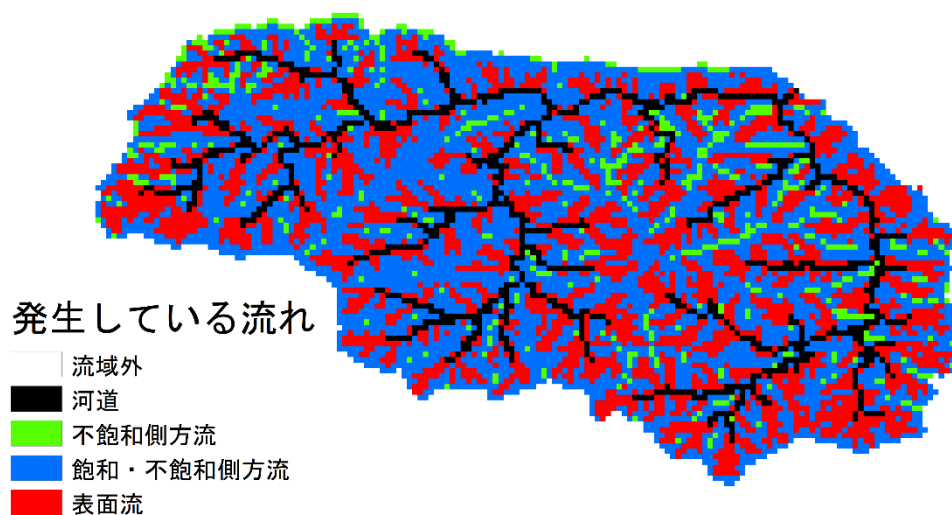


図 6.9 二つ目のピーク時刻 Time 83 [hour]に発生している流れ(Case3).

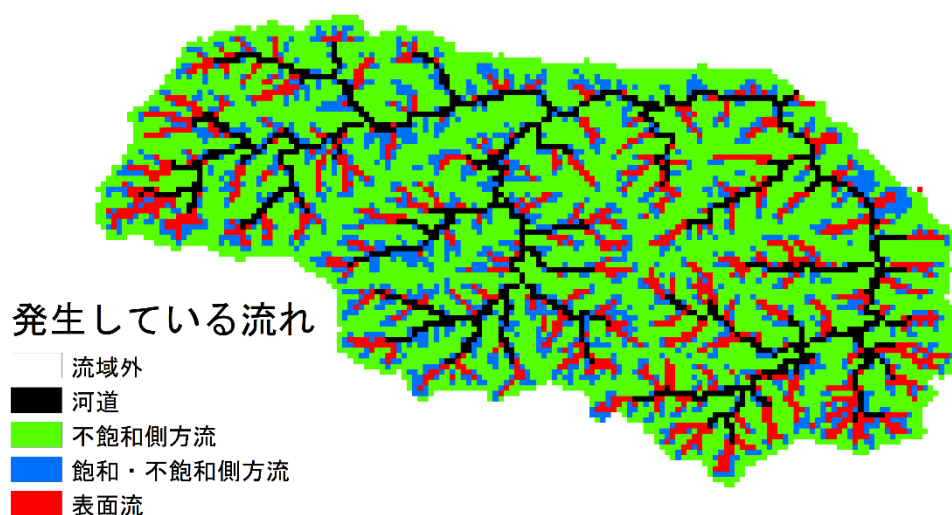


図 6.10 二つ目のピーク時刻 Time 83 [hour]に発生している流れ(Case4).

6.5 まとめ

本章では、土層の一部を高透水係数にしてパイプを考慮した流量流積関係式を導出し、分布型流出モデルへと適用した。導出した流量流積関係式はパイプの飽和透水係数・パイプの高さ・パイプの太さをパラメータとして有し、パイプの排水速度や容量を流量流積関係に反映できる。構築した分布型流出モデルでダム流域を対象として、パイプが有る・無い場合と土層全体が高透水係数である場合の計算を行った。土層全体を高透水係数とした場合とパイプを考慮した場合で、30日の無降雨期間を経て作成された初期条件の流域平均貯留量は約30mm異なっていたものの、ハイドログラフの挙動はほとんど同じであった。ただし、パイプの排水が十分に行われないパラメータではパイプがなく表面流が流出の主成分となる場合の流出挙動に近づくことが分かった。排水速度が十分なパイプがある場合には、土層全体が高透水係数の場合と同様に不飽和側方流のみが発生するセルが多くなった。一方で、河道付近では、土層全体が高透水係数の場合は飽和・不飽和流が発生するセルがほとんどなのに対し、パイプがある場合は集積した雨水でパイプが満水になり表面流が発生するセルがあることが分かった。

参考文献

- 1) Freeze, R. A. (1972). Role of subsurface flow in generating surface runoff: 2. Upstream source areas. *Water Resources Research*, 8(5), 1272-1283.
- 2) Pearce, A. J., Stewart, M. K., & Sklash, M. G. (1986). Storm runoff generation in humid headwater catchments: 1. Where does the water come from?. *Water Resources Research*, 22(8), 1263-1272.
- 3) 北原曜, 寺嶋智巳, 中井裕一郎. (1994). 側方浸透流量に占めるパイプ流量の割合. *日本林学会誌*, 76(1), 10-17.
- 4) Tsutsumi, D., Sidle, R. C., & Kosugi, K. I. (2005). Development of a simple lateral preferential flow model with steady state application in hillslope soils. *Water Resources Research*, 41(12).
- 5) Sayama, T., Yamada, M., Sugawara, Y., & Yamazaki, D. (2020). Ensemble flash flood predictions using a high-resolution nationwide distributed rainfall-runoff model: case study of the heavy rain event of July 2018 and Typhoon Hagibis in 2019. *Progress in Earth and Planetary Science*, 7(1), 1-18.
- 6) 小林健一郎, 寶馨, 立川康人. (2007). 最適化手法による分布型降雨流出モデルのパラメータ推定. *水工学論文集*, 51, 409-414.

結論

本研究は、流域の貯留効果を担う不飽和浸透プロセスの解析手法と降雨流出モデルへの適用について検討を行ったものである。具体的には、鉛直 1 次元の Richards 式の解析解と流量流積関係式の 2 つに着目し、各々の手法の課題を明らかにしたうえで、それを解決するためのいくつかの方法について議論した。以下に、各章で得られた結論を改めて取りまとめる。

第 1 章では、関連する既往研究をまとめた。初めに、森林流域における鉛直不飽和浸透を簡便に解析するため Richards 式の解析解を利用することを考えた。Richards 式を非線形偏微分方程式として解いた解析解はより厳密に現象を記述するものの、観測降雨データといった離散的入力に対する応答を解析することが難しいことを示した。一方、Richards 式を線形偏微分方程式として解いた解析解は、重ね合わせの原理を用いることで離散的入力に対する応答を解析可能であり、より汎用的であることを示した。しかし、そのような解析解であっても、降雨流出モデルへの適用という面ではその適用性が十分に議論されておらず、その検討が重要になると結論付けた。また、不飽和浸透を簡便に記述する別の方法として流量流積関係式に関する既往研究をまとめた。従来の流量流積関係式は斜面に垂直方向の水分量を考慮しておらず土壌の保水性を表す水分保持曲線を考慮できていなかったものの、近年の研究で平衡分布に基づく水分量分布を考えることで水分保持曲線を内包させた流量流積関係式が提案されていることを示した。一方で、不飽和透水係数に用いた関数の物理性やパラメータの推定法に課題があると結論付けた。

第 2 章では、地下水面を有する基岩層における不飽和浸透を想定して、線形化した Richards 式から任意の水分量境界条件と任意の初期分布という条件の下での解析解を導出した。導出の際には、境界条件をより簡単な形で書けるような変数変換を行ったのち、変数分離法で解析解を導出した。また、導出した解析解から任意の深さでの流量を解析的に求めた。得られた解析解を用いて、地下水面がある場合とない場合の不飽和浸透の計算を行った。その結果、地下水面がある場合は、ない場合に比べてより湿潤な状態になりやすいことが分かった。上端と下端の流量の波形はどちらの場合でも似ていたが、その絶対量は異なっていた。また、基岩上の中間流の発生や消失に対応できるように、水分量の時系列データを上部境界へと適用して計算する方法を提案し、仮想的な時系列水分量データを用いて計算を行った。その結果、中間流の発生や消失に伴う、緩やかな水分量変化や浸透した雨水の再配分といったより現実的な挙動を表現できることがわかった。

第 3 章では、鉛直不飽和浸透の特徴を把握するため、土層と風化基岩層における土壌水分観測を行った。観測の結果、鉛直不飽和浸透に関して、基岩層では同程度の時間的な遅れがみられること、基岩層境界付近の水分量変化は土層に比べて鋭敏であることが分かった。離散化を必要としない解析的手法で現実の鉛直不飽和浸透を再現可能であるかを分析するために、圧力水頭を観測し、圧力拡散方程式の解析解を用いた再現計算を行った。解析解はい

いずれかのパラメータを用いることによって、全 14 イベント中 12 イベントで Nash 指標が 0.7 以上となった。一方で、降雨が繰り返し発生するなど現実の拡散係数の変動が大きいイベントにおいては、拡散係数を一定とした解析解では再現が難しいことが分かった。圧力拡散方程式の解析解から流量を解析的に求め、空間的離散化を行わず降雨流出変換を簡易に計算できるようにした。解析から拡散係数が小さく、深さが大きいほど降雨波形はならされ緩やかな流量変化を示すことが分かった。

第 4 章では、重力項を考慮したうえで観測降雨データを入力として計算できる Richards 式の解析解を導出した。重力項を考慮したことにより、降雨波形が拡散しなだらかになる過程だけではなく、鉛直下方へと移流する過程についても計算することが可能になった。弱雨が続く場合など土壌水分の鉛直勾配が小さいときは重力項が卓越するため、より現実的な計算を行うことが可能になった。また、飽和境界を用いた場合の解析解を導出し、Green-Ampt 式で用いられるパラメータとの対応を明らかにした。Green-Ampt 式は様々な土壌に対するパラメータが提示されており、そのパラメータを援用することによって、より簡便に解析解で用いるパラメータを決定できるようにした。

第 5 章では水分保持曲線を反映する流量流積関係式を導出し、分布型流出モデルに適用した。導出した流量流積関係式は、水分保持曲線と不飽和透水係数の関数として Brooks-Corey Mualem モデルを用い、斜面に対して垂直方向の平衡状態を仮定することによって解析的に導出した。得られた流量流積関係式を分布型流出モデルの RRI モデルへと適用し、実際の降雨イベントを対象として流出計算を行った。土壌タイプは Sandy loam, Loam, Silt loam, Clay loam の 4 つを設定し、異なる無降雨期間を経た複数の初期条件を用意した。その結果、いずれかの土壌パラメータを用いることで対象 9 流域中 7 流域において Nash-Sutcliffe 指標が 0.8 以上となり、本研究で提案した流量流積関係式でも観測流量を再現できることを確認した。また、土壌タイプと初期条件によって、流量を低減させる貯留効果は顕著に異なっていた。しかし、十分な降雨によって流域が湿潤な状態になると、初期条件と土壌タイプの違いは小さくなることが分かった。さらに、水分保持曲線がピーク流量に与える影響を分析した結果、初期条件の違い(無降雨期間の長さ)によって最大で 1.25~0.75 倍程度ピーク流量が変動し、土壌タイプと初期条件によるピーク流量の違いはイベント開始時の表面流発生までの水量の違いに対応することがわかった。

第 6 章では、土層の一部を高透水係数にしてパイプを考慮した流量流積関係式を導出し、分布型流出モデルへと適用した。導出した流量流積関係式はパイプの飽和透水係数・パイプの高さ・パイプの太さをパラメータとして有し、パイプの排水速度や容量を流量流積関係に反映できる。構築した分布型流出モデルでダム流域を対象として、パイプが有る・無い場合と土層全体が高透水係数である場合の計算を行った。ハイドログラフと流域で発生する流れの分布から、パイプの排水が十分に行われないパラメータではパイプがない場合と同様に表面流がピーク流出の主成分となることが分かった。排水速度が十分なパイプがある場合には、土層全体が高透水係数の場合と同様に不飽和側方流のみが発生するセルが多くな

った。一方で、河道付近では、土層全体が高透水係数の場合は飽和・不飽和流が発生するセルがほとんどなのに対し、パイプがある場合は集積した雨水でパイプが満水になり表面流が発生するセルがあることが分かった。

本研究で取り扱った解析解は離散的入力に対する応答を計算するため Richards 式が線形であると仮定した。一方で、乾燥時の挙動などをより適切に再現できるようにするためには Richards 式を非線形として扱ったうえで離散的な入力に対する応答を計算可能な解析解が必要になるだろう。また、本研究で導出した流量流積関係式についても、平衡状態に至るまでの不飽和浸透過程を考慮しておらず、その影響も考慮した流量流積関係式が求められる。筆者は、今後もこれらの不飽和浸透に関する課題に取り組み、より高精度な降雨流出モデルの開発という形で研究を社会へと還元していきたいと考えている。最後に、本論文が水文学の発展と今後起こりうる災害の軽減に一助となることを祈念して本論文の結びとする。

付録

ここでは4章で省略したフラックス境界の解析解の導出について詳しく解説する。なお、飽和境界の解析解については斎藤らの研究¹⁾で詳しく導出が示されている。解くべき偏微分方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - V \frac{\partial S}{\partial z} \quad (1)$$

$$D = \frac{k_s}{\alpha(\theta_s - \theta_r)} \quad (2)$$

$$V = \frac{k_s}{\theta_s - \theta_r} \quad (3)$$

S は有効飽和度であり、 t は時間、 z は上端からの深さ、 θ_s は飽和体積含水率、 θ_r は残留体積含水率、 α は水分保持曲線の形状を決定するパラメータ、 k_s は飽和透水係数である。初期・境界条件は次式となる。

$$S(z, t = 0) = 0 \quad (4)$$

$$D \frac{\partial S}{\partial z} - VS \Big|_{z=0} = -\frac{r}{\theta_s - \theta_r} \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} \Big|_{z=\infty} = 0 \quad (6)$$

r は降雨強度である。解析解の導出に用いるラプラス変換を次に示す。

$$L[S(z, t)] = \tau(z, s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) \cdot S(z, t) dt \quad (7)$$

また、ラプラス逆変換は次のようになる。

$$L^{-1}[\tau(z, s)] = S(z, t) \quad (8)$$

式(1)の両辺をラプラス変換し整理すると次式となる。

$$D \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - V \frac{\partial \tau}{\partial z} - s\tau + S(z, 0) = 0 \quad (9)$$

式(4)の初期条件を適用すると、

$$D \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} - V \frac{\partial \tau}{\partial z} - s\tau = 0 \quad (10)$$

となる。これを τ と z についての2階線形微分方程式とみなすと、特性方程式とその解は次のようになる。

$$D\lambda^2 - V\lambda - s = 0 \quad (11)$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{V \pm \sqrt{V^2 + 4Ds}}{2D} \quad (12)$$

これより式(10)の解が得られる。

$$\tau = C_1 \exp(\lambda_+ z) + C_2 \exp(\lambda_- z) \quad (13)$$

C_1 と C_2 は s を含む係数である。この解が式(6)を満たすためには、

$$C_1 = 0 \quad (14)$$

である必要がある。よって

$$\tau = C_2 \exp(\lambda_- z) \quad (15)$$

である。

式(5)の両辺をラプラス変換すると次式が得られる。

$$D \frac{\partial \tau}{\partial z} - V \tau \Big|_{z=0} = -\frac{r}{s(\theta_s - \theta_r)} \quad (16)$$

式(15)と式(16)から、

$$C_2 = -\frac{r}{(\theta_s - \theta_r)(D\lambda_- - V)s} \quad (17)$$

となる。式(12), 式(15), 式(17)を用いて整理する。

$$\tau = \frac{r \cdot \exp\left(\frac{V}{2D}z\right)}{D(\theta_s - \theta_r)} \cdot \frac{\exp\left(-\left(\frac{s}{D} + \left(\frac{V}{2D}\right)^{\frac{1}{2}}\right)z\right)}{s\left(\left(\frac{s}{D} + \left(\frac{V}{2D}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{V}{2D}\right)} \quad (18)$$

この式をラプラス逆変換することで解析解が得られる。まず、次の移動公式を用いる。

$$L^{-1}[\tau(z, as + b)] = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) S\left(z, \frac{t}{a}\right) \quad (19)$$

ここで a と b は定数である。 $a = D$, $b = -\frac{V^2}{4D}$ とすると、

$$L^{-1}\left[\tau\left(z, Ds - \frac{V^2}{4D}\right)\right] = \frac{1}{D} \exp\left(-\frac{V^2}{4D^2}t\right) S\left(z, \frac{t}{D}\right) \quad (20)$$

となる。また、式(18)から、

$$\tau\left(z, Ds - \frac{V^2}{4D}\right) = \frac{r \cdot \exp\left(\frac{V}{2D}z\right)}{D(\theta_s - \theta_r)} \cdot \frac{\exp(-z\sqrt{s})}{\left(s - \left(\frac{V}{2D}\right)^2\right)\left(\sqrt{s} - \frac{V}{2D}\right)} \quad (21)$$

である。この式に次のラプラス逆変換の公式²⁾を適用する。

$$L^{-1}\left[\frac{\exp(-z\sqrt{s})}{(s - c^2)(\sqrt{s} - c)}\right] = \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) + \frac{1}{4c} \exp(c^2t - cz) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} - c\sqrt{t}\right) - \frac{1}{4c} (1 + 2cz + 4c^2t) \exp(c^2t + cz) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + c\sqrt{t}\right) \quad (22)$$

ただし、 c は定数、 erfc は相補誤差関数である。すなわち、

$$L^{-1} \left[\tau \left(z, Ds - \frac{V^2}{4D} \right) \right] \frac{D(\theta_s - \theta_r)}{r \cdot \exp\left(\frac{V}{2D}z\right)} = \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) + \frac{D}{2V} \exp\left(\frac{V^2}{4D^2}t - \frac{V}{2D}z\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} - c\sqrt{t}\right) - \frac{D}{2V} \left(1 + \frac{V}{D}z + \frac{V^2}{D^2}t\right) \exp\left(\frac{V^2}{4D^2}t + \frac{V}{2D}z\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}} + c\sqrt{t}\right) \quad (23)$$

となる. 式(20)と式(23)から $L^{-1} \left[\tau \left(z, Ds - \frac{V^2}{4D} \right) \right]$ を消去して整理すると, 次の解析解が得られる.

$$S = \frac{r}{k_s} R(z, t) \quad (24)$$

$$R(z, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z - Vt}{2\sqrt{Dt}}\right) + \sqrt{\frac{V^2}{\pi D}} t \exp\left(-\frac{(z - Vt)^2}{4Dt}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{V}{D}z + \frac{V^2}{D}t\right) \exp\left(\frac{V}{D}z\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z + Vt}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (25)$$

ただし, $\frac{1}{\theta_s - \theta_r} = \frac{V}{k_s}$ と変形して整理した. また, 式(21)において $V = 0$ として, 次のラプラス逆変換の公式を用いると3章の圧力拡散方程式と同形の解析解が得られる.

$$L^{-1} \left[\frac{\exp(-z\sqrt{s})}{s\sqrt{s}} \right] = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4t}\right) - z \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{t}}\right) \quad (26)$$

参考文献

- 1) 齋藤大作, 星清. (1997). 移流拡散方程式の解析解 (1). 開発土木研究所月報, 533, 13-19.
- 2) Van Genuchten, M. T. & Alves, W. J. (1982). Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation. *US Department of Agriculture, Agricultural Research Service*, 1661, 1-149.

謝辞

本研究を行うにあたって、京都大学防災研究所佐山敬洋准教授には 6 年間の長きにわたって懇切丁寧なご指導を頂きました。著者がまだ学部生だったころから根気強く議論に付き合ってくれたことで本研究をまとめあげることができました。また、研究のみならず将来のことについて相談にのっていただくなど、先生のご助力がなければこの博士論文を執筆するまで到達できなかったと思っています。ここに深い感謝の意を示すとともに、厚く御礼申し上げます。

京都大学工学研究科立川康人教授には、修士論文の副査から継続して副指導教員を引き受けていただき、研究について多くのアドバイスを頂きました。本研究後半の内容は先生が過去に執筆した論文を大いに参考にさせて頂きました。厚く御礼申し上げます。

京都大学防災研究所堀智晴教授には、博士課程進学時から副指導教員を引き受けてくださり、研究のみならず様々なアドバイスを頂きました。ポートフォリオのサインを頂く際や学会の懇親会で気さくに話しかけてくださり、博士課程での研究を行う上での励みとなりました。深く感謝いたします。

京都大学総合生存学館寶馨教授、京都大学工学研究科市川温教授には学部から現在に至るまで様々な形でご指導とご助力を頂きました。ここに重ねてお礼申し上げます。

京都大学防災研究所防災技術政策研究分野のスタッフである井上園様、才寺香織様には研究生活に伴う手続きや事務的な問題について多くのご助力を頂きました。心から感謝いたします。

学部から 6 年にわたる研究生活の中では、所属する防災技術政策研究分野の学生の皆さんに最も身近な存在として大いにお世話になりました。著者が研究室に配属されたときの同期である三宅慎太郎君とは現在に至るまで長きにわたって付き合いがあり、人間関係が希薄になりがちな博士課程の生活の中で大いに励みとなりました。山本浩さんには博士課程の先輩として、博士論文執筆に伴う諸々の疑問について丁寧に教えて頂きました。高橋秀輔さんには卒業後も飲みに来て行っていただき、卒業後のキャリアパスなど多くのことをご教授いただきました。石咏雪さん、薛寒さんには配属時全く英語のできなかった著者にも気軽に声をかけて頂き、数多くのアドバイスをいただきました。山本 Eva Mia Siska さんには、著者が開発したモデルを試用する際に、インドネシアの観測について多くのデータを提供いただきました。後拓真さん、小林亮祐さん、松本紘治君とは卓球で数多くの名勝負を繰り広げました。今では良い思い出です。ここではすべて紹介しきれませんが研究室に所属したすべての学生の皆さん、さらに京都大学の同じコースに所属する学生・先生方多くの人の協力で博士論文を執筆することができました。心よりお礼申し上げます。

最後になりますが、これまで支えてきてくれた家族に感謝いたします。