

柔軟な変形機構を有する格子状曲面の解析と形状設計法

堺 雄亮

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	本研究の目的と概要	2
1.3	関連研究	5
1.4	本論文の構成	13
第 2 章	負のポアソン比を持つ柔軟な格子状曲面の形状設計法	15
2.1	はじめに	15
2.2	負のポアソン比を持つ格子状平板の設計	16
2.3	離散微分幾何学における離散曲率	18
2.4	ABAG の離散ガウス曲率分布設計に関する最適化問題	21
2.5	最適化による ABAG 曲面の形状生成例	25
2.6	異なる最適化アルゴリズムに対する最適解の検証	34
2.7	非均一なユニットで構成される ABAG の形状設計法	35
2.8	第 2 章の結論	51
第 3 章	均一な六角形格子で構成された離散円筒機構の開発	53
3.1	はじめに	53
3.2	形状設計法	54
3.3	静的構造解析	68
3.4	伸縮とねじれのカップリング変形とカイラリティに関する考察	74
3.5	第 3 章の結論	78
第 4 章	柔軟な変形構造の大変形解析のための 3 次元弾性梁モデルの開発	79
4.1	はじめに	79
4.2	動的緩和法	79
4.3	3 次元弾性梁モデルの定式化	81
4.4	残差力の定式化	87
4.5	人工質量, 人工慣性モーメント, 人工減衰の設定	90
4.6	グリッドシェルの大変形解析	90
4.7	リエントラント・ハニカムで構成された ABAG の大変形解析	96

4.8	第4章の結論	102
第5章	本論文の結論	103
5.1	結論	103
5.2	今後の展望	106
付録		109
参考文献		111
謝辞		123

目次

1.1	グリッドシェル の例.	3
1.2	グリッドシェル の施工過程.	3
1.3	負のポアソン比を持つグリッドシェル.	5
1.4	離散円筒機構.	5
1.5	構造のポアソン比の正負による変形性状の違い; (a) ポアソン比が正の構造, (b) ポアソン比が負の構造.	8
1.6	離散円筒機構の例; (a) リエントラント・ハニカム, (b) 円形充填, (c) リエントラント四辺形, (d) カイラル・パターン.	10
1.7	カイラリティの性質を持つ形状の例.	12
1.8	通常の構造とカイラル・メタマテリアルの圧縮時の変形性状の違い.	13
2.1	リエントラント・パターン; (a) リエントラント・ハニカム, (b) リエントラント四辺形.	16
2.2	ポアソン比 ν とガウス曲率の関係. (上段) 面内変形に対する変形形状 (青) 初期形状 (黒) の平面図. (下段) 面外変形に対する変形形状. コントアは z 方向変位を表す; (a) $\nu > 0$, (b) $\nu \simeq 0$, (c) $\nu < 0$	17
2.3	頂点 q_v ($v = 1, \dots, 4$) に対応する 4 つの三角形からなる, 頂点 p における四角錐とボロノイ領域 (灰色の領域).	19
2.4	離散ガウス曲率の符号によって分類される四角錐の形状; (a) $K_p > 0$, (b) $K_p = 0$, (c) $K_p < 0$	20
2.5	Cotangent formula の導出に用いるベクトルと角度.	20
2.6	離散平均曲率ベクトルの方向; (a) 上方向, (b) 平均曲率 0, (c) 下方向.	21
2.7	ABAG の曲面上の各節点における 4 つの三角形からなる四辺形メッシュ; (a) リエントラント・ハニカム, (b) リエントラント四辺形.	22
2.8	異なるパラメータ $\theta_i, \beta_{0i}, \beta_{1i}$ に基づき生成される曲面の離散ガウス曲率分布と形状; (a) Case 1, (b) Case 2, (c) Case 3, (d) Case 4.	24
2.9	境界条件と強制変位 (矢印); (a) Type RH, (b) Type RQ.	26
2.10	RH1 の最適解での形状と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図.	28
2.11	RH1 の最適解の形状 (コントア: 軸応力 (Pa)).	28

2.12	RH2 と RH3 の離散ガウス曲率分布と最適解での形状 (コントア: z 方向変位); (a) RH2, (b) RH3.	29
2.13	目標節点上の離散ガウス曲率 K_j , (a) RH1, (b) RH2, (c) RH3, (d) RQ1, (e) RQ2, (f) RQ3.	30
2.14	Type RH および Type RQ の目的関数の推移履歴.	31
2.15	RQ1 の最適解での形状と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい分布, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図.	32
2.16	RQ1 の最適解の形状 (コントア: 軸応力 (Pa)).	32
2.17	RQ2 と RQ3 の離散ガウス曲率分布と最適解の形状 (コントア: z 方向変位); (a) RQ2, (b) RQ3.	33
2.18	3 種のメタヒューリスティクスによる RH1 の離散ガウス曲率分布と曲面形状; (a) PSO, (b) GA, (c) SA.	35
2.19	角度 θ_i の正方向の再設定; (a) リエントラント・ハニカム, (b) リエントラント四辺形. . .	36
2.20	形状パラメータ γ_D ($D = 1, \dots, 4$); (a) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1.00$, (b) $\gamma_1 = 1.00, \gamma_2 = 0.75, \gamma_3 = 2.00, \gamma_4 = 0.5$	37
2.21	均一なリエントラント・パターンで構成された ABAG とハイブリッド型 ABAG; (a) 均一なパターンで構成された ABAG, (b) ハイブリッド型 ABAG.	38
2.22	非周期型モデル 1; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面. . . .	39
2.23	非周期型モデル 2; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面. . . .	40
2.24	ハイブリッド型モデル 1; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面. . .	40
2.25	ハイブリッド型モデル 2; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面. . .	41
2.26	複合型モデル; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面.	42
2.27	境界条件と強制変位 (矢印); (a) Surface1 (非周期型 ABAG) と Surface3 (複合型 ABAG), (b) Surface2 (ハイブリッド型 ABAG).	44
2.28	Surface1 の最適解の形状 (コントア: z 方向変位).	44
2.29	Surface1 の最適解での形状と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図.	45
2.30	目標節点を有するシェブロン・ロッド上の離散ガウス曲率 K_j , (a) Surface1, (b) Surface2, (c) Surface3.	46
2.31	Surface2 の最適解での形状 (コントア: z 方向変位).	48
2.32	Surface2 の最適解に対する曲面と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図. . . .	49
2.33	Surface3 の最適解での形状 (コントア: z 方向変位).	50
2.34	Surface3 の最適解における曲面と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図. . . .	50
3.1	図形の回転対称性; (a) 2 回回転対称性をもつ図形 (リエントラント・ハニカム), (b) 6 回回転対称性をもつ図形 (正六角形).	53

3.2	2 回回転対称な六角形に設定するベクトルと角度.	54
3.3	六角形による平面充填構造, カイラル・ベクトル \mathbf{c} および並進ベクトル \mathbf{t} を用いて生成される平行四辺形領域 (灰色の領域).	55
3.4	\mathbf{c} と \mathbf{t} の設定の良い例と悪い例.	56
3.5	平面充填構造の平行四辺形から離散円筒機構の基本構造への変換過程; (a) 平行四辺形領域, (b) カイラル角 ϕ に関する回転変換後の平行四辺形領域, (c) 写像 $P_{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, l, \theta}$ により平行四辺形領域から変換された離散円筒機構 (青: シェブロン・ロッド, 赤: タイ・ロッド, 紫: 上限材, 下限材)	57
3.6	離散円筒機構の基本構造.	59
3.7	頂点オフセットによる四辺形の生成過程.	60
3.8	中心方向オフセットで設計された離散円筒機構の模型と板材の拡大図.	60
3.9	PTE, STE, CE の分類.	61
3.10	i 番目の PTE に対する頂点オフセットと平面に生成された四辺形.	63
3.11	STE の 2 頂点に対する頂点オフセットの手順; (a) STE の中点 M_i^P と同じ高さの円筒中心軸上の点 \bar{M}_i^P の結合, (b) STE と CE に対応する四辺形の単位法線ベクトルの導出, (c) 単位法線ベクトルによる頂点オフセット方向の導出, (d) 頂点オフセットと平面として設計された四辺形板材の生成.	64
3.12	機構の一部を構成する平面的な四辺形.	65
3.13	ねじれ量が 0 でない四辺形.	65
3.14	$\theta = \pi/9, d = 0.4$ を与えた離散円筒機構の形状比較; (a) 中心方向オフセット, (b) 提案頂点オフセット ($\psi = \pi/9$).	65
3.15	$\theta = -\pi/6, d = 0.4$ を与えた離散円筒機構の形状比較; (a) 中心方向オフセット, (b) 提案頂点オフセット ($\psi = \pi/9$).	66
3.16	モデルの境界条件と強制変位 (矢印).	68
3.17	モデルの初期形状 ($\theta = \pi/9$); (a) 非螺旋モデル 1, (b) 非螺旋モデル 2, (c) 螺旋モデル 1, (d) 螺旋モデル 2.	69
3.18	モデルの変形形状 ($\theta = \pi/9$) と Mises 応力分布; (a) 非螺旋モデル 1, (b) 非螺旋モデル 2, (c) 螺旋モデル 1, (d) 螺旋モデル 2.	70
3.19	モデルの変形形状 ($\theta = \pi/9$) と z 軸まわりの回転変位; (a) 非螺旋モデル 1, (b) 非螺旋モデル 2, (c) 螺旋モデル 1, (d) 螺旋モデル 2.	71
3.20	$\theta = \pi/9$ の螺旋モデル 1 および 2 の変形形状の xy 平面への投影図 (黒: 変形前の形状, 緑: 変形後の形状); (a) 螺旋モデル 1, (b) 螺旋モデル 2.	71
3.21	非螺旋モデル 1 および 2 の圧縮変形に対する応答の推移履歴. (上段) z 方向反力の合計値. (下段) 等価軸応力; (a) 非螺旋モデル 1, (b) 非螺旋モデル 2.	72
3.22	螺旋モデル 1 および 2 の圧縮変形に対する応答の推移履歴. (上段) z 方向反力の合計値. (下段) 等価軸応力; (a) 螺旋モデル 1, (b) 螺旋モデル 2.	73
3.23	螺旋モデル 1 および 2 の円筒中心軸まわりの回転変位の推移履歴; (a) モデル 1, (b) モデル 2.	73

3.24	互いに鏡映関係にある螺旋モデル.	75
3.25	動的カイラリティの概念図.	76
3.26	螺旋モデルの変形と動的カイラリティの対応.	77
4.1	大変形微小ひずみの仮定に基づく梁の形状.	81
4.2	梁部材からなる格子から生成される変形後の単位法線ベクトル.	82
4.3	局所軸ベクトルと, 節点 j と $j+1$ を結ぶ要素 k の回転変位の定義; (a) 要素 k の局所軸ベクトル $\hat{t}_{1,k}, \hat{t}_{2,k}, \hat{t}_{3,k}$, (b) 節点 j における単位法線ベクトルの幾何学的関係から導かれる回転変位 $\theta_{1jk}, \theta_{2jk}$	82
4.4	\hat{n}_j の投影成分.	83
4.5	節点 j における単位法線ベクトルまわりの従属な回転変位の連続性; (a) Step 1-3 (アイソメトリック), (b) Step 1-3 (接平面), (c) Step 4.	85
4.6	単位法線ベクトルを利用した 2 節点間のヒンジ接合のモデル化.	86
4.7	単純梁モデルの初期形状と境界条件 (実線矢印: 強制変位方向, 点線矢印: y の正方向と z の正方向への集中荷重.	91
4.8	単純梁モデルの釣合い形状; (a) xy 平面, (b) xz 平面 (\times : FEM, 実線: DRM, \blacksquare : 最適化).	92
4.9	全節点の運動エネルギーの総和と部材中央の節点の z 方向への並進変位の推移履歴; (a) 運動エネルギー, (b) 並進変位.	92
4.10	小スパンのグリッドシェル・モデルの初期形状と境界条件 (4 隅の矢印: 強制変位).	93
4.11	小スパンのグリッドシェル; (a) 釣合い形状, (b) xy 平面図, (c) xz 平面図 (\times : FEM, 実線: DRM, \blacksquare : 最適化).	94
4.12	大スパンのグリッドシェルの初期形状と境界条件 (矢印: 強制変位).	95
4.13	大スパンのグリッドシェル; (a) 釣合い形状, (b) xy 平面図, (c) xz 平面図 (\times : FEM, 実線: DRM, \blacksquare : 最適化).	96
4.14	面内変形形状 (\times : FEM, 実線: DRM, 点線: 初期形状); (a) ユニット数 1, (b) ユニット数 3, (c) ユニット数 13.	97
4.15	ユニット数 13 のモデルの面外変形形状 (\times : FEM, 実線: DRM, 点線: 初期形状); (a) 支持条件, 強制変位, 外力の設定, (b) 曲面形状, (c) xy 平面投影図, (d) xz 平面投影図, (e) yz 平面投影図.	100
4.16	ユニット数 46 のモデルの面外変形形状 (\times : FEM, 実線: DRM, 点線: 初期形状); (a) 支持条件, 強制変位, 外力の設定, (b) 曲面形状, (c) xy 平面投影図, (d) xz 平面投影図, (e) yz 平面投影図.	101

表目次

2.1	Case 1–4 の変数 $\theta_i, \beta_{0i}, \beta_{1i}$	25
2.2	ABAG の初期格子状平板の形状と最適化に関するパラメータ.	26
2.3	RH1, RH2, RH3 の最適解での角度 $(180/2\pi)\theta$ (deg.).	27
2.4	目標節点における離散ガウス曲率の平均値, 最大値, 最小値 ($\times 10^{-3}$).	27
2.5	GA と SA のパラメータ.	34
2.6	RH1 の最適解における目的関数と計算時間.	34
2.7	形状パラメータ γ_D	38
2.8	非均一ユニットからなる ABAG の初期格子状平板の形状と最適化に関するパラメータ.	43
2.9	Surface1 と Surface3 の設計変数 γ の最適解.	43
2.10	Surface1, Surface2, Surface3 の最適解での角度 $(180/2\pi)\theta$ (deg.).	47
2.11	目標節点における離散ガウス曲率の平均値, 最大値, 最小値 ($\times 10^{-3}$).	47
3.1	形状パラメータとねじれ量 ($\theta = \pi/9$).	66
3.2	形状パラメータとねじれ量 ($\theta = -\pi/6$).	67
3.3	非螺旋モデル 1, 2 および螺旋モデル 1, 2 の形状パラメータ	68
4.1	3 つのモデルに対する DRM と FEM 間の全節点座標に関する差の最大値と平均値.	93
4.2	面内変形および面外変形解析の結果に関する DRM と FEM 間の全節点座標の差の最大値と平均値.	98
5.1	PSO パラメータと RH1 の目的関数.	110

第1章

序論

1.1 研究の背景

大人数を収容する空間を覆う屋根架構は“空間構造”と呼ばれ、地震動や強風等の外的作用から空間を守り、人々の安全を確保する [1-3]. 空間構造の設計では、力学的に合理性のある形状を決定することが重要であり、設計者は立体的で複雑な力の流れを考える必要がある. そのため、空間構造の設計は調和のとれた“形と力”の関係を探る行為と言える.

昨今、豊島美術館（西沢立衛, 2010）、ロレックスラーニングセンター (SANAA, 2010)、ニューヨーク・ワールドトレードセンターのオキュラス (サンティアゴ・カラトラバ, 2016) といった実例や、タチラ・クラブ (エドゥアルド・トロハ, 1957) や我が国の新国立競技場の旧案 (ザハ・ハディド, 2012) のような設計案をはじめ、解析的に（数式によって）定式化し得ない複雑な形状の自由曲面が数多く提案されており、これらを実現させるための形状設計法や施工法への期待が高まっている. 力学的に合理性のある自由曲面の導出には、最適化手法や幾何学などを積極的に用いた数理的な設計法および解析法の適用が欠かせない. また、生産時の環境配慮について国際的に高い関心が寄せられており、将来的には従来の経済面重視の設計方針に替わり、環境面を重視した設計活動が増加すると予想される.

機械的メタマテリアル (mechanical metamaterial. 光工学分野等におけるメタマテリアルと区別するために“機械的”という言葉をつけることが多いが、以下では短縮してメタマテリアルと呼ぶ) は、従来の材料特性では達成し得ない力学特性を構造特性により付与させた材料の総称である. このメタマテリアルの新たな力学特性の創出には、構造の幾何形状の操作が深く関与する. 複雑な形状の空間構造を力学的に成立させるには、従来の力学特性の制約を超えたメタマテリアル設計の知見による設計解の拡張という考え方が役立つ. しかしながら、メタマテリアルは、形状の複雑さゆえに施工・製作の難易度が高いため通常の構造に比べて生産コストや時間を要すること、加えて、現状では建築分野に紹介され始めた段階にあり [4], 体系的な建築設計実務に向けた議論や研究例が少ないことから未だ普及に至っていない.

本論文は、メタマテリアルの性質の一種である“負のポアソン比”を持つ幾何形状を適用した格子状曲面の設計について論じる. メタマテリアルと離散的な構造材による曲面は、形と力が密接に関与する構造という点で共通しており、両者の統合により従来の設計法では生成が困難な構造の実現可能性が向上する.

以下では、本研究の目的と概要、および、関連研究について述べる.

1.2 本研究の目的と概要

本研究の目的は、格子状曲面の離散的な幾何特性に着目し、その形状設計問題へのメタマテリアル設計技術に基づく解決策の提示、および、骨組構造に対する簡易な大変形解析手法の開発である。この目的を達成することで、従来の構造形式とその設計法では生成が困難であった格子状曲面の形状および力学特性の設計法が確立される。さらに、実装難易度が高い、あるいは、高価なソフトウェアを用いる必要のある、柔軟な梁部材の大変形解析プログラムを簡便な形式として開発することは、多くの構造設計者にとって有益であると考えられる。以上の大目的を受け、本論文では後述する3つの小目的を設定する。

以下では、本研究の動機や分野に対する位置づけ、および貢献について論じる。

1.2.1 本研究の動機、位置づけ、貢献

本研究の動機

形は、幾何学や図形科学といった数学分野では勿論のこと、その他の自然科学、工学、人間の精神をも議論の範疇に据える心理学や芸術学など幅広い学問領域において普遍な概念である [5]。形が物の性質に与える影響は極めて大きい。構造力学においても、断面形状が梁の剛性に明示的に影響する事実のように、形状によって構造の力学特性は敏感に変化する。このようなことから、形と力の密接な関係の考慮が不可欠な構造形式の空間構造および変形機構に対し、領域横断的な形状設計法の考案に着手することは自然である。さらに、従来の格子状曲面の設計問題では、格子の幾何形状に関する制約により、得られる解が限定されている。したがって、格子形状を限定せず、より変形自由度の大きい柔軟な幾何形状を解候補として採用し、問題の制約を緩和すれば、より多くの実行可能解を探索できると考えた。これが本研究に取り組むに至った動機である。

本論文で取り組む課題と研究の位置づけ

次に、本論文で取り組む格子状曲面の形状設計と解析に関する研究内容、ならびに、その位置づけについて説明する。本論文では、複雑な自由曲面を有する屋根架構や柔軟な変形機構に着目し、主に次の3つの課題に取り組む。

1. 負のポアソン比を持つベンディングアクティブ・グリッドシェル (bending-active gridshell) の形状設計法の構築
2. 均一な六角形ユニットで構成された離散円筒機構の形状設計法の構築と力学特性の検討
3. 簡易なアルゴリズムに基づく3次元弾性梁モデルの開発

ベンディングアクティブ・グリッドシェルは、図 1.1 に示すような、梁部材で構成される格子状の曲面であり、連続体シェルの離散的なアナロジーとして提案された構造である [1]。なお、ベンディングアクティブ・グリッドシェル (strained gridshell ともいう) は、施工時に溶接等の接合作業によって曲げを与えずに立体形状を生成するラチスシェル (unstrained gridshell ともいう) とは異なる構造形式である [6]。本論文において、断りなく“グリッドシェル”と呼称する構造は、ベンディングアクティブ・グリッドシェルのことを指している。

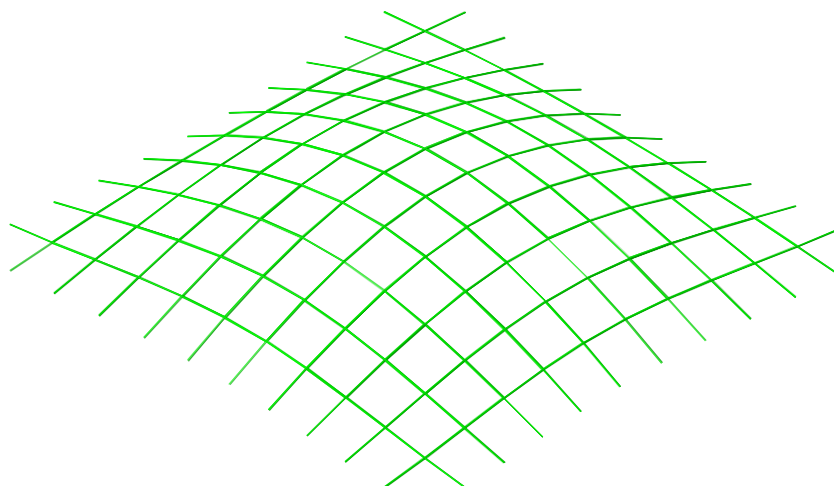


図 1.1: グリッドシェル の例.

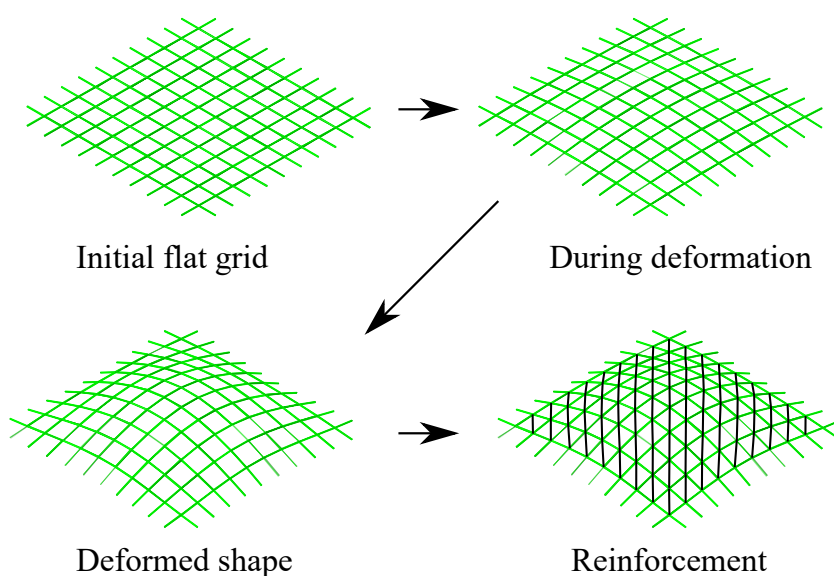


図 1.2: グリッドシェル の施工過程.

図 1.2 は、グリッドシェル の施工過程を示す。施工時には梁部材を格子状に組合わせた平板を作成し、それに対して面外変形を作用させて曲面を生成する。施工の最終段階には、曲面形状の安定化（積載荷重や活荷重に対する変形抑制）を行う。具体的には、四辺形格子に対する斜材（ブレース）の挿入、接合部の固定化、面材による被覆といった補強を行う。ベンディングアクティブ・グリッドシェルは、大スパンの空間を覆うための曲面屋根として活用される建築構造であり、これまでに数多くの実施設計例がある [1,7].

一方で、離散円筒機構は、自動車のクラッシュバンパーのような衝撃緩和装置やステント（動脈等の断面積の大きい血管を拡張する器具）などの柔軟な変形性能を活かしたメカニズムとして利用される構造である [8,9]. 以下では、“離散円筒機構”を、梁部材や板材からなる離散的な幾何形状で充填された円筒形の構造として定義する。本研究では、柔軟に変形する構造としての利用を想定した機構の形状設計法およ

び力学特性の検証を行う。前述のように、本論文はベンディングアクティブ・グリッドシェルと離散円筒機構の2つの異なる構造形式についての研究成果をまとめている。幾何的な観点から、両者の構造形式の共通点と相違点を示す。まず、共通点は、格子で構成される離散的な構造を内包していることである。両者の構造形式に対する格子形状には、負のポアソン比の性質を示す幾何形状を適用する。次に、相違点は、前者は平面から曲面を生成する構造であり、後者は円筒形の構造である点である。つまり、本論文では一貫して、離散的な曲面を構成する局所的な幾何形状の設計問題に取り組む中で、それが異なる構造形式の力学特性に与える影響について検証している。以上を踏まえると、本論文の独自性は、“離散的な幾何学に関する知見に基づき、負のポアソン比を持つ格子構造の力学特性を活用した自由曲面および円筒機構の形状設計問題に取り組む”点にあり、これは建築構造学、離散幾何学、材料科学、機械工学などの境界領域的な研究に位置づけられる。

さらに、3つ目の課題として、柔軟な骨組構造の大変形解析のための3次元弾性梁モデルを開発する。グリッドシェルの大変形解析には微小変形を対象とした梁理論は使用できないため、大変形を考慮した3次元弾性梁の解析モデルがこれまでに数多く開発されてきた。しかし、ほとんどのモデルには高度で複雑な計算過程が含まれており、多くの設計者にとって実装の難易度は高いと考えられる。本論文では、実装の簡便化を主眼に置いたモデルを提案する。モデル化に際して、格子状平板から生成されるグリッドシェルの特性を利用している。

以上のように、本論文では、設計法が確立していない、あるいは困難とされる格子状曲面に対する形状設計手法および解析法を提案する。

3つの課題へのアプローチと達成による貢献

本論文では、グリッドシェルと離散円筒機構という格子状曲面を有する構造を対象として、その形状設計法と解析に関する一連の研究についてまとめている。ここでは、上で挙げた個々の課題に対して、以下に示すアプローチを試みる。

1. 従来のグリッドシェルの格子形状に負のポアソン比を持つ幾何形状を導入した構造の形状設計に対する、離散微分幾何学を用いた最適化問題の定式化
2. 材料科学と離散幾何学の知見を応用した離散円筒機構の形状設計法の提案、および、機構の変形性状の確認と考察
3. 3次元弾性梁の変形状態のエネルギーに基づく定式化と陽的解法である動的緩和法アルゴリズムの利用

1つ目の課題では、未だ形状設計法が十分に確立していない負のポアソン比を持つグリッドシェルに対して、最適化による形状設計法を構築することで、設計者の勘と経験に依存しない柔軟な格子の設計法を提案する。さらに、離散微分幾何学の知見に基づき、当該構造の複雑な曲面形状に対する定量評価手法を提示する。図1.3は、負のポアソン比を持つグリッドシェルの例である。

2つ目の課題では、図1.4に示す離散円筒機構の形状設計が設計者にとって負荷の大きい過程であるという問題点に対して、機構の幾何形状に着目し、格子形状を容易に、かつ、多様に設計する手法を提案する。また、板材で構成された離散円筒機構の製作性の向上を主眼に置いた設計法を提案する。さらに、提案手法で生成した離散円筒機構の変形性状の検討および考察を行う。

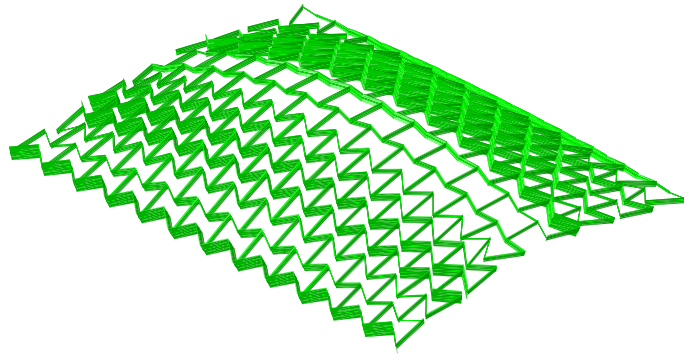


図 1.3: 負のポアソン比を持つグリッドシェル.

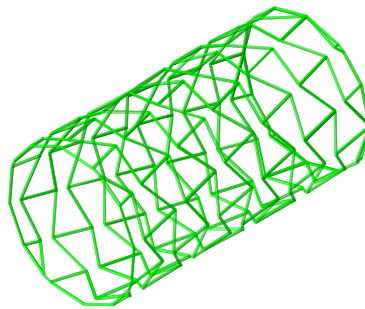


図 1.4: 離散円筒機構.

3つ目の課題では，グリッドシェルの形状探索ツールを提案する．提案手法では，平板から曲面を生成するグリッドシェルの特性を活用した3次元弾性梁モデルを構築し，陽的解法である動的緩和法を解の更新アルゴリズムに用いて容易な実装を実現する．さらに，梁の変形状態のエネルギーに基づく定式化により，静的釣合い式を解く必要がない．そのため，計算負荷の増大の原因となる，接線剛性行列に関する計算を回避できる．

1.3 関連研究

本研究で対象とする構造の解析法および形状設計法の関連研究をまとめる．

1.3.1 ベンディングアクティブ・グリッドシェルに関する既往研究

アクティブ・ベンディング (active bending) は，無応力かつ曲げやひずみの生じていない柔軟な構造材を強制的に曲げて弾性変形させることで，曲線的あるいは曲面的な形状を生成する技法である [10]．この技法は，曲線的な形状を生成するための技術が体系的な工業生産過程に導入される以前から存在しており，その起源は紀元前にまで遡る．弓，釣り竿，編み籠などの道具から遊牧民の移動式住居のようなバナキュラーな建築まで，さまざまなスケールや用途でアクティブ・ベンディングは活用されてきた．

グリッドシェルは，アクティブ・ベンディングで生成される建築の代表例であり，一般にベンディング

アクティブ・グリッドシェルと呼ばれる [11-13]。ベンディングアクティブ・グリッドシェルの利点は、先に述べた単純な施工法で曲面を生成できるだけでなく、軽量なため組み立てが容易で可搬性があること、少ない材料で大きなスパンを覆えること、テンポラリな展示物などであれば形状を変更して転用できることなどが挙げられる。

ベンディングアクティブ・グリッドシェルは施工過程によって以下の2つに大別される。

1. 個々の部材に曲げを与えて生成した曲線材を立体的に配置して曲面を生成するプリ・フォーム型
2. 部材を格子状に組合わせて生成した平板を変形させて曲面を生成するポスト・フォーム型

近年の動向として、ベンディングアクティブ・グリッドシェルと表現する場合はポスト・フォーム型を指すことが多い。本論文でも、ポスト・フォーム型のグリッドシェルを研究対象とする。ポスト・フォーム型のグリッドシェルによる曲面生成では、初期格子状平板から目標曲面を生成する際の形状探索法 (form-finding method) に関する研究が 2010 年代より重要視されている。その背景には、曲面形状の設計過程において、柔軟な弾性梁の非線形な変形応答を正確に評価できる高度な解析技術が、設計者に求められているという事実がある [14]。

グリッドシェルの曲面は、無応力かつ真直な梁部材を組合わせた格子状平板が境界に与えられた強制変位によって弾性変形することで、生成される。曲面の釣合い形状は初期格子状平板とは大きく乖離しているため、線形範囲のみを対象とした梁理論では変形を再現できない。したがって、通常は、グリッドシェルの形状探索には非線形な大変形解析を用いる。梁の大変形解析を実行するには、汎用的な構造解析ソフトウェアを使用するか、あるいは設計者自身が実装するか、という2つの方法がある。一般の構造設計者が、Abaqus [15] のような高度な構造解析ソフトウェアを利用するには、費用や技術等の観点から難がある。そのため、一般の設計者が容易に使用できるグリッドシェルの形状探法が求められる。

グリッドシェルの形状探索法には、例えば、粒子バネ法 (particle-spring method) [16]、軸力密度法 (force density method) [17,18]、離散エラスティック・ロッド法 (discrete elastic rod method) [19-22] などがある。

D'Amico *et al.* [23] は、ベンディングアクティブ構造の大変形解析における陰的解法と陽的解法の特徴を検証している。ニューマーク β 法のような陰的積分法は、数値的安定性に関する利点がある。しかし、次のステップの応答を得るには、ニュートン法による反復計算が必要である。そのため、非線形性の高い大規模な構造に対する計算には、かなりの計算負荷を要する。本研究で着目するのは、大変形解析で得られる最終的な自己釣合い形状である。したがって、平板形状と最終的な曲面の形状の中間形状の釣合い状態は重要ではない。このことから、陰的積分法は計算負荷の観点から有効ではない。

一方、動的緩和法 (dynamic relaxation method: DRM) [24] のような陽的解法は、現在のステップの応答のみから次のステップの応答を陽に導くことができる。したがって、ニュートン法による反復計算は不要である。この陽的解法の特性により、容易にアルゴリズムを実装することができる。DRM は、静的構造解析問題を動的な振動問題に変換して、陽的解法を用いて解を導く手法である。DRM は最終的な静的釣合い状態のみを要することから、グリッドシェルの形状探索法として広く用いられている [25]。DRM のその他の利点として、不釣合い力の計算に内力のみを用いることで接線剛性行列の導出を必要としないという点が挙げられる。

グリッドシェルの大変形解析法は、実用的なツールとして数多く開発されている。Lázaro *et al.* [25]

は、3次元構造の形状探索に DRM を用いるには、梁要素の厳密な定義が不可欠であると指摘している。梁要素の解析モデルには、線分切片による離散化が必要である。離散化には有限差分型 (finite-difference) と有限要素型 (finite-element) の2種類の方法が提案されている。有限差分型の離散化によって定義された各梁要素は、2つの端点と中心点で構成される。これら3節点間の幾何学的な関係により中心点における曲率、あるいは、ひずみを算出することができ、各節点におけるせん断力と曲げモーメントを導ける。各節点の自由度 (degrees of freedom) は3 [23,26,27] あるいは4 [28] である。3自由度節点は並進変位のみを表現する一方、4自由度節点は並進変位に加えてねじり変位も表現する。

有限要素型の離散化では、2つの端点で構成される梁要素を扱う。各節点に対して、3方向の並進変位と3軸まわりの回転変位を表す6自由度を与える。通常、このタイプの離散化では、共回転式 (co-rotational formulation) を利用する [29-33,135]。大変形微小ひずみの仮定の下では、共回転式によって節点位置と局所軸方向を用いて変形後の梁の釣合い形状を得ることができる。文献 [34-37] では、共回転式を DRM に組込んだ実装が行われている。

6自由度を持つ梁モデルである geometrically exact rod model は Reissner [38] によって提案され、Simo [39] と Simo and Vu-Quoc [40] によって改良された。さらに、geometrically exact rod model は幾何学的非線形解析に用いられている [41-43]。Bessini *et al.* [14] は、これを DRM に実装する手法を提案した。Geometrically exact rod model の利点は、数学的に厳密な式に基づいており、大変形過程の梁の断面位置と回転量を正確に評価できる点にある。しかし、グリッドシェルの形状探索法として用いるには過度に複雑である。

Rombouts *et al.* [44] は、陰的 DRM [45] に組込んだ共回転梁を用いてグリッドシェルの形状探索法、ならびに最適化手法を提案した。陰的 DRM は、陽的な通常の DRM に比べて少ないステップ数で計算が収束するため、より早く曲面の最終形状を得られる可能性を有する。しかし、陰的 DRM は、各ステップにおける非線形系の接線剛性行列を用いたくり返し解法に基づく。したがって、実装は通常の DRM よりも複雑である。

1.3.2 負のポアソン比を持つ構造を用いた曲面生成に関する既往研究

自然界において稀有な特性を持つ物質は“メタマテリアル (metamaterial)”と呼ばれる。“meta”は“beyond”と同様の概念を持つギリシャ語由来の接頭辞である。そのため、metamaterial は“通常を超えて材料”と直訳される。すなわち、メタマテリアルは、これまで自然界には存在し得なかった特殊な機能を備える人工物質といえる。メタマテリアルについて、これまでに材料科学、光工学、電磁気学、音響工学などの分野で数多くの研究が行われてきた [46]。

本論文では、力学特性 (機械的特性) に着目した機械的メタマテリアル (mechanical metamaterial) の力学特性を応用したベンディングアクティブ・グリッドシェルの形状設計法を提案する。機械的メタマテリアルは、構造の持つ力学特性の種別によって、負のポアソン比を持つオーゼティック構造、カイラル・メタマテリアル、負の剛性を持つ構造、折紙構造、切り紙構造などに分類される [46,47]。本節では、負のポアソン比を持つオーゼティック構造について説明する [48]。図 1.5 は、構造のポアソン比の正負による変形性状の違いを示した概要図である。なお、以下では特性が方向に依存しない等方性材料を用いる。また、構造物の変形に対する符号を、引張を正、圧縮を負と定義する。

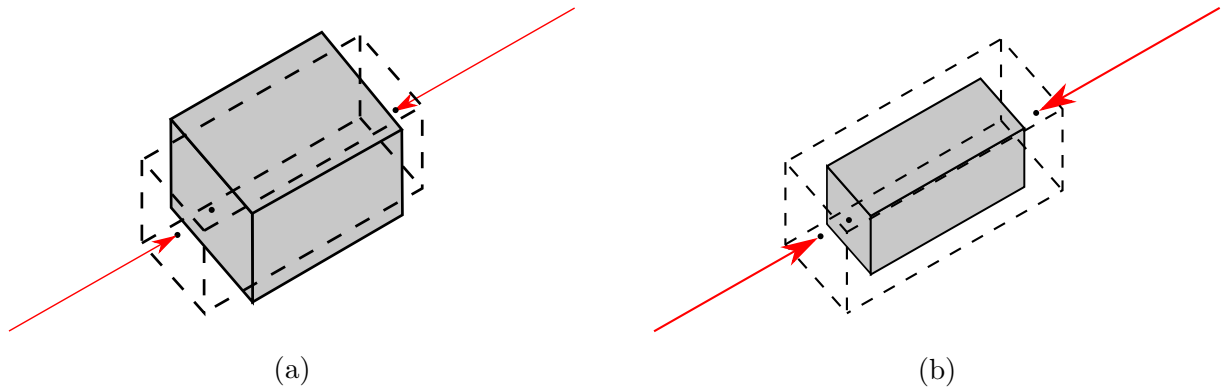


図 1.5: 構造のポアソン比の正負による変形状の違い; (a) ポアソン比が正の構造, (b) ポアソン比が負の構造.

ポアソン比 ν は, 一方向への応力で弾性変形する物体内に生じる, 直交二方向のひずみに関する材料定数であり, 以下の式で定義される.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_1} \quad (1.1)$$

ε_t , ε_1 は互いに直交する 2 方向に生じるひずみである. 自然界に存在する材料や構造物は通常, 正のポアソン比を持つ. 定義式 (1.1) に従うと, ポアソン比 ν が正の材料を一軸方向に圧縮 ($\varepsilon_1 < 0$) するとき, 図 1.5(a) のように直交方向には膨張 ($\varepsilon_t > 0$) する. 同様に, 一軸方向に引張り ($\varepsilon_1 > 0$) を与えた場合, 直交方向には収縮 ($\varepsilon_t < 0$) する.

一方で, 負のポアソン比を持つ材料では, 図 1.5(b) に示すように, 一軸方向に圧縮すると直交方向にも収縮し, 引張ると膨張する [49]. 負のポアソン比に関する最初の報告は, 1892 年の Love [50] によるものとされる. 20 世紀後半になり, Lakes [49] によって, 負のポアソン比を持つ材料の研究が行われた. その後, 負のポアソン比を持つ構造を意味する “オーゼティック (auxetic)” 構造という呼称が定着した [51,52]. “auxetic” という単語は, “増加しつつある (tend to increase)” という動詞を意味するギリシャ語 “αυξητικός (auxetikos)” に由来する [48].

オーゼティック構造の工学的価値は材料科学の分野を筆頭に広く認められており, これまでに多くの研究成果が蓄積されている [53]. オーゼティック構造の力学特性のうち, とくに顕著なものを以下に挙げる [54,55].

1. 面外変形時のドーム状曲面の生成 [49]
2. せん断変形に対する抵抗力の高さ [56]
3. 集中荷重の作用する箇所 (indentation) における耐久性の高さ [57-60]
4. レジリエンスの向上 [49]
5. 衝撃に対するエネルギー吸収量および減衰量の大きさ [51,61-64]
6. 破壊時の強度の高さ [65]
7. 振動制御 [66]
8. 負のコンプライアンス [67,68]

オーゼティック構造は, 構造を構成する材料を変更せず, 構造内部の微細組織の形状を変更することで,

設計者の所望する力学特性を実現できる。そのため、ミクロな材料からスポーツ用品まで幅広いスケールの工業製品に応用される [69,70]。

一方で、上記のように、オーゼティック構造は通常の構造とは異なる力学特性を有するため、人間の直感に反する構造といえる。そのため、設計者が自身の直感に従ってオーゼティック構造を設計しても、所望の力学特性を十分に発揮させることは困難である。このことから、オーゼティック構造の設計には最適化手法の適用が有効であると考えられる。例えば、文献 [71-73] では、均質化に基づく連続体モデルのトポロジー最適化手法を、ミクロスケールの2次元的なオーゼティック構造の設計に用いている。しかし、連続体モデルのトポロジー最適化には、グレースケール問題が生じることが知られている。Kureta and Kanno [74] は、2次元的なオーゼティック構造の設計に対して、混合整数線形計画法を用いたトポロジー最適化問題の解法を提案している。また、文献 [74] では、連続体モデルではなく梁要素を用いており、グラウンド・ストラクチャー法を採用して最適解を得ている。

オーゼティック構造に関する多くの研究では、構造の破壊強度やエネルギー吸収能力の検証が盛んに行われている。2010年代以降、オーゼティック構造の力学特性を活用した形状探索に関する研究が提案され始めた。Ou *et al.* [75] は、剛体バー要素と一軸回転ヒンジによるリンク機構を利用した新しいオーゼティック構造ツール“KinetiX”を開発した。Konaković *et al.* [76] は、三角形剛体と一軸回転ヒンジで構成された負のポアソン比を持つ曲面による形状設計法を提案した。Chen *et al.* [77] は、文献 [78] に基づき、バイステーブル性を有する曲面を用いて所望の曲面を生成するための逆設計型アプローチを提案している。これらの文献では、剛体と回転ヒンジからなるリンク機構型のオーゼティック構造を平面から曲面へ大変形させる問題を扱っている。しかしながら、実際の空間構造として上記の構造システムを採用するには、ヒンジ接合の強度の向上が問題となると考えられる。

オーゼティック構造は、その固有の変形特性を得るために、梁や板材などの柔軟な弾性材で構成されるのが一般的である。一方で、1.3.1節で述べたように、グリッドシェルは、ベンディングアクティブ構造に分類される。近年、これらの特性を併合した新たな構造形式であるオーゼティック・ベンディングアクティブ・グリッドシェル (auxetic bending-active gridshell: ABAG) について研究され始めている [79-82]。

従来、正のガウス曲率を持つドーム状の曲面を施工するには、組積造やラチスシェル、あるいは多くの型枠を必要とする連続体シェルが採用されてきた [1]。これらの構造形式を ABAG に置き換えれば、施工時間とコストの削減ができる。また、曲面生成時に型枠を必要とせず、従来型のグリッドシェルとは異なり、接合部にヒンジを設けなため部品点数が少なく、環境に優しい構造形式といえる。さらに、離散的な形状ゆえに空隙を持つため、弾性変形を利用したエネルギー散逸機構の付加も容易である。

ABAGの力学特性は、文献 [79-81] において、粒子バネ法および有限要素解析により検証されている。また、同文献 [79-81] では、3D プリンティング等の付加製造技術 (additive manufacturing) により、ABAGの初期格子状平板の作成を行うことが想定されている。付加製造技術の適用により、初期格子状平板の作成における組み立て作業が解消され単一の材料で構造全体を生産できる。これにより、ABAGは部材間の接合部を剛接合として設計するコンプライアントメカニズムとなり、部品点数の削減や変形時の騒音の低減化を図ることができる [83]。La Magna and Knippers [82] は、ABAGで生成した曲面に所望のガウス曲率分布を得ることを目的として、格子状平板のポアソン比を連続的に変化させる方法を提案した。具体的には、シュワルツ・クリストッフエル写像 (Schwarz-Christoffel mapping) を応用して、格

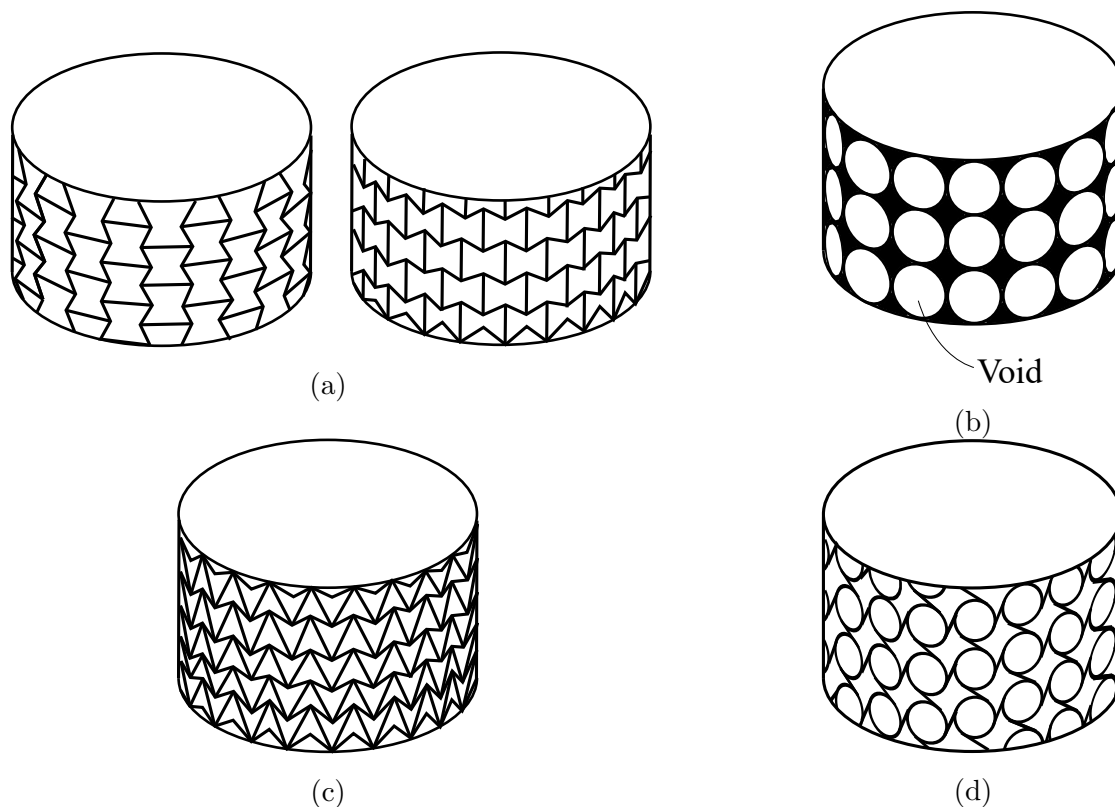


図 1.6: 離散円筒機構の例; (a) リエントラント・ハニカム, (b) 円形充填, (c) リエントラント四辺形, (d) カイラル・パターン.

子状平板の境界形状の設計に際して、長方形の標準領域 (canonical domain) から物理的な曲線境界領域に変換する手法を応用している。この手法の利点は、標準領域上でポアソン比の分布を操作した六角形パターンを主曲率方向に沿って配置することで、曲線境界領域上でのパターン生成を回避できる点にある。数値例題では、トーラスの上形状や Downland gridshell [7] を模倣した曲面の生成例を示している。しかし、ABAG の形状設計に関する研究は、上記の他に見つからない。ABAG の実現には更なる検討が必要である。

1.3.3 離散円筒機構に関する既往研究

円筒は、単純な幾何学に基づいて設計・製造でき、かつ意匠性が高いことから、さまざまな工業製品や建築・土木といった多様な構造物の設計形状として用いられる [84,85]。なかでも円筒形の変形機構は、建築、機械、車両、航空機等の各種工業製品に用いられ、バネ、クラッシュバンパー、医療用ステントなどとして活用される [86-94]。図 1.6 は、離散円筒機構の例を示している。

離散円筒機構の設計と解析に関する研究は、これまでに数多くの蓄積がある。とくに、離散円筒機構の静的な力学特性や、衝撃力や弾性波などの動的な外乱に対するエネルギー吸収性能を検証した例が多く見られる [54,62]。

離散円筒機構は、負のポアソン比の有無で大別することができる。まず、負のポアソン比を持たない通

常の構造に分類される機構の形状設計に関して Ishida [89] の研究がある。Ishida [89] は、板材で構成された離散円筒機構の形状設計法を提案している。板材は、離散円筒機構の外側の円周上の頂点を円筒中心軸へオフセットして設計される。このとき、板材にはねじれが生じ、機構の製作性が低下する。文献 [89] では、全ての板材を平面として設計する手法を考案している。ただし、手法の適用範囲は、ユニットの形状が正六角形であるもの、かつ、ユニットの配置方向が円筒の主曲率方向に沿ったものに限定される。板材で構成される離散円筒機構の製作性を考慮した研究は、現在のところ、文献 [89] しか見つかっていない。そのため、上で示した手法の適用範囲外の機構について、製作性を考慮した形状設計法が求められる。

正六角形などの正のポアソン比を持つ構造に限らず、ユニットの形状にオーゼティック構造を採用した離散円筒機構の力学特性の検証が行われている [96]。離散円筒機構のユニットをオーゼティック構造として設計する場合に用いる幾何形状は、図 1.6(a), (c) のようなりエントラント・パターンの他に、カイラル・パターン [97,98], ミッシング・リブ [99,100], 波形パターン [80,101], 星形パターン [102,103] などがある。Gatt *et al.* [104] は、正方形の剛体平板ユニットで構成された離散円筒機構を設計している。この機構は、各剛体の頂点が一軸回転のヒンジで接続され、剛体の回転変位が連成することで負のポアソン比の変形性状を実現している。文献 [104] では、マクロなスケールの離散円筒機構の設計において、平面的なオーゼティック構造を一方に丸めて離散円筒機構を製作すると、不整形なユニットが生じることについて言及している。

負のポアソン比を持つ離散円筒機構の利点は、1.3.2 節で紹介したエネルギー吸収性能の高さの他に、剛性の調整設計が可能なが挙げられる。剛性の調整設計に関する研究には、[55,105] などがある。Ren *et al.* [55] は、円形の空隙を充填させた幾何形状を用いた離散円筒機構を設計した。文献 [55] では、空隙の充填率を変更するだけで、機構の剛性を容易に調整できることを示している。Zhang *et al.* [105] は、楕円形の空隙を規則的に配置した幾何形状を円筒面のユニットとして採用し、円筒内部に同じ形状をもつユニットからなる柱状構造を設けた。内部構造の設計パラメータを操作することで、機構の剛性が調整できることを例証している。

上で挙げた以外にも、負のポアソン比を持つ離散円筒機構に関する研究は盛んに行われている。しかし、ユニット形状の設計手法そのものに着目した研究は、見つかっていない。そのため、現状では、各々の設計者が CAD ツール等を用いて試行錯誤で機構形状を設計していると考えられる。加えて、上で言及した研究例では、円筒の主曲率方向に沿ってユニットを配置した単純な格子を持つ機構のみを検討している。したがって、離散円筒機構の形状設計を取り巻く現在の環境は、個々の機構の設計に費やされる時間や労力の増大につながる他、機構の力学特性を探索する上での制約となっている可能性がある。そのため、離散円筒機構の形状設計を簡易に実行でき、かつ、多様な形状を設計できるツールの開発が重要となる。

離散円筒機構には負のポアソン比の発現の有無を別として、カイラル・メタマテリアル (chiral metamaterial) に分類される機構が存在する [106]。カイラル・メタマテリアルは、伸縮とねじれが同時に生じるカップリング変形を起こす構造である。これは、中心対称性を有する幾何形状を持つ機構には発現しない現象である。

ところで、カイラリティ (chirality) は、カイラル・メタマテリアルの根幹をなす概念である。文献 [133] に基づき、カイラリティについて説明する。カイラリティは、右手と左手のような互いに鏡映の関係 (掌性 (handedness) とも呼ばれる) にあり、並進変位ならびに回転変位を用いても互いの形状が重なり合わない性質である。カイラリティという言葉は、1884 年に Lord Kelvin によって初めて用いられた。その



図 1.7: カイラリティの性質を持つ形状の例.

語源は“手”を意味するギリシャ語の“ $\chiειρ$ ”にある。カイラリティはその概念の一般性の高さゆえ、自然科学の諸学問は勿論のこと、哲学、心理学、脳科学といった左右認識のテーマを扱う学問においても議論される。また、カイラリティの呼称法は分野間で異なる。化学や物質学では“キラリティ”と呼ばれることが多く、数学や物理学およびその関連分野では“カイラリティ”と呼ばれる。本論文では“カイラリティ”と呼称する。図 1.7 は、カイラリティを持つ形状の例として左右の掌を示している。

カイラリティを持つ幾何形状の例として螺旋がある。螺旋は、自然界に普遍的に現われる。植物には蔓を螺旋状に伸ばすものや、茎に葉を螺旋状に付けながら成長するものがある。台風、竜巻、渦潮といった気象現象にも多様な螺旋が登場する。螺旋には右巻きと左巻きがあり、互いに重なり合うことはない。カイラル・メタマテリアルの形状も螺旋的な要素を有するものも多く見られる。

カイラル・メタマテリアルの設計に関する研究は、例えば文献 [94,107-112] などがある。Frenzel *et al.* [107,108] は、各面内にカイラル・パターンを有する六面体ユニットを組合わせたカイラル・メタマテリアルを設計した。有限要素法を用いた数値解析の結果より、当該構造には圧縮とねじれのカップリング変形が生じるということが示されている。図 1.8 は、カイラル・メタマテリアルの性質の有無によって、構造が圧縮されたときの変形性状が異なることを概説している。左の図は通常の構造の圧縮変形を示しており、右の図はカイラル・メタマテリアルの圧縮変形を示している。図 1.8 の右より、圧縮されたカイラル・メタマテリアルには、ねじれが生じている。さらに、連続体置換による数値解析で精度よく結果を再現できることが例証されている。加えて、カイラル・メタマテリアルの変形性状は、中心対称性が失われていることから、Cauchy の弾性理論を用いた連続体置換ではねじれを再現できない。そのため、Frenzel *et al.* は、カイラル・メタマテリアルの連続体置換には Eringen のマイクロポーラ弾性理論の使用が適切であることを言及している。同様に、文献 [94,109] では、ユニット形状をカイラル・パターンとした離散円筒機構を設計しており、カップリング変形を確認している。Farrell *et al.* [110] は、カイラル・パターンの円形部を除去したパターンを用いている。カイラル・パターンを使用せずにカイラル・メタマテリアルを設計している研究例としては、文献 [111,112] が存在する。Lipton *et al.* [111] は、柔軟な材料を用いた梁部材を螺旋状に配置した機構を設計し、カイラル・メタマテリアルの変形性状を再現できることを確認している。加えて、複数の機構を組合わせて異方性を創出できることについて言及している。Meng *et*

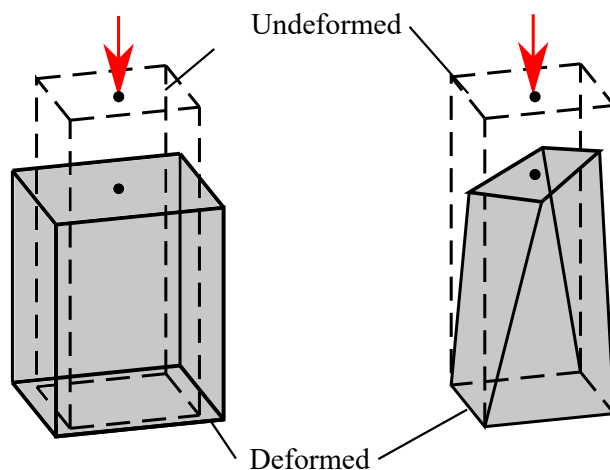


図 1.8: 通常の構造とカイラル・メタマテリアルの圧縮時の変形状の違い。

al. [112] は、真直な梁部材を双曲面上に配置した機構によるカイラル・メタマテリアルを生成している。なお、ここで引用した一部の機構は直方体であるが、これらの機構の有する力学特性の観点から本研究で扱う機構に類似した構造であるといえる。

1.4 本論文の構成

本論文は、全 5 章より構成されている。各章における詳細は、次のとおりである。

第 1 章は本論への導入部分である。本論文の研究目的と概要を示した。また、本論文の一連の研究に関する背景および関連研究を紹介した。

第 2 章では、負のポアソン比を持つオーゼティック構造の力学特性を活用したオーゼティック・ベンディングアクティブ・グリッドシェル (ABAG) の形状設計法について詳説する。強制変位に対してオーゼティック構造の力学特性を顕現する格子パターンを紹介し、これをベンディングアクティブ・グリッドシェルの初期格子状平板として設計するための問題設定を行う。大変形解析を用いた曲面生成法を提案し、最適化による曲面形状の操作手法を解説する。また、ABAG の初期格子状平板の設計段階において、非均一な形状のユニットを平板に組込む手法を導入する。この設計法により、生成可能な曲面のクラスが増加することを確認する。さらに、上記の最適化問題を組み合わせた形状設計法を提案する。

第 3 章では、均一な六角形で構成された離散円筒機構の形状設計法および力学特性を示す。離散幾何学に基づく理論式を拡張し、2 回回転対称性を有する六角形で構成される離散円筒機構の形状設計法を導入する。次に、離散円筒機構の構成要素を板材として設計するための手法を提案する。ここでは、板材のねじれを低減することで製作性の向上を主眼に置く。さらに、静的構造解析を通じて、梁要素でモデル化した離散円筒機構の力学特性を調べる。明らかになった力学特性について、物理学的な対称性の観点から考察する。

第 4 章では、大変形に伴う非線形性を考慮した 3 次元弾性梁モデルを開発する。提案モデルにより、真直な梁部材を組み合わせた直交格子を有する、従来型のベンディングアクティブ・グリッドシェルの大変形解析が良好な精度で実現できることを示す。さらに、第 2 章で提案する ABAG の形状設計にも適用可

能なことを例証する。

第5章では、前章までに得られた事項をもとに、本研究を総括した結論を提示する。

第2章

負のポアソン比を持つ柔軟な格子状曲面の形状設計法

2.1 はじめに

本章では、オーゼティック構造の特性を活用して平面から曲面を生成するベンディングアクティブ構造であるオーゼティック・ベンディングアクティブ・グリッドシェル (auxetic bending-active gridshell: ABAG) の形状設計法を提案する。具体的には、ABAG の大変形後の曲面上の各節点における離散ガウス曲率の分布の設計に関する最適化手法の定式化を行う。

曲面生成という観点における ABAG の利点は、正のガウス曲率を持つ曲面を単純な面外変形によって生成できる点にある。ガウス曲率は、曲面の形状に関する幾何学的な不変量である。Fujita and Ohsaki [114] は、Bézier 曲面としてパラメトリックにモデル化した曲面とその幾何学的不変量を用いた連続体シェルの形状設計を目的とした最適化手法を提案した。しかし、パラメトリック曲面では生成できる曲面のクラスが限定されてしまうため、設計者が求める形状を得ることは困難である。さらに、パラメータに関する高次の微分係数の計算は極めて複雑であり、しばしば実装が困難となる。

幾何学特性の高次の微分演算は、離散微分幾何学に基づく計算技術の導入により回避できる。離散ガウス曲率の計算方法はいくつかの方法が知られているが [115,116]、最も簡易な方法は多面体上の節点における角度欠損 (angle defect) の定義によるものである [117]。離散ガウス曲率は、多面体上の凹凸の量を定量化する概念である。一方、離散平均曲率ベクトルは、多面体上の節点における法線ベクトルとして定義される。離散平均曲率ベクトルのノルムは、離散平均曲率の大きさを表す。そのため、離散平均曲率ベクトルは、離散曲面上の節点の凸方向を特定するのに有効である。

また、ABAG の大変形解析では幾何学的非線形性を考慮する。そのため、最適化問題において目的関数が非常に複雑な関数で定式化されてしまう。したがって、設計変数を用いて目的関数を陽に表すことは困難である。このような非線形性を有する定式化を要する最適化問題は非線形最適化問題と呼ばれ、その解法は定式化された関数の勾配を用いるか否かという観点で分類できる。本問題のように、目的関数や制約関数を設計変数で陽に表すことが困難な問題に対しては、勾配を用いる解法を適用する利点は認められない。そのため、勾配を用いない解法を選択するのが自然である。メタヒューリスティクス (metaheuristics) は、関数の勾配を使用しない最適化問題の解法であり、非線形最適化問題を解くのに

有効である [118-120]. さらに, メタヒューリスティクスの基本的なアルゴリズムである粒子群最適化法 (particle swarm optimization: PSO) [121], 遺伝的アルゴリズム (genetic algorithm: GA) [122], 疑似焼きなまし法 (simulated annealing: SA) [123] などはソフトウェアやライブラリが充実しており, 実装も容易である.

2.2 負のポアソン比を持つ格子状平板の設計

2.2.1 オーゼティック構造となる格子の幾何形状

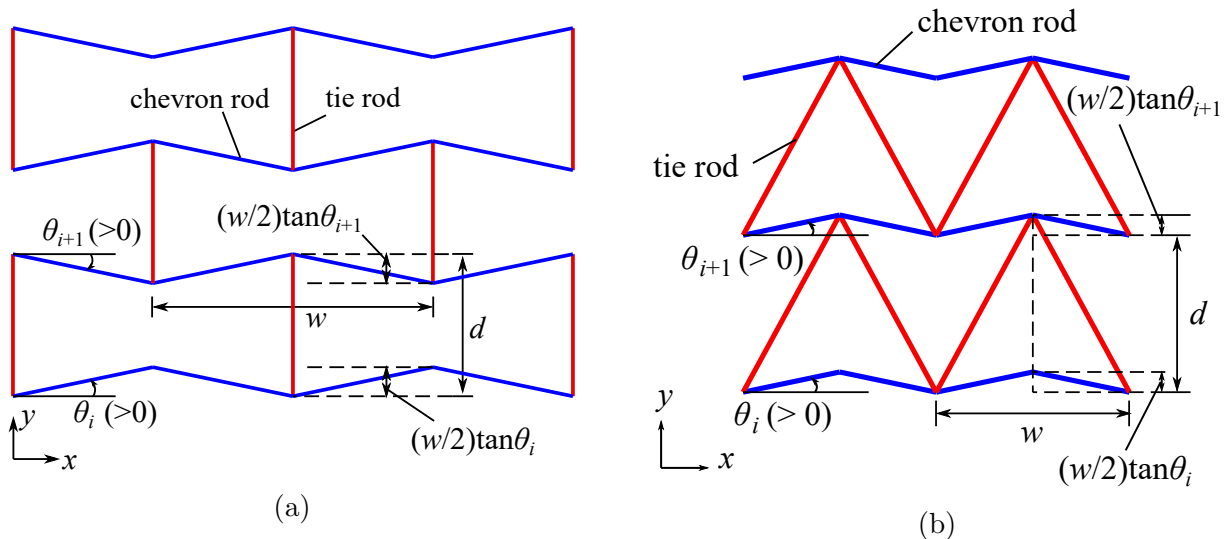


図 2.1: リエントラント・パターン; (a) リエントラント・ハニカム, (b) リエントラント四辺形.

面内変形に対してポアソン比が負である平面的な構造は, 第 1 章 1.3.2 節で触れたリンク機構で構成されるものの他に, リエントラント・パターン (reentrant pattern) と呼ばれる, ジグザグ形状の部材からなる凹な幾何形状の平面充填で構成されるものがある [124]. リエントラント・ハニカム [125] とリエントラント四辺形 [71] は, 数多く存在するオーゼティック構造をなす幾何形状のなかでもよく知られたパターンである [53]. 図 2.1 に示すように, リエントラント・パターンを構成する部材はシェブロン・ロッドとタイ・ロッドの 2 種類とする. シェブロン・ロッド (青の線分切片) は x 方向に接続する複数の線形要素で構成され, タイ・ロッド (赤) は y 方向に配置される部材である.

ABAG の曲面は, 大変形解析を実行して得られる. これまでに, ABAG の大変形解析に対して, 構造要素にシェル要素を適用した例がある [79-82]. 梁要素は, シェル要素に比較すると自由度が小さいため大変形解析における計算負荷を低減できる. とくに, 本研究では最適化の各イテレーションごとに, 幾何学的非線形性を考慮した ABAG の大変形解析をくり返し実行する. そのため, 一回の解析にかかる計算時間の短縮は, 最適化全体の計算時間に大きく影響する. したがって, 本研究では梁要素を用いて ABAG の部材を設計する. 2.2.2 節において, 梁要素を用いても ABAG の曲面の力学特性を再現可能であることを確認している.

ここで, m 本のシェブロン・ロッドで構成される ABAG について考える. ユニットの形状を図 2.1 に

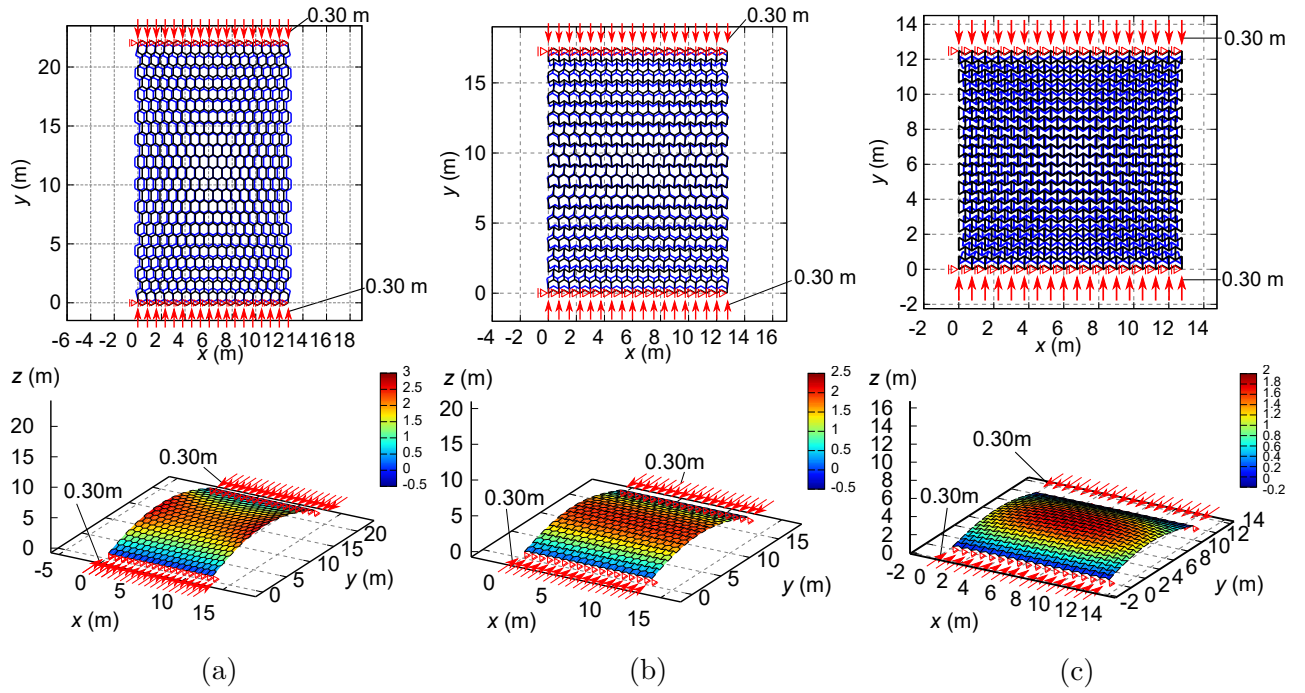


図 2.2: ポアソン比 ν とガウス曲率の関係. (上段) 面内変形に対する変形形状 (青) 初期形状 (黒) の平面図. (下段) 面外変形に対する変形形状. コントラは z 方向変位を表す; (a) $\nu > 0$, (b) $\nu \simeq 0$, (c) $\nu < 0$.

示す. θ_i ($i = 1, \dots, m$) は, x 軸と i 番目のシェブロン・ロッドの左端の要素の間の角度である. w と d はそれぞれ, 各リエントラント・パターンの x 方向と y 方向のサイズを表す. 大変形解析中のシェブロン・ロッドとタイ・ロッドの変形性状は異なる. シェブロン・ロッドは弾性的に変形し, 曲げとねじれを生じる. そのため, 構造全体の大変形形状はシェブロン・ロッドの大変形形状に大きく影響を受ける. 一方で, タイ・ロッドは, シェブロン・ロッドを接続する役割を果たす. 大変形過程においてもタイ・ロッドの変形量はシェブロン・ロッドの変形量よりも小さく, 構造全体の形状にほとんど影響しない.

リエントラント・ハニカムの角度 θ_i の正の方向は, シェブロン・ロッドの番号の偶奇で異なる. すなわち, i が奇数のときは反時計回りであり, 偶数のときは時計回りである. リエントラント四辺形については, 全てのシェブロン・ロッドに対して角度 θ_i の正の方向を反時計回りとする. また, 2 種のリエントラント・パターンに対して次の幾何学的な制約を与える.

$$\text{リエントラント・ハニカム:} \quad d - \frac{1}{2}w(\tan \theta_i + \tan \theta_{i+1}) > 0$$

$$\text{リエントラント四辺形:} \quad d - \frac{1}{2}w|\tan \theta_i - \tan \theta_{i+1}| > 0$$

これらの条件式が満たされなければ, i 番目と $(i+1)$ 番目のシェブロン・ロッドが互いに接触・干渉し合うため実用的な形状が得られない.

2.2.2 格子の面内変形に対するポアソン比と曲面のガウス曲率の関係

平板から生成した曲面のガウス曲率は、曲面を構成するユニットの面内変形に対するポアソン比に関する [79-82,126,127]. Evans [127] は、この関係に対して板理論に基づく以下の式を示した。

$$R_2 = -\frac{R_1}{\nu_{12}} \quad (2.1)$$

R_1 と R_2 は文献 [127] における曲面の直交 2 方向（主曲率方向）を表す方向 1, 2 の曲率半径である。 ν_{12} は、方向 1, 2 間のポアソン比である。なお、式 (2.1) は 2 つの主曲率方向に対する面外曲げを受けた平板構造に対して成立する。式 (2.1) に従うと、面内変形に対するポアソン比が正のとき、面外変形を受ける平板はガウス曲率が負の曲面を生成する。面内変形に対するポアソン比が負なら、平板からはガウス曲率が正の曲面が生成される。本節では、リエントラント・ハニカムを含む 3 種の六角形ユニットで構成された格子状平板に対する大変形解析を通じ、関係式 (2.1) の成立を確認する。

図 2.2 は、3 種の異なる六角形ユニットで構成される格子状平板の面内変形形状（上段）と面外変形形状（下段）を示している。図 2.2(a), (b), (c) はそれぞれ、面内変形に対するポアソン比が正、およそ 0、負のユニットからなる格子状平板に対応する。各ユニットのサイズは、 $w = d = 0.75$ m である。全ての部材の断面幅と断面せいはそれぞれ 0.01 m と 0.10 m である。図 2.2(a) のポアソン比 $\nu > 0$ の例では $\theta_i = -\pi/6$ とし、図 2.2(c) のポアソン比 $\nu < 0$ の例では $\theta_i = \pi/6$ とした。図 2.2(b) の $\nu \simeq 0$ の例について、 i が奇数のときは $\theta_i = \pi/6$ とし、 i が偶数のときは $\theta_i = -\pi/6$ とした。境界条件について、1 番目と m 番目のシェブロン・ロッドとタイ・ロッドの接合部を y 方向のローラーとする。強制変位は、全てのローラー支点に対して 0.30 m の大きさを y 方向に作用させる。図 2.2 内の矢印は、強制変位の方角を表している。面内変形前後の形状比較において、黒の線分で表しているのが変形前の形状であり、青が変形後である。大変形解析の詳細は 2.5 節に示す。

まず、ポアソン比 $\nu > 0$ の例について、面内変形では、一軸方向の圧縮により格子状平板が直交方向に膨張していることが確認できる。面外変形では、曲面に負のガウス曲率が生じ、形状は鞍型となる。次に、ポアソン比 $\nu \simeq 0$ の例について、面内変形では、圧縮方向に直交する方向へ極めて微小な変形が確認できる。面外変形では、ガウス曲率がおよそ 0 である、可展面に近似できる曲面が生成される。最後に、ポアソン比 $\nu < 0$ の例について、面内変形では、一軸方向の圧縮により格子状平板が直交方向に縮小している。面外変形では、曲面に正のガウス曲率が生じ、形状はドーム型となる。

2.3 離散微分幾何学における離散曲率

本節では、文献 [115,117,128] に基づき、第 2 章の提案手法の根幹をなす、離散微分幾何学における離散（多面体）曲面上の曲率の計算手法を詳説する。

ABAG は離散的な骨組構造としてモデル化される。そのため、ABAG 曲面の凹凸の定量化には、離散的な手法が有効である。

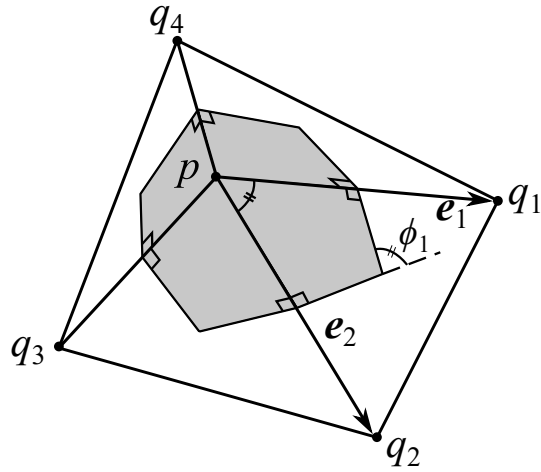


図 2.3: 頂点 q_v ($v = 1, \dots, 4$) に対応する 4 つの三角形からなる, 頂点 p における四角錐とボロノイ領域 (灰色の領域).

2.3.1 離散ガウス曲率

離散ガウス曲率は, 多面体曲面上の凹凸量として定義される. 連続な曲面上のガウス曲率と離散ガウス曲率の対応は, 曲面の全曲率とトポロジーの関係を結ぶガウス-ボネの定理 [117] により保証される. 図 2.3 は, 頂点 p と q_v ($v = 1, \dots, 4$) からなる四角錐を示す. 図 2.3 内の灰色の領域は, 4 つの三角形の内接円の中心から各辺への垂直 2 等分線を結合して生成されるボロノイ領域である. ボロノイ領域の 4 頂点の外角の和は, 頂点 p に集まる 4 つの三角形の内角の合計値に等しい. それゆえ, 離散ガウス曲率は, 平坦形からの角度欠損 (angle defect) として, 以下のように定式化される [115,117].

$$\begin{aligned}
 K_p &= 2\pi - \sum_{v=1}^4 \phi_v \\
 &= 2\pi - \sum_{v=1}^4 \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{e}_v \cdot \mathbf{e}_{v+1}}{|\mathbf{e}_v| \cdot |\mathbf{e}_{v+1}|} \right)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

図 2.4 に示すとおり, 頂点 p の離散ガウス曲率の符号は, p と q_v の幾何学的な関係を分類する. $K_p > 0$ なら p を中心とした錐となる. 一方で, $K_p < 0$ なら鞍型となる.

2.3.2 離散平均曲率ベクトル

離散平均曲率ベクトルは, 4 つの三角形領域の勾配の和に対する逆方向ベクトルとして定義される. 頂点 p における離散平均曲率ベクトル \mathbf{H}_p は, Sullivan によって示された以下の式で計算される [117].

$$\mathbf{H}_p = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^4 (\cot \alpha_{v1} + \cot \alpha_{v2}) (\mathbf{p} - \mathbf{q}_v) \tag{2.3}$$

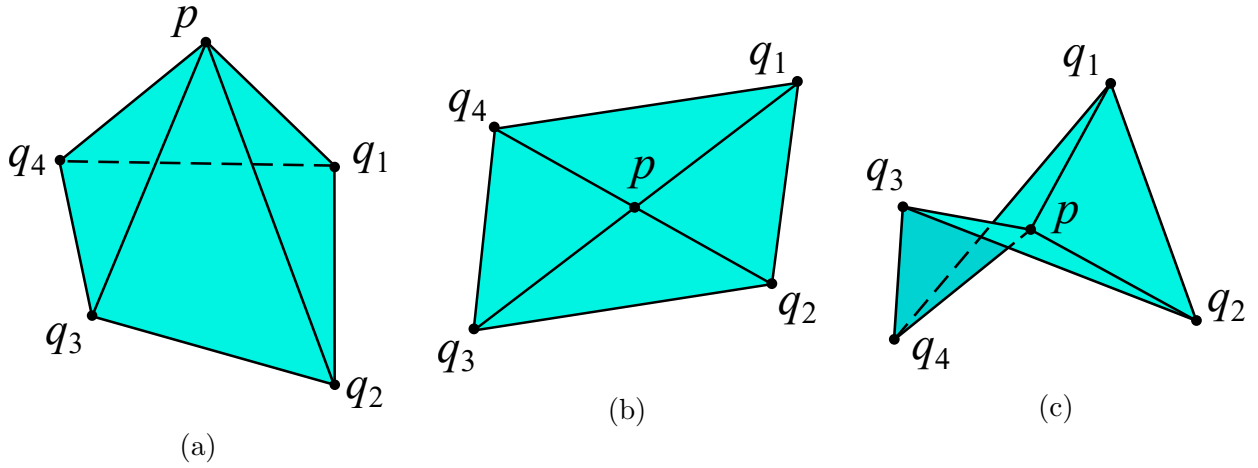


図 2.4: 離散ガウス曲率の符号によって分類される四角錐の形状; (a) $K_p > 0$, (b) $K_p = 0$, (c) $K_p < 0$.

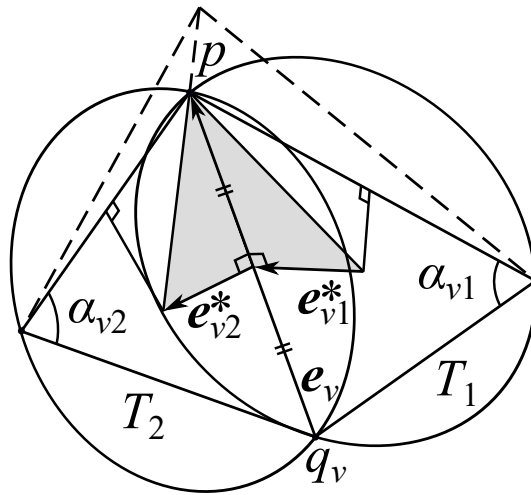


図 2.5: Cotangent formula の導出に用いるベクトルと角度.

式 (2.3) は, cotangent formula と呼ばれ, 離散微分幾何学分野でよく知られる [115,128]. 重み係数 $(\cot \alpha_{v1} + \cot \alpha_{v2})/2$ は, 以下の幾何学的関係より導かれる [116].

$$\frac{|e_{v1}^*| + |e_{v2}^*|}{|e_v|} = \frac{1}{2} (\cot \alpha_{v1} + \cot \alpha_{v2}) \quad (2.4)$$

図 2.5 に示すように, ベクトル e_v に垂直なベクトル e_{v1}^* は, 辺 pq_v の中点と三角形 T_1 の内接円の中心を結ぶ. 同様に, e_{v2}^* は辺 pq_v の中点と三角形 T_2 の内接円の中心を結ぶ. 図 2.6 (a), (b), (c) は, 頂点 p における離散平均曲率ベクトル $\mathbf{H}_p = (H_p^x, H_p^y, H_p^z)$ が異なる方向を指すときの錐の形状例を表している. $K_p > 0$ のとき, $H_p^z > 0$ あるいは $H_p^z < 0$ に対して, それぞれ頂点 p の凸方向が上方あるいは下方を指す. 平均曲率が 0 の場合, ベクトル \mathbf{H}_p は消失する.

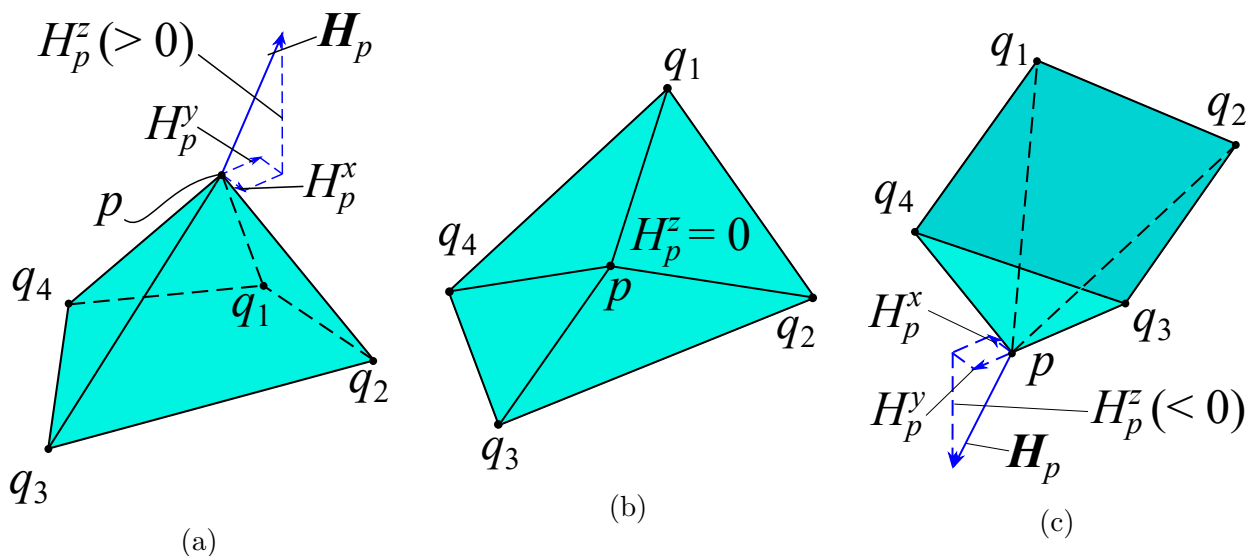


図 2.6: 離散平均曲率ベクトルの方向; (a) 上方向, (b) 平均曲率 0, (c) 下方向.

2.4 ABAG の離散ガウス曲率分布設計に関する最適化問題

本節では、離散ガウス曲率を曲面形状の定量評価に用いた最適化手法に基づく、ABAG の形状設計法を提案する。ABAG は、負のポアソン比を有する点で通常の構造物とは異なる。そのため、ABAG の力学特性は直感とは異なっており、加えて、幾何学的非線形性を考慮した大変形解析を扱うことから、形状設計におけるパラメータの設定が困難である。このことから、ABAG の形状設計法には最適化の利用が有効であると考えられる。以下で示す最適化問題では、シェブロン・ロッドの断面せいと角度 θ_i を変数として扱う。

2.4.1 ABAG 曲面の離散化

離散曲率は、多面体上の点における曲率を計算するうえで定義されている [115,117]。ABAG を構成するユニットは、線分切片を用いた離散的な幾何形状を有する。したがって、離散曲率の計算には、ABAG の接合部上の頂点位置に基づく三角形分割が必要である。図 2.7 は、ABAG 上の各節点に作成した、4 つの三角形からなる四角錐を表している。図 2.7 内の円形のマークは、接合部上の節点を表す。灰色の領域は、四角錐を示す。なお、四角錐は境界上の節点を除く全ての節点について生成する。境界上の節点は、四角錐を生成するための近傍の点が不足しているため、異なる曲率計算の定義が必要となる。しかし、本研究では曲面の境界上の離散曲率は重要でないため計算しないものとする。

2.4.2 シェブロン・ロッドの断面せいの設計

Saxena *et al.* [53] は、各部材の断面せいと幅によってリエントラント・ハニカムの面内変形に対するポアソン比が決定することを示した。一方で、2.2.1 節で述べたように、Naboni *et al.* [79-81] によると、

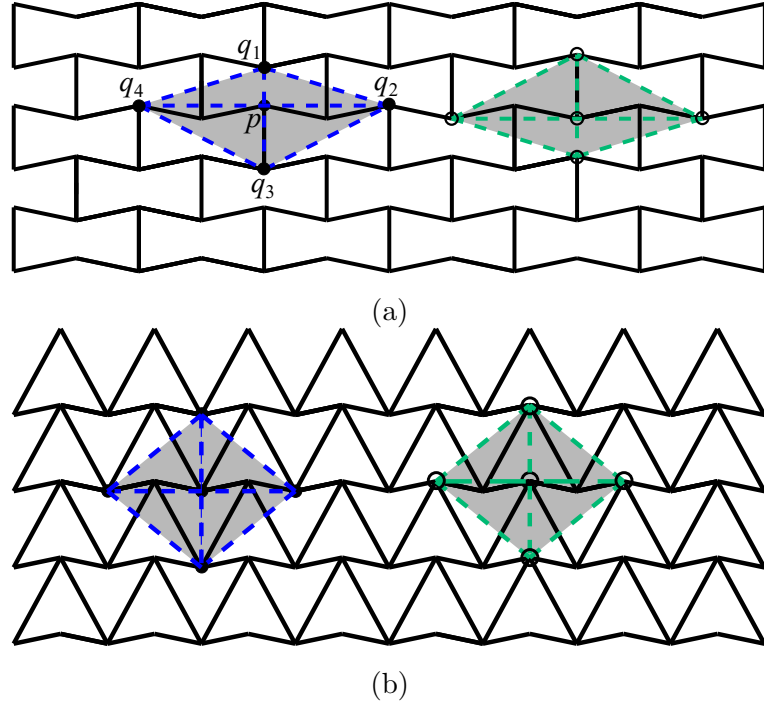


図 2.7: ABAG の曲面上の各節点における 4 つの三角形からなる四辺形メッシュ; (a) リエントラント・ハニカム, (b)リエントラント四辺形.

ABAG 曲面上のガウス曲率の分布は各部材の断面せいに依存する．したがって，部材の断面せにより，曲面上にさまざまな離散ガウス曲率分布を生成できる．ここでは，タイ・ロッドの断面せいは定数とし，シェブロン・ロッドの断面せいを 3 次のバーンスタイン多項式で定式化した変数とする．この設定による利点は，全てのシェブロン・ロッドについて断面せいが滑らかに変化すること，および，設計変数としてバーンスタイン係数を用いることで設計変数の数を減少させられることである．

バーンスタイン係数 β_l ($l = 0, \dots, 3$) とパラメータ u ($0 \leq u \leq 1$) を用いることで，3 次のバーンスタイン多項式は次のように書ける．

$$B(u) = \beta_0 (1-u)^3 + 3\beta_1 (1-u)^2 u + 3\beta_2 (1-u) u^2 + \beta_3 u^3 \quad (2.5)$$

m 本のシェブロン・ロッドで構成される ABAG を考える． t_{ik} は， i ($i = 1, \dots, m$) 番目のシェブロン・ロッドの要素 k ($k = 1, \dots, n_i$) の断面せいを表し， n_i は i 番目のシェブロン・ロッドの要素数とする． β_{li} ($l = 0, \dots, 3$) は， i 番目のシェブロン・ロッドのバーンスタイン係数である．パラメータ u は， k 番目の要素について $u_k = (k-1)/(n_i-1)$ として分割される．ここでは，簡単のため，対称なシェブロン・ロッドを考え， n_i を偶数とする．また，断面せい分布の対称性を考慮して，バーンスタイン係数は条件式 $\beta_{3i} = \beta_{0i}$ および $\beta_{2i} = \beta_{1i}$ を満たすものとする．この条件を用いると，断面せい t_{ik} は，以下のように定式化される．

$$t_{ik} = \beta_{0i} \left[(1-u_k)^3 + u_k^3 \right] + 3\beta_{1i} \left[(1-u_k)^2 u_k + (1-u_k) u_k^2 \right], \quad u_k = \frac{k-1}{n_i-1} \quad (2.6)$$

2.4.3 最適化問題の定式化：特定領域内における離散ガウス曲率の最大化

本節では、目標節点として指定した節点における離散ガウス曲率を増加させた領域を有する ABAG 曲面を得る手法を提案する。目的関数 F を、設計者が任意に指定した特定領域内の節点 j ($j = 1, \dots, N$) における離散ガウス曲率 K_j の最小値とする。以下では、目的関数 F を最大化する最適化問題の定式化を行う。本問題を解くことで、特定領域で凸な形状を有する曲面が得られる。さらに、目標節点 j における離散平均曲率ベクトル $\mathbf{H}_j = (H_j^x, H_j^y, H_j^z)$ の z 成分 H_j^z が非負となる制約条件を与える。この条件により、目標節点 j の凸方向が z 方向の負の向きになる曲面は制約違反となる。すなわち、本問題は、局所的に上に凸な形状を持つ ABAG 曲面を設計するための最適化問題であるといえる。

先に述べたように、設計変数は $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, $\boldsymbol{\beta}_0 = \{\beta_{01}, \dots, \beta_{0m}\}$, $\boldsymbol{\beta}_1 = \{\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}\}$ である。大変形解析の非線形性に伴い、これらの設計変数と離散ガウス曲率 K_j の関係式を陽に書き下すことは困難である。最適化の準備として、3 種の設計変数 $\theta_i, \beta_{0i}, \beta_{1i}$ に異なる値を与えて得られる格子状平板から生成される曲面の離散ガウス曲率分布を確認する。大変形解析には Abaqus Ver. 2018 [15] を使用する。境界条件および強制変位は、2.5 節で詳説する方法で設定する。リエントラント・ハニカムで構成された 4 つの曲面 (Case 1–4) について検討する。表 2.1 には、これらの例に対して設定した $\theta_i, \beta_{0i}, \beta_{1i}$ の値を掲載している。 $\theta_i, \beta_{0i}, \beta_{1i}$ の値が曲面形状に影響を与えることは、図 2.8 より明らかである。図 2.8 の (a)–(d) は、それぞれ Case 1–4 に対応しており、各例の上段の図は曲面上の離散ガウス曲率分布、下段の図は大変形後の曲面を示している。

Case 1 および Case 2 は、同一の β_{0i}, β_{1i} の設定のもとで θ_i を変更した 2 例である。Case 1 では $i = 8$ および 9 番目のシェブロン・ロッドに与えた θ_i が他のシェブロン・ロッドよりも小さく、反対に Case 2 では大きい。Case 1 は、 $i = 8, 9$ のシェブロン・ロッド上の節点での離散ガウス曲率が周囲と比較して大きな値を示している。一方で、Case 2 では曲面の中央付近で離散ガウス曲率の値が大きくなってはいるものの、 $i = 8, 9$ 番目のシェブロン・ロッドの節点における離散ガウス曲率は小さい。さらに、Case 2 の曲面における離散ガウス曲率の値の最大値は、Case 1 の最大値の 1/10 程度である点も異なる。

Case 3 および Case 4 は、同一の θ_i の設定のもとで β_{0i} と β_{1i} を変更した 2 例である。Case 3 では、各シェブロン・ロッドの断面せいが、境界付近で小さく中央部分で大きい。反対に、Case 4 では、各シェブロン・ロッドの断面せいが、境界付近で大きく中央部分で小さい。Case 3 は、曲面中央付近の離散ガウス曲率が大きく、境界付近では小さい。一方で、Case 4 では境界付近の離散ガウス曲率の値が大きく、曲面中央付近では小さい。Case 3 と Case 4 の曲面における離散ガウス曲率の最大値は、概ね近い値を示している。

最適化問題は、以下のように定式化できる。

$$\max. \quad F = \min_{1 \leq j \leq N} K_j(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1) \quad (2.7a)$$

$$\text{subject to} \quad H_j^z(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\beta}_1) \geq 0, \quad (j = 1, \dots, N) \quad (2.7b)$$

$$\boldsymbol{\theta}^L \leq \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{\theta}^U, \quad \boldsymbol{\beta}_0^L \leq \boldsymbol{\beta}_0 \leq \boldsymbol{\beta}_0^U, \quad \boldsymbol{\beta}_1^L \leq \boldsymbol{\beta}_1 \leq \boldsymbol{\beta}_1^U \quad (2.7c)$$

上添字 U および L はそれぞれ、設計変数の上限値、下限値を表す。目的関数 F は、設計変数に対して非線形性の強い関数である。このような問題の場合、目的関数を設計変数で陽に記述することは難しく、

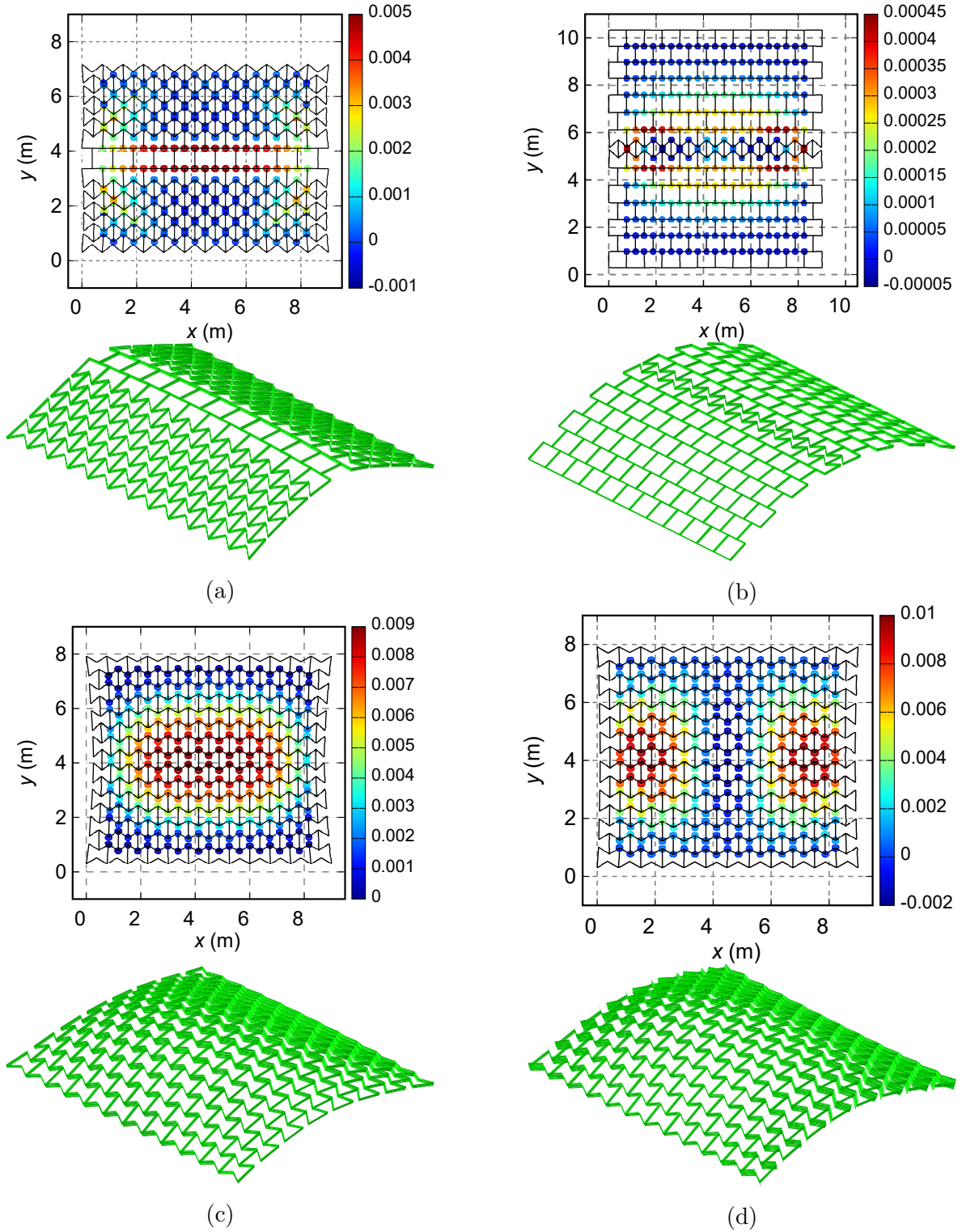


図 2.8: 異なるパラメータ θ_i , β_{0i} , β_{1i} に基づき生成される曲面の離散ガウス曲率分布と形状; (a) Case 1, (b) Case 2, (c) Case 3, (d) Case 4.

表 2.1: Case 1–4 の変数 $\theta_i, \beta_{0i}, \beta_{1i}$.

Parameters	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
θ_8 and θ_9	0	$2\pi/9$	$\pi/6$	$\pi/6$
$\theta_i (i \neq 8 \text{ or } 9)$	$2\pi/9$	0	$\pi/6$	$\pi/6$
$\beta_{0i} (i = 1, \dots, 16)$	0.10	0.10	0.01	0.30
$\beta_{1i} (i = 1, \dots, 16)$	0.10	0.10	0.30	0.01

感度解析を行うことは困難である。したがって、感度解析を必要としない最適化問題の解法としてメタヒューリスティクスの一つである、粒子群最適化 (particle swarm optimization: PSO) を用いる [121]。無作為に生成された多数の粒子 (初期解) が、各粒子のもつ局所的情報と粒子全体で共有する大域的情報に基づき、実行可能領域内で最良の位置を発見する、というのが PSO の考え方である。PSO のアルゴリズムの詳細は付録に記す。

2.5 最適化による ABAG 曲面の形状生成例

本問題に対する数値例題として、6 つの例について検討する。本問題を解く目的は、局所的に上に凸となる領域 (特定領域) を指定した ABAG 曲面を設計することである。これにより、未だ確立されていない ABAG 曲面の設計法の一例を提示することができる。以下では、モデルの種類を、ABAG を構成するユニットがリエントラント・ハニカムであるなら Type RH, リエントラント四辺形なら Type RQ と呼称する。

部材の材料定数は、ガラス繊維補強ポリマー (glass fiber reinforced polymer: GFRP) を想定してヤング係数 25 GPa, ポアソン比 0.221 とする。GFRP は、軽量さ, 高強度, 柔軟性の観点からベンディングアクティブ構造に適した材料である [129]。

部材の断面は、矩形断面とする。タイ・ロッドのせいと幅をそれぞれ、0.10 m, 0.01 m とする。一方、シェブロン・ロッドについて、断面せいを式 (2.6) で決定し、幅を 0.01 m とする。シェブロン・ロッドの断面せいを定める設計変数 β_0, β_1 の下限値は、 $\beta_0^L = \beta_1^L = 0.01$ m とする。なお、 β_0^L および β_1^L の値はシェブロン・ロッドの断面せいの下限値に直接対応している。また、上限値は、 $\beta_0^U = \beta_1^U = 0.30$ とする。表 2.2 は、ABAG の初期格子状平板の形状と断面せいに関するパラメータを示している。ここで、ユニットが負のポアソン比を有する形状となる範囲での検討を行うため、設計変数 θ は正値から選ぶ。 θ の上限値は 2.2.1 節で説明した幾何学的な制約に基づき設定する。以下の例題において、PSO のパラメータは、 $\omega = 0.75, c_1 = 0.75, c_2 = 0.5$ と定める。粒子数を 100, 最大くり返し数を 30 とする。目的関数値に対するパラメータの影響については付録で検証する。

大変形解析に対して、準静的増分解析を実行する。荷重パラメータ τ は、最大時間増分 5.0×10^{-2} で線形的に増加する。さらに、解析における全時間は 2 つのフェーズに分割される。 $0.0 \leq \tau \leq 1.0$ では、全部材に対して自重と同じ大きさの鉛直上向きの補助的な荷重を作用させる。このフェーズにより、解析初期における部材の真直性に伴う分岐座屈の問題が解消される。 $1.0 \leq \tau \leq 2.0$ では、前のフェーズで与えた補助的な荷重で変形した曲面の境界に対し、強制変位を作用させる。同時に補助的な荷重を除去し

表 2.2: ABAG の初期格子状平板の形状と最適化に関するパラメータ.

Type	w (m)	d (m)	θ^L	θ^U	β_0^L	β_0^U	β_1^L	β_1^U
RH	0.75	0.75	0	$2\pi/9$	0.01	0.30	0.01	0.30
RT	0.60	$0.30\sqrt{3}$	0	$5\pi/18$	0.01	0.30	0.01	0.30

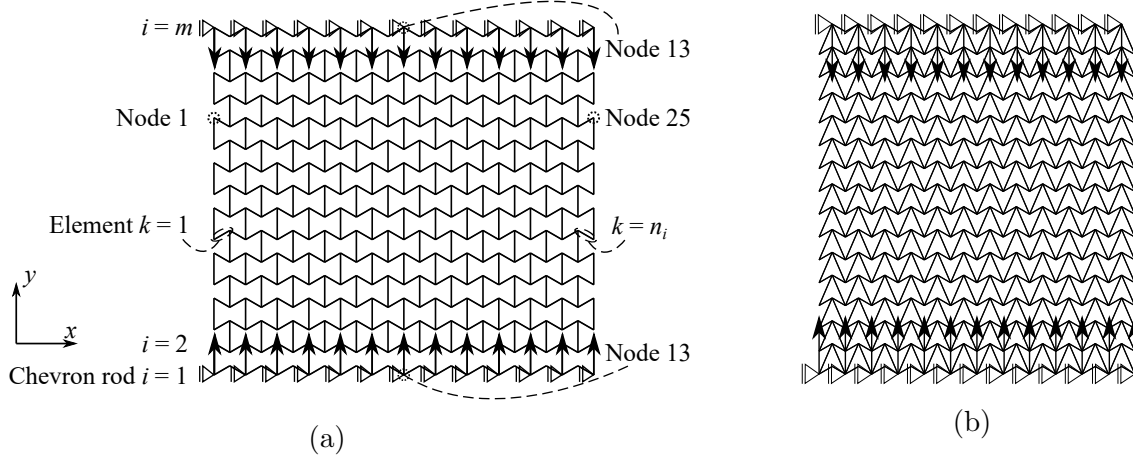


図 2.9: 境界条件と強制変位 (矢印) ; (a) Type RH, (b) Type RQ.

て, 全部材に対して自重を载荷する. 以下の例では, 最適化に対しては PSO の Python ライブラリである pyswarm 0.6 [130] を使用する.

2.5.1 例題: Type RH

図 2.9(a) に示すように, Type RH の初期格子状平板は 173 のリエントラント・ハニカムで構成される. 各シェブロン・ロッドの要素数は $n_i = 24$ であり, シェブロン・ロッド数は $m = 16$ 本である. 境界条件として, 1 番目と m 番目のシェブロン・ロッドの外側の位置に存在する接合部を, y 方向に沿って可動なローラー支点とする. なお, シェブロン・ロッドの番号は y の値の昇順とする. 図 2.9(a) 内の矢印の方向に沿って, 0.30 m の大きさの強制変位を全ての支点に作用させる.

初期格子状平板の x 方向のサイズは全ての例で 9.0000 m であり, RH1, RH2, RH3 の y 方向のサイズはそれぞれ 7.4243 m, 7.7977 m, 9.0115 m である. RH1 から RH3 の結果をそれぞれ, 図 2.10–2.12 に示す. 図 2.10(a) と図 2.12 の上段は, 曲面上の節点における離散ガウス曲率を示しており, 目標節点は灰色の領域で示している. これらの図に示されるように, 断面せい分布が対称なため, 離散ガウス曲率分布は yz 平面に平行な平面についてほぼ対称である. 図 2.10(b), (c), (d) はそれぞれ, シェブロン・ロッドの要素の断面せい分布, xz 平面上への曲面の投影図, yz 平面上への曲面の投影図である. 図 2.11 は, RH1 の最適解での形状であり, コントアは各要素の軸応力を示す. 図 2.12 の下段は, RH2 および RH3 の最適解に対する大変形後の曲面であり, コントアは z 方向変位を表す. このように, 特定領域の分布を変更することで, リエントラント・ハニカムで構成された ABAG のさまざまな形状を得られる. 表 2.3 は, RH1, RH2, RH3 の最適解での角度 θ の値 $(180/2\pi)\theta$ (deg.) を示している.

表 2.3: RH1, RH2, RH3 の最適解での角度 $(180/2\pi)\theta$ (deg.).

i	RH1	RH2	RH3	RQ1	RQ2	RQ3
1	40.0000	14.7488	13.7760	12.0472	31.0229	0.0000
2	30.2662	27.4255	24.3656	50.0000	50.0000	34.7531
3	39.9802	21.4771	7.4422	50.0000	50.0000	6.2228
4	40.0000	32.3327	14.2857	46.2684	50.0000	8.1381
5	40.0000	40.0000	10.9126	50.0000	11.3319	13.6342
6	40.0000	40.0000	7.0731	21.1182	14.1451	11.3380
7	40.0000	39.7786	40.0000	34.2966	23.9030	50.0000
8	17.3203	32.3755	0.0000	8.3701	21.9299	25.2091
9	12.6809	39.7769	40.0000	7.9463	49.2106	26.4698
10	39.1963	28.4857	31.7535	16.6086	43.5232	44.6211
11	40.0000	32.5705	40.0000	26.7399	13.1501	32.1896
12	40.0000	38.8833	0.0000	42.6460	17.1515	50.0000
13	35.5555	25.2261	40.0000	50.0000	9.1816	29.9167
14	40.0000	22.7660	0.0000	22.9564	39.1471	16.3895
15	40.0000	38.8350	40.0000	0.0924	50.0000	50.0000
16	10.0372	28.9499	0.0000	50.0000	37.3468	1.1488

表 2.4: 目標節点における離散ガウス曲率の平均値, 最大値, 最小値 ($\times 10^{-3}$).

	RH1	RH2	RH3	RQ1	RQ2	RQ3
Mean	15.4336	6.8785	5.8467	6.1106	2.0966	4.1352
Max.	16.0029	9.6618	7.5583	6.7981	4.6344	5.8518
Min.	15.0946	5.7211	4.9573	5.6182	1.4762	4.1352

図 2.13(a), (b), (c) はそれぞれ, RH1, RH2, RH3 の最適解での目標節点の離散ガウス曲率 K_j の値を示している. 目標節点を有するシェブロン・ロッドの数は RH1, RH2, RH3 のそれぞれについて, 2, 12, 4 である. 結果より, RH1, RH2, RH3 の全ての K_j の値は正であり, 凸な形状が得られていることがわかった. 表 2.4 に, RH1, RH2, RH3 の K_j の平均値, 最大値, 最小値を示す. RH1 について, x 方向に広く分布する目標節点において比較的大きな値の離散ガウス曲率が生じている. また, 図 2.14 は, RH1, RH2, RH3 の目的関数値の推移履歴を示している. 全ステップの 2/3 程度で目的関数はほぼ収束している.

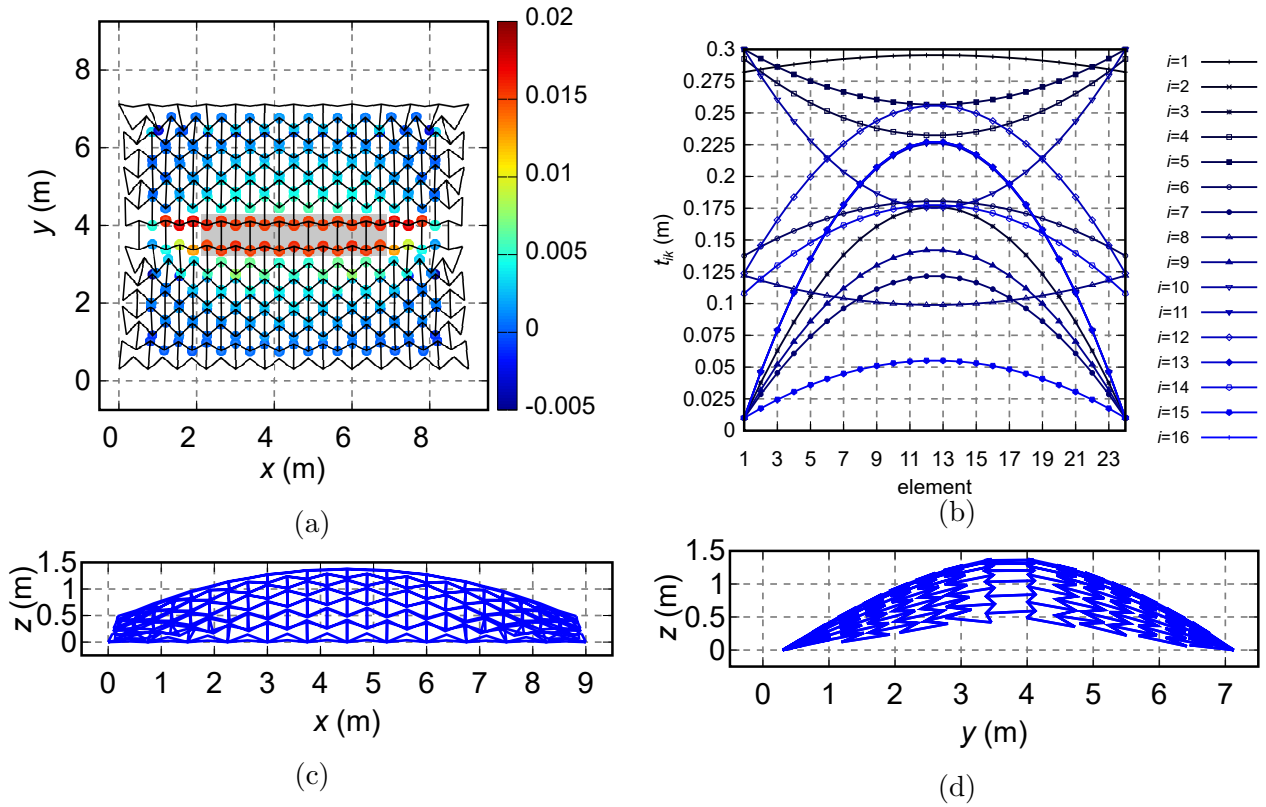


図 2.10: RH1 の最適解での形状と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図.

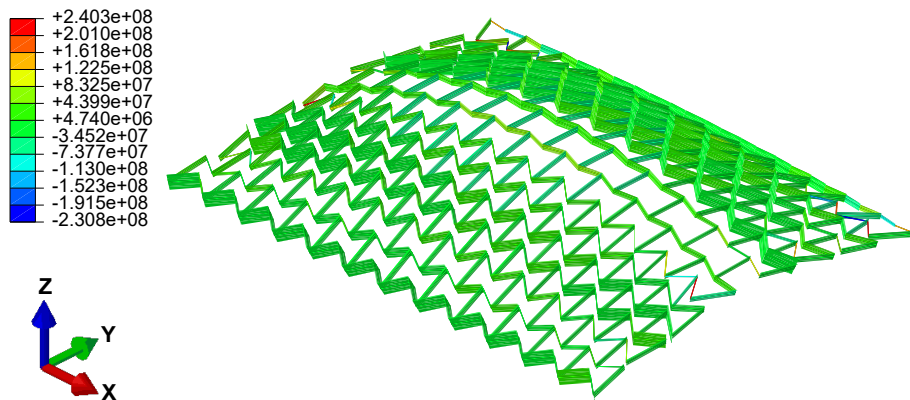


図 2.11: RH1 の最適解の形状 (コントア: 軸応力 (Pa)).

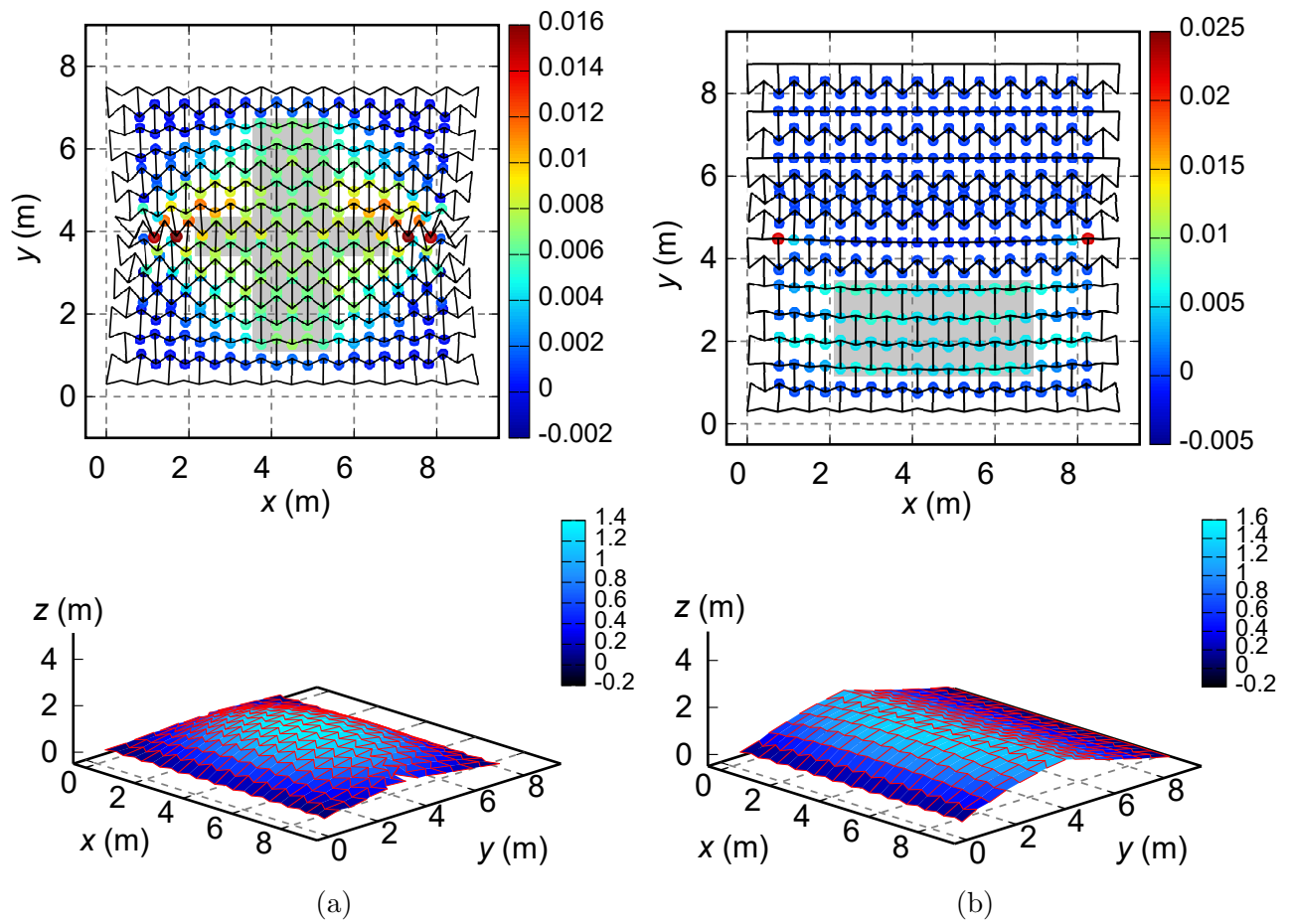


図 2.12: RH2 と RH3 の離散ガウス曲率分布と最適解での形状 (コントア: z 方向変位); (a) RH2, (b) RH3.

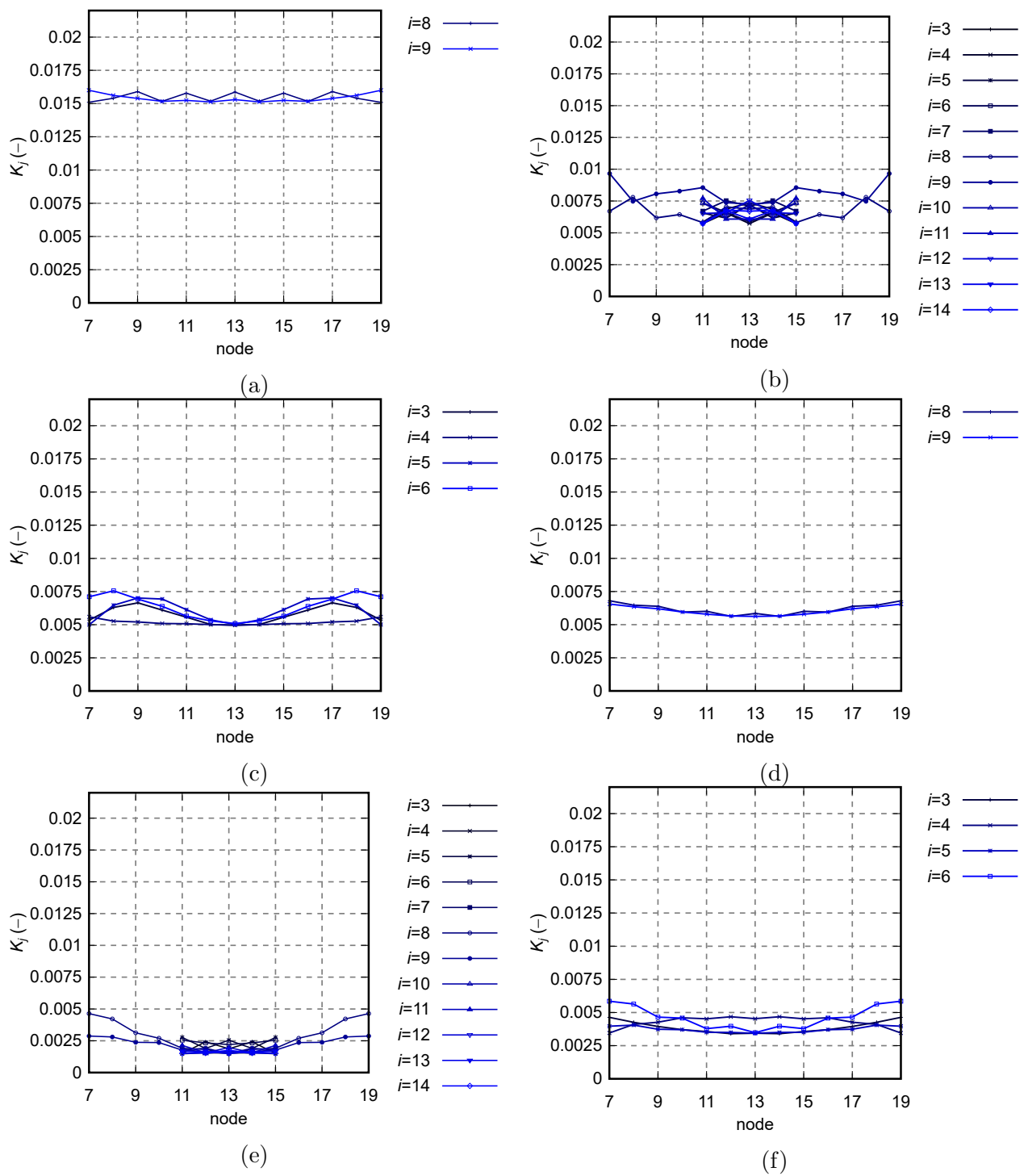


図 2.13: 目標節点上の離散ガウス曲率 K_j , (a) RH1, (b) RH2, (c) RH3, (d) RQ1, (e) RQ2, (f) RQ3.

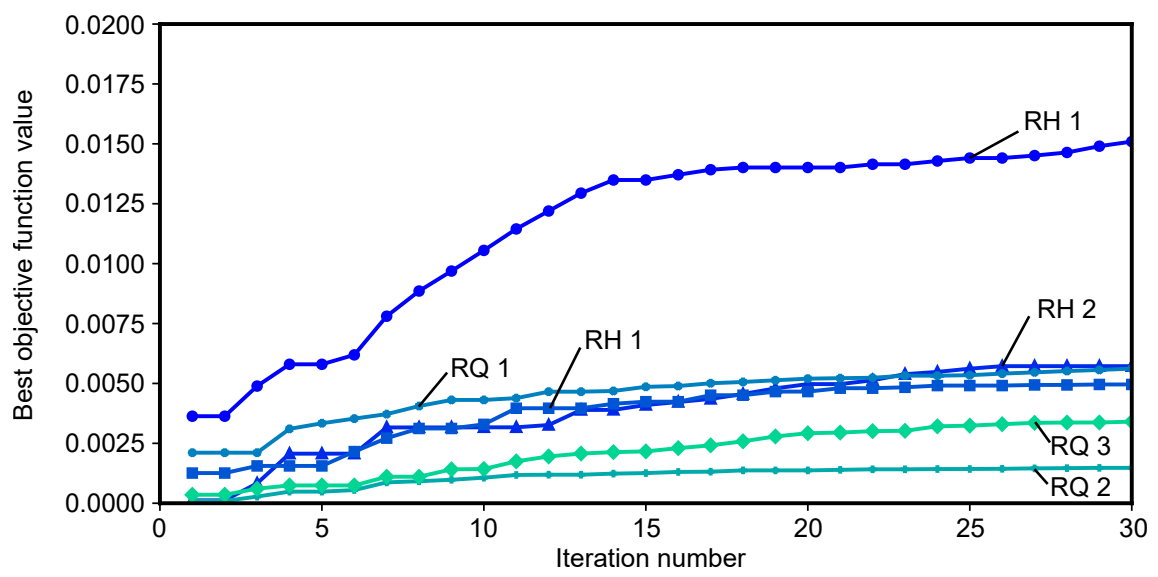


図 2.14: Type RH および Type RQ の目的関数の推移履歴.

2.5.2 例題: Type RQ

図 2.9(b) に示すように, Type RQ の初期格子状平板は 345 のリエントラント四辺形で構成される. 各シェブロン・ロッドの要素数は $n_i = 24$ ($i = 1, \dots, 15$) および $n_m = 22$ であり, シェブロン・ロッド数は $m = 16$ 本である. 境界条件は Type RH と同様に, 1 番目と m 番目のシェブロン・ロッドの外側の位置に存在する接合部を y 方向に沿って可動なローラー支点とする. 図 2.9(b) 内の矢印の方向に沿って, 0.30 m の大きさの強制変位を全ての支点に作用させる.

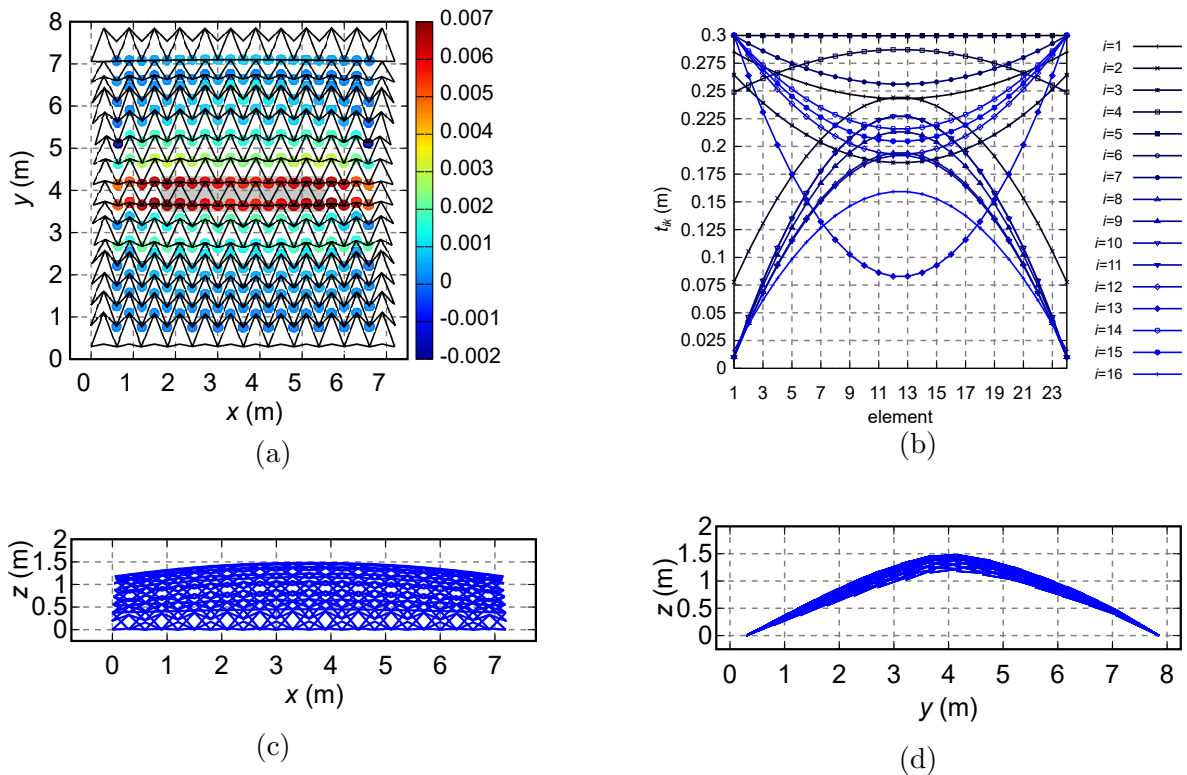


図 2.15: RQ1 の最適解での形状と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい分布, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図.

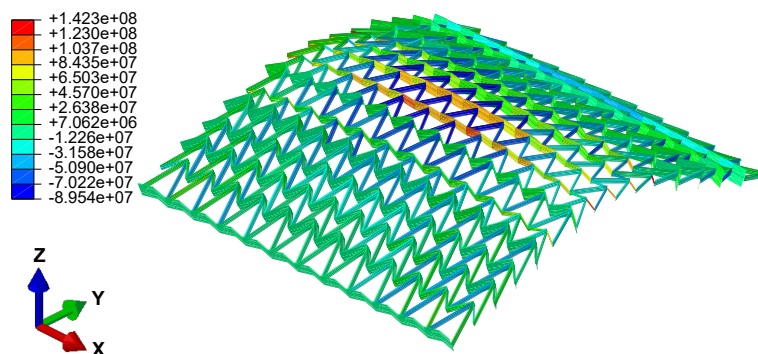


図 2.16: RQ1 の最適解の形状 (コントア: 軸応力 (Pa)).

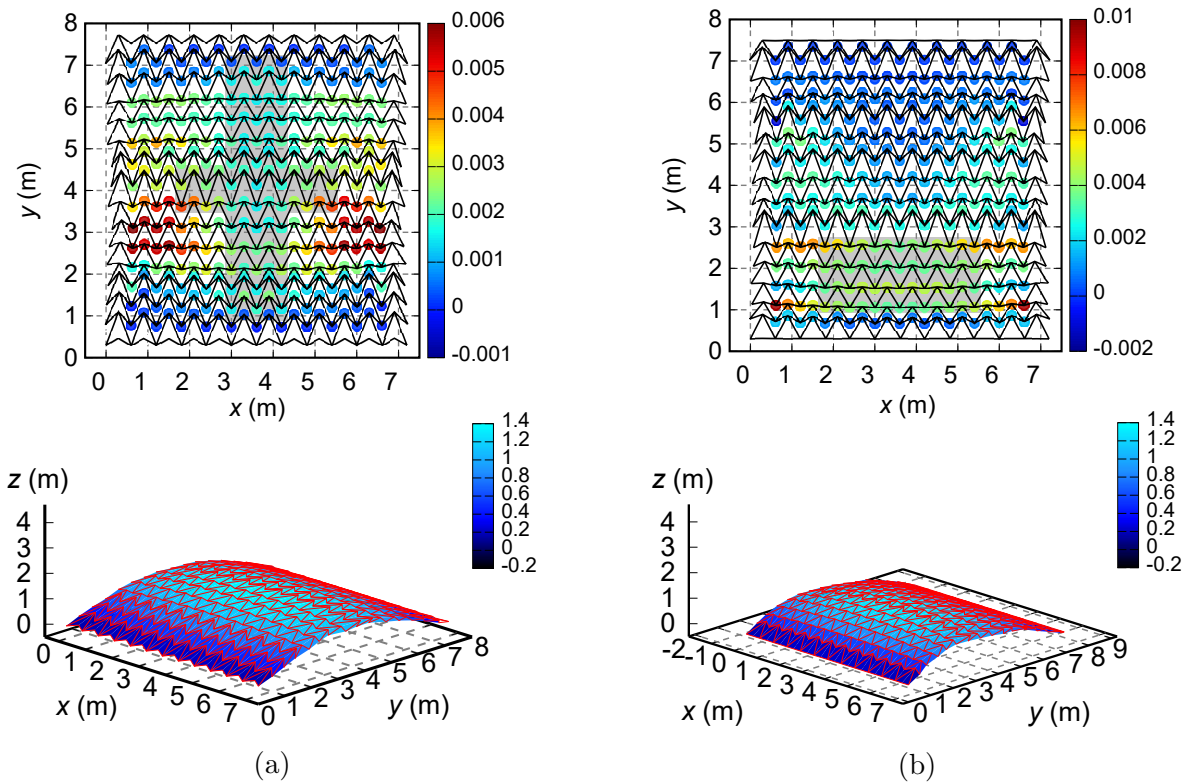


図 2.17: RQ2 と RQ3 の離散ガウス曲率分布と最適解の形状 (コントア: z 方向変位); (a) RQ2, (b) RQ3.

最適解に対する初期格子状平板の x 方向のサイズは全ての例で 7.2000 m であり, RQ1, RQ2, RQ3 の y 方向のサイズはそれぞれ 8.1518 m, 8.0232 m, 7.8002 m である. RQ1, RQ2, RQ3 の最適化の結果をそれぞれ図 2.15–2.17 に示す. 図 2.15(a) と図 2.17 の上段は, 曲面上の節点における離散ガウス曲率を示しており, 特定領域は灰色の領域で示している. 図 2.10(b), (c), (d) はそれぞれ, シェブロン・ロッドの要素の断面せい分布, xz 平面上への曲面の投影図, yz 平面上への曲面の投影図である. これらの図に示されるように, 断面せい分布が対称なため, 離散ガウス曲率分布は yz 平面に平行な平面について概ね対称である. また, 目標曲面を対称に配置した RQ1, RQ2 の曲面上の離散ガウス曲率分布は, xz 平面に平行な平面について明らかに非対称である. これは, リエントラント四辺形のユニット形状が xz 平面に平行な平面について非対称であることに起因している. 以上の結果から, リエントラント四辺形で構成された ABAG についても本最適化手法を適用することで, さまざまな形状を導出できることが確認できる. 表 2.3 には, RQ1, RQ2, RQ3 の最適解での角度 θ の $(180/2\pi)\theta$ (deg.) を示している. RQ1, RQ3 の θ に着目すると, 目標節点を有するシェブロン・ロッドの角度 θ_i は周囲の θ_i より小さいことがわかる. これは, Type RH と同じ解傾向である.

図 2.13(d), (e), (f) はそれぞれ, RQ1, RQ2, RQ3 の K_j の値を示している. 目標節点を有するシェブロン・ロッドの数は RQ1, RQ2, RQ3 のそれぞれについて, 2, 12, 4 である. 結果より, Type RH と同様に, RQ1, RQ2, RQ3 の全ての K_j の値は正であり, 凸な形状が得られていることがわかった. 表 2.4 は RQ1, RQ2, RQ3 の K_j の平均値, 最大値, 最小値を示している. RQ2 の最適解の曲面では, Type RQ

表 2.5: GA と SA のパラメータ.

Method	Parameters	Values
GA	Population size	300
	Probability of mutation	20%
	Probability of crossover	50%
	Maximum number of generations	50
SA	Maximum number of steps	1000
	Initial temperature	5230
	Temperature at starting re-annealing	0.1046

表 2.6: RH1 の最適解における目的関数と計算時間.

	PSO	GA	SA
Objective function	0.0151	0.0113	0.0172
Computation time (h)	9.9	20.6	277.0

の他の例よりも小さい値の K_j が確認できる. これは, 特定領域が y 方向に広く分布することによるものと考えられる. また, 図 2.14 は, RQ1, RQ2, RQ3 の目的関数値の推移を示している. Type RQ についても, 全ステップの 2/3 程度で目的関数はほぼ収束している.

2.6 異なる最適化アルゴリズムに対する最適解の検証

PSO で得られた RH1 の最適解を検証するため, 異なる 2 つのメタヒューリスティクスである遺伝的アルゴリズム (genetic algorithm: GA) と焼きなまし法 (simulated annealing: SA) で得られた結果を比較する. 以下の例では, GA の Python ライブラリである DEAP [122], SA の Python ライブラリである dual annealing [123] を使用する. GA と SA のパラメータは表 2.5 に示すとおりである. 計算機として, Intel Core i7-8700 CPU 3.20 GHz, 16.0GB RAM, 6 core の PC を使用する.

表 2.6 は, RH1 の最適解における目的関数, および, 計算時間を示している. PSO を使用した場合, 計算時間が最も短くなる. 目的関数値については, 3 つのアルゴリズムの中で最大の値を導出した SA の結果と近い値が得られた. GA で得られた目的関数は 3 つのアルゴリズムの中で最小であり, 計算時間は PSO の約 2 倍であった. SA を使用した場合, 検討したアルゴリズムの中で最良の目的関数値が得られた. しかし, 計算には 277.0 時間という, 他のアルゴリズムに比べると長大な時間を要しており, 本問題に対して SA は実用的な手法とは言えない. 図 2.18 は, 3 つのアルゴリズムで得られた RH1 の最適解の曲面形状, および離散ガウス曲率分布を示している.

3 つのアルゴリズムで得られた最適解では, 設計変数 θ_8, θ_9 が他のシェブロン・ロッドの θ_i に比べて小さく, それぞれの曲面は互いに近い形状である. そのため, 本最適化問題に対しては, いずれのアルゴリズムを用いても概ね良好な解を得ることができる.

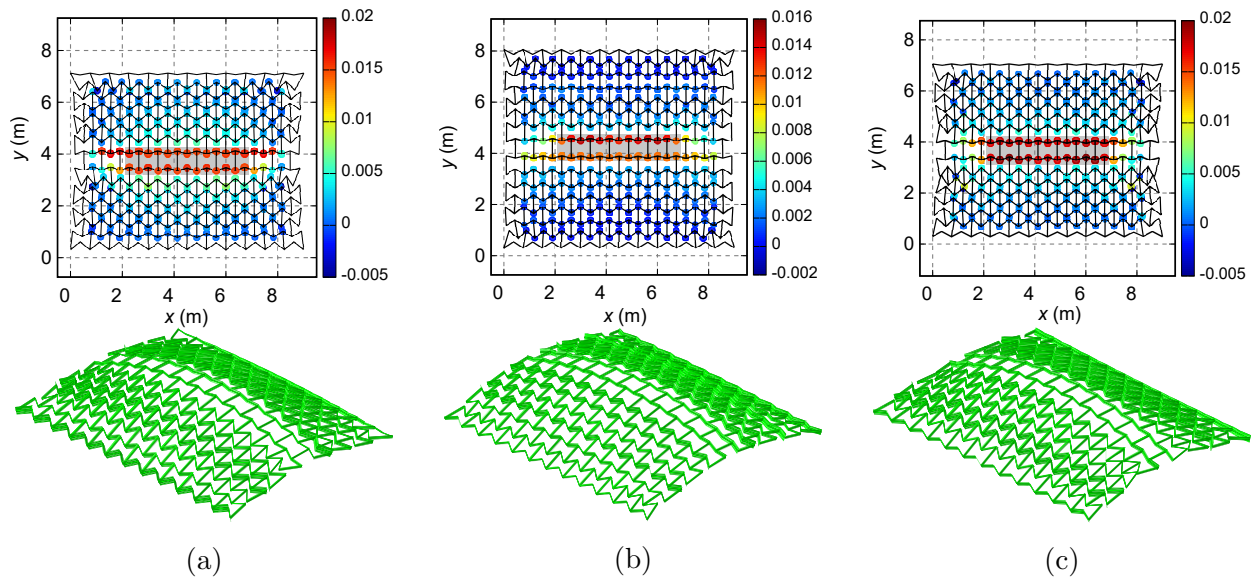


図 2.18: 3 種のメタヒューリスティクスによる RH1 の離散ガウス曲率分布と曲面形状; (a) PSO, (b) GA, (c) SA.

2.7 非均一なユニットで構成される ABAG の形状設計法

本節では、非均一なユニットで構成される ABAG の形状設計法について説明する。一般に、平面的なオーゼティック構造の幾何形状は、リエントラント・パターンの均一な形状により周期性を有する。リエントラント・ハニカムとリエントラント四辺形は、単純な形状を持つため多様なオーゼティック構造の格子形状として採用されている。しかし、従来の単純なリエントラント・パターンに基づく格子形状を持つ ABAG 曲面は、生成可能な形状について制約が存在する。

上記の制約に対する解決策として、非均一で複雑なリエントラント・パターンを有する格子状平板から曲面を生成する方法が考えられる。しかし、単にパターンを複雑にしたとして、負のポアソン比の発現の有無や設計・施工の難度が課題となる。そのため、リエントラント・ハニカムとリエントラント四辺形の単純な格子形状を活用しつつ、生成される曲面形状の複雑さを向上させるため、以下の 3 種の格子設計法を提案する。

1. 非周期型 ABAG
2. ハイブリッド型 ABAG
3. 複合型 ABAG

非周期型 ABAG は、一方向に対して周期性を崩したリエントラント・ハニカムあるいはリエントラント四辺形で構成される格子状平板から生成される ABAG 曲面である。一方向に対して周期性を崩すには、その方向に対するユニットのサイズを非均一に設計する。ハイブリッド型 ABAG は、2 つの異なる種類のリエントラント・パターンを混在させた格子状平板から生成される曲面である。リエントラント・ハニカムとリエントラント四辺形は、シェブロン・ロッドを有する点で共通している。そのため、シェブロン・

ロッドの配置方法でパターンを決定することができる。複合型 ABAG は上記の 2 種類の格子設計法を組み合わせ生成される ABAG 曲面である。非均一なパターンを用いることで、均一なリエントラント・パターンで構成された曲面よりも、非対称でより複雑な形状の ABAG 曲面を得ることができる。

2.7.1 リエントラント・パターンの形状パラメータ θ_i と幾何学的な制約条件の再設定

2.2.1 節で定義したリエントラント・パターンの形状パラメータ θ_i を再設定し、ユニットの設計において満たすべき制約条件の修正を行う。再設定を行う理由は、ハイブリッド型 ABAG と複合型 ABAG について、以下では角度 θ_i の符号を用いてリエントラント・パターンの配置を決定するので、2.2.1 節の設定をそのまま用いるのは難しいためである。リエントラント・ハニカムとリエントラント四辺形の両方に対して、 θ_i に対する正方向を反時計回りとして再設定する。これにより、リエントラント・ハニカムの部材の接触・交差の回避に関する幾何学的な制約条件を次式のように修正する。

$$d - \frac{1}{2}w(\tan\theta_i - \tan\theta_{i+1}) > 0 \quad \text{for } 0 < \theta_i < \pi/2 \text{ and } -\pi/2 < \theta_{i+1} < 0 \quad (2.8)$$

$$d - \frac{1}{2}w(-\tan\theta_i + \tan\theta_{i+1}) > 0 \quad \text{for } -\pi/2 < \theta_i < 0 \text{ and } 0 < \theta_{i+1} < \pi/2 \quad (2.9)$$

同様に、リエントラント四辺形については、以下の条件を与える。

$$d - \frac{1}{2}w(\tan\theta_i - \tan\theta_{i+1}) > 0 \quad (2.10)$$

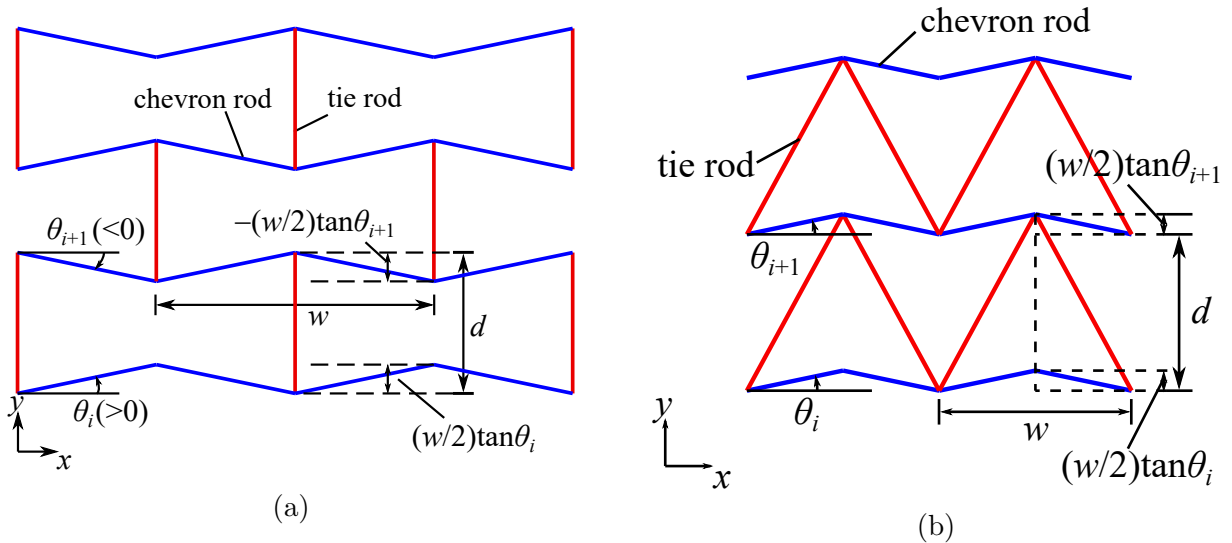


図 2.19: 角度 θ_i の正方向の再設定; (a) リエントラント・ハニカム, (b) リエントラント四辺形.

2.7.2 非周期型 ABAG とハイブリッド型 ABAG

均一なリエントラント・パターンによる曲面形状への制約を克服するため、ABAG の格子状平板を非均一なリエントラント・パターンによって設計する。従来のリエントラント・パターンの単純さを犠牲にして、より複雑な形状の曲面を得ることを目的とする。

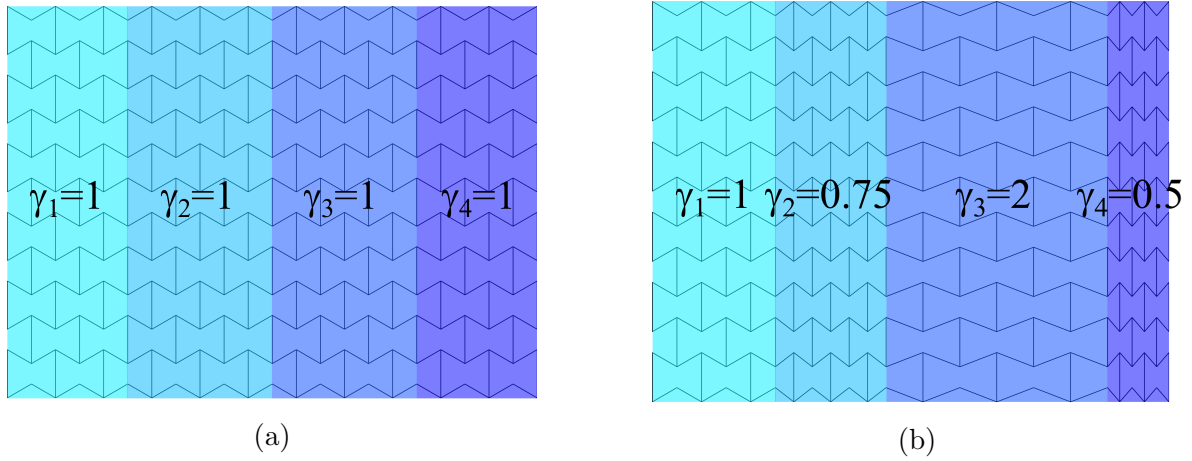


図 2.20: 形状パラメータ γ_D ($D = 1, \dots, 4$); (a) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 1.00$, (b) $\gamma_1 = 1.00, \gamma_2 = 0.75, \gamma_3 = 2.00, \gamma_4 = 0.5$.

非周期型 ABAG

D_{\max} 個のサブ領域を有する格子状平板に対して、形状パラメータ γ_D , $D = (1, \dots, D_{\max})$ を与える. 非周期型 ABAG の格子状平板は、各サブ領域の x 方向のサイズに対し、対応する形状パラメータ γ_D を乗じた値を設定する. このとき、タイ・ロッドの長さ、および部材の接続関係は変更しない. 図 2.20 は、 y 方向に沿って分割された 4 つのサブ領域を有する格子状平板である. 各サブ領域に対して、形状パラメータ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ を割り当てる. 図 2.20(a) の周期型 ABAG において、シェブロン・ロッドと x 軸のなす角度の大きさを $|\theta_i| = \pi/6$, ($i = 1, \dots, m$) とする. 図 2.20(b) は、 $\gamma_1 = 1.00, \gamma_2 = 0.75, \gamma_3 = 2.00, \gamma_4 = 0.50$ とした格子状平板である. このように、 γ_D の値を調整すると、 x 方向に対して周期性が崩れた格子状平板を容易に生成できる.

ハイブリッド型 ABAG

既往研究 [79-82] を含め、2.6 節までに示した ABAG の格子状平板は、1 種類のリエントラント・パターン、すなわち、リエントラント・ハニカムあるいはリエントラント四辺形のみを用いて設計されている. ハイブリッド型 ABAG は、図 2.1 に示すような、異なる 2 種類のリエントラント・パターンを 1 つの格子状平板に混在させた構造である.

リエントラント四辺形は一様な形状のシェブロン・ロッドが平行に配置されており、リエントラント・ハニカムは互に対称な 2 本のシェブロン・ロッドが交互に配置されている. このシェブロン・ロッドの幾何特性を活用して格子状平板を設計する. リエントラント・パターンの配置は、 i 番目と $(i+1)$ 番目のシェブロン・ロッドの形状パラメータ θ_i および θ_{i+1} の符号によって決まる. 図 2.19 に示すように、 θ_i と θ_{i+1} の積 $\theta_i \theta_{i+1}$ が負の場合、2 本のシェブロン・ロッドの間のパターンはリエントラント・ハニカムとし、正の場合はリエントラント四辺形とする. 図 2.20(a) は、均一なリエントラント四辺形で構成された格子状平板である. 青の線分切片で示す部材は、構造解析において不安定になる要素を安定化させるために与えた部材である. 図 2.20(b) は、ハイブリッド型 ABAG の格子状平板の例である. 黄色の領域はリ

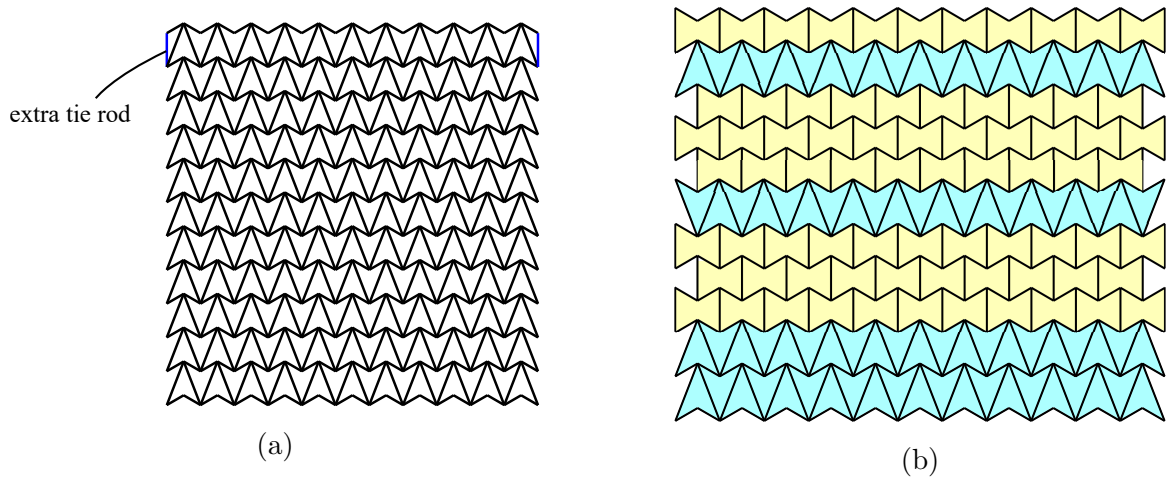


図 2.21: 均一なリエントラント・パターンで構成された ABAG とハイブリッド型 ABAG; (a) 均一なパターンで構成された ABAG, (b) ハイブリッド型 ABAG.

表 2.7: 形状パラメータ γ_D .

Model	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6
Non-periodic 1	1.00	0.50	1.20	0.80	0.50	1.00
Non-periodic 2	1.00	2.00	0.50	2.00	1.00	0.50
Mixed	1.00	0.75	1.50	0.50	0.75	1.25

リエントラント・ハニカムを表し、青色の領域はリエントラント四辺形を表している。

2.7.3 非均一なユニットで構成される ABAG の曲面

非周期型、ハイブリッド型、複合型 ABAG の曲面形状と離散ガウス曲率分布を検証する。本節の全ての例に対して、同一の境界条件を適用する。格子状平板の境界形状は矩形とする。シェブロン・ロッドの両端は x 方向に沿って可動なローラー支点とし、1 番目と m 番目のシェブロン・ロッドとタイ・ロッドの全接合部を xy 平面内で可動なローラー支点とする。大変形解析の手順は、2.5 節で説明したとおりである。

部材の材料定数は GFRP を想定し、ヤング係数 25 GPa, ポアソン比 0.221 とする。部材は全て矩形断面とし、断面せいを 0.10 m, 幅を 0.01 m とする。

非周期型 ABAG

2 例の非周期型 ABAG の曲面について検証する。非周期型モデル 1 は 242 個のリエントラント・ハニカムで構成され、非周期型モデル 2 は 232 個のリエントラント四辺形で構成される。これらのリエントラント・パターンの形状は、初期格子状平板に定めた 6 個のサブ領域に対して与える形状パラメータ γ_D ($D = 1, \dots, 6$) で調整される。表 2.7 に非周期型モデル 1, 2 に与える γ_D の値を示す。

各ユニットのサイズは $w = 0.75, d = 0.75$ とする。強制変位は、シェブロン・ロッドの両端の支点に対して x 方向に沿って 0.30 m 与える。図 2.22, 2.23 にそれぞれ、非周期型モデル 1, 2 の大変形解析の結果

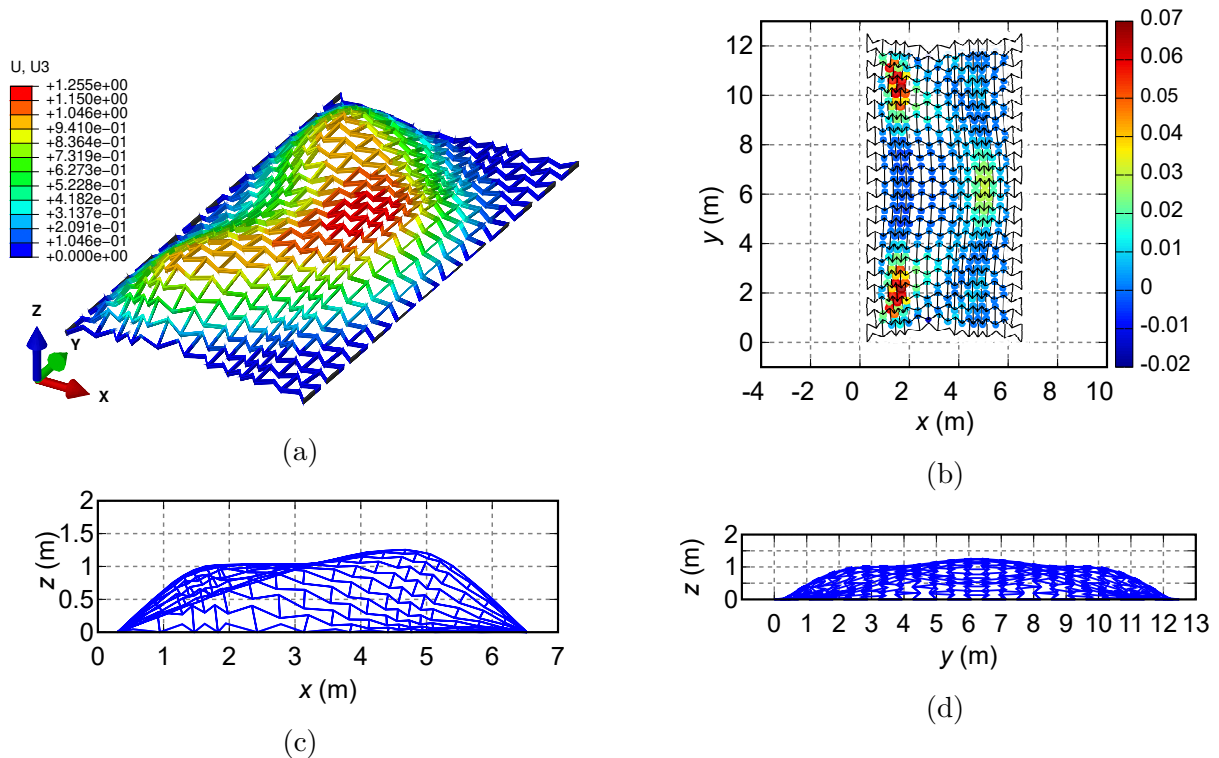


図 2.22: 非周期型モデル 1; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面.

を示す. 図 2.22(a), (b), (c), (d) はそれぞれ, 非周期型モデル 1 の曲面, 離散ガウス曲率分布, xz 平面図, yz 平面図である. 図 2.22(b) に示すとおり, 離散ガウス曲率の値が周囲より大きい節点は, γ_D の値が比較的小さいサブ領域に存在する. 最大の離散ガウス曲率を持つ節点は, $\gamma_2 = 0.50$ を割り当てた左から 2 番目のサブ領域内に位置する. 離散ガウス曲率の分布は xz 平面に平行な平面について対称である. 図 2.22(c), (d) にはそれぞれ, 非周期型モデル 1 の非対称な投影図と対称な投影図を示す. 図 2.23(a), (b), (c), (d) は, 非周期型モデル 2 の結果である. 図 2.23(b) から, 境界付近を除き, 比較的小さい γ_D が与えられたサブ領域内の節点において, 離散ガウス曲率が大きくなることが確認できる.

非周期型モデル 1 および 2 により, γ_D の設定によって生成される曲面の離散ガウス曲率の分布をある程度操作できることがわかる. とくに, γ_D を局所的に小さく設定したサブ領域では, そうでないサブ領域に比べて, 大きな値の離散ガウス曲率を持つ節点が生じやすい傾向にある.

ハイブリッド型 ABAG

2 つのハイブリッド型 ABAG の曲面について, 各節点における離散ガウス曲率分布を確認する. ハイブリッド型モデル 1 は, 図 2.24 に示すように, 145 個のリエンラント・ハニカムと 261 個のリエンラント四辺形で構成される. 一方で, ハイブリッド型モデル 2 は, 図 2.25 に示すように, 115 個のリエンラント・ハニカムと 252 個のリエンラント四辺形で構成されており, これらのパターンは交互に配置される. 各ユニットのサイズを $w = 0.75$, $d = 0.75$ とする. 曲面の生成において, シェブロン・ロッドの両端の支点到 0.30 m の大きさの強制変位を与える. 図 2.24 および 2.25 はそれぞれ, ハイブリッド型モデル 1 および 2 の大変形解析の結果を示している. 図 2.24(a) は曲面形状を示し, 図 2.24(b) は曲面の xy

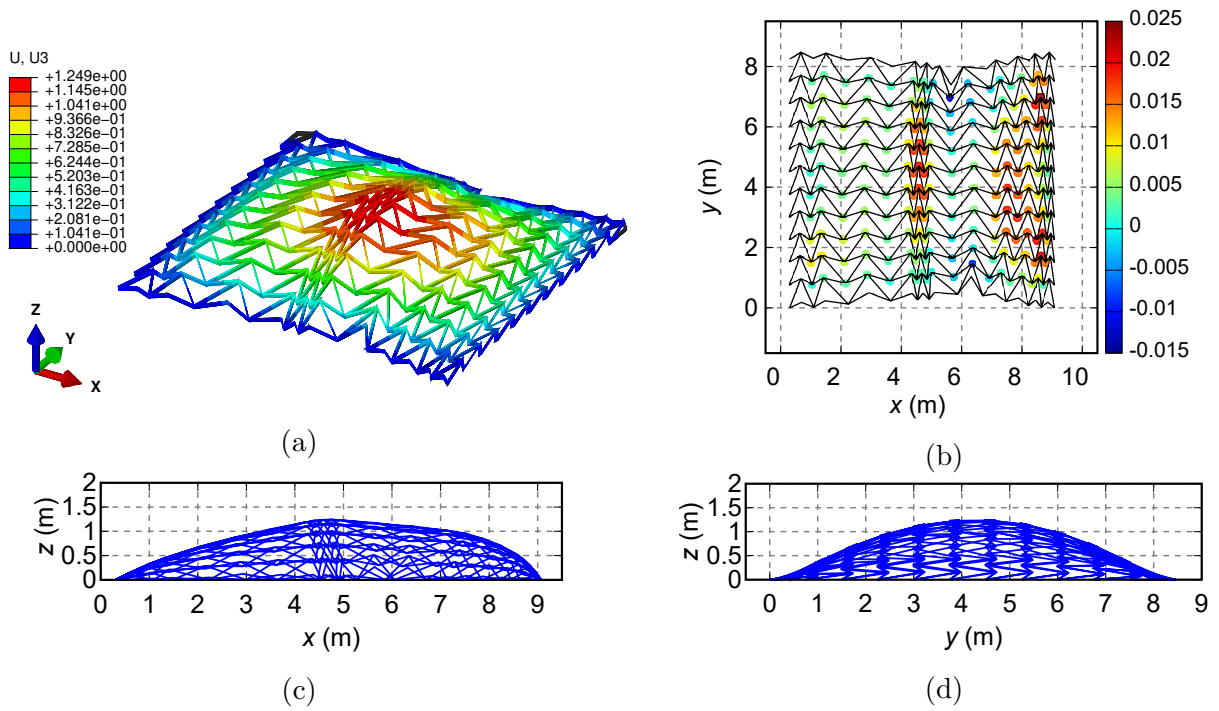


図 2.23: 非周期型モデル 2; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面.

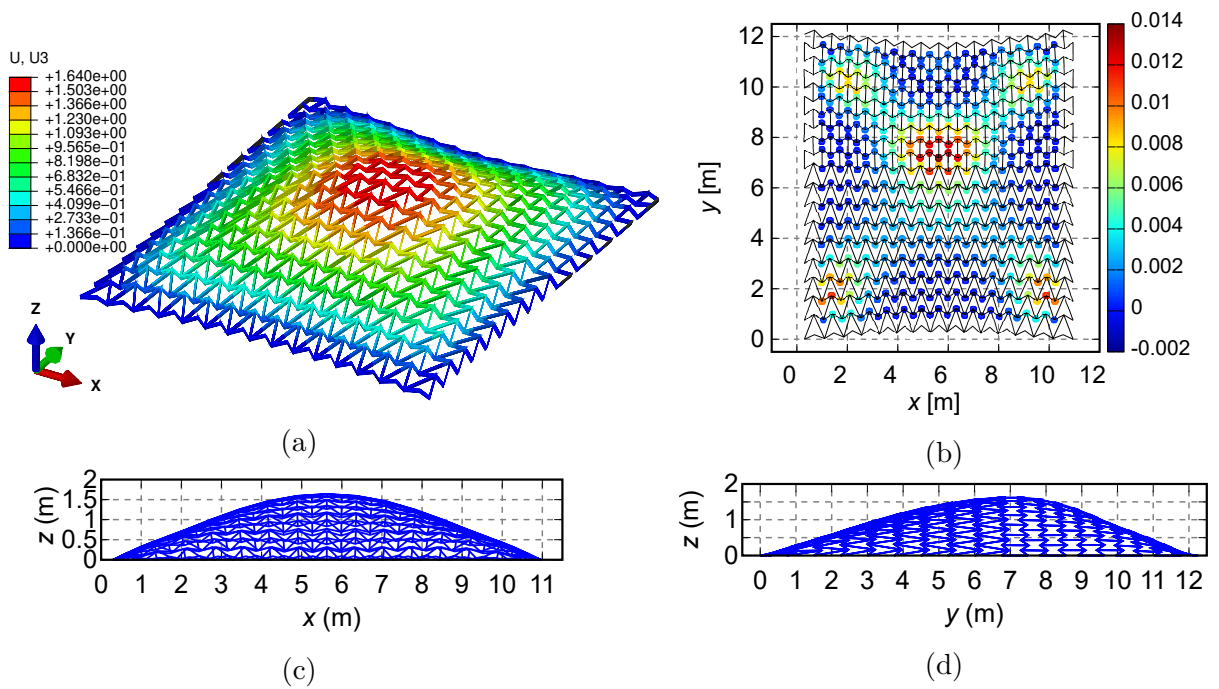


図 2.24: ハイブリッド型モデル 1; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面.

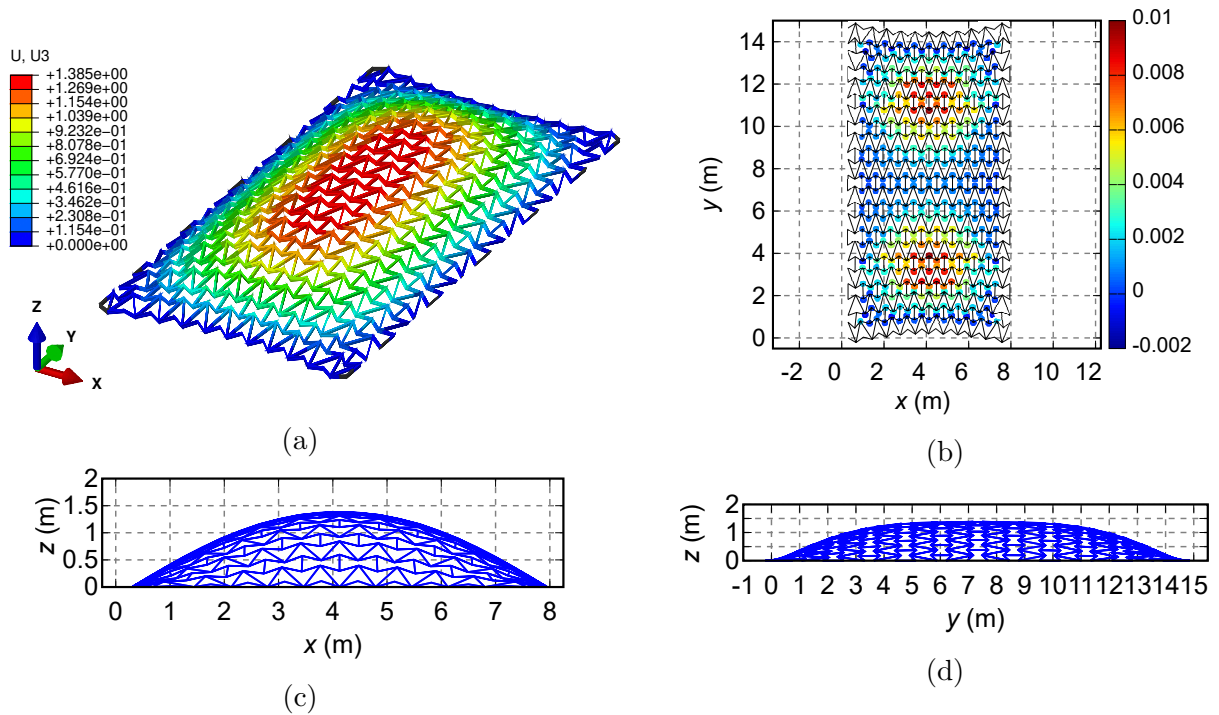


図 2.25: ハイブリッド型モデル 2; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面.

平面図と離散ガウス曲率分布を示している。リエントラント・パターンが x 方向に周期性を持つため、離散ガウス曲率分布は yz 平面に平行な平面について対称である。図 2.24(c), (d) はそれぞれ、ハイブリッド型モデル 1 の xz 平面図と yz 平面図である。ハイブリッド型モデル 1 と同様にして、ハイブリッド型モデル 2 の結果を図 2.25 に示す。図 2.25(b) は、ハイブリッド型モデル 2 の離散ガウス曲率の分布を示しており、この分布には対称性が確認できる。この対称性の出現についても、 x 方向に周期性のあるリエントラント・パターンの存在が影響している。加えて、ハイブリッド型モデル 2 の場合は xz 平面に平行な平面だけでなく、 yz 平面に平行な平面についても対称である。これは、リエントラント・パターンが交互に配置されたことで生じた、格子形状の幾何的な対称性に起因する。

ハイブリッド型 ABAG として格子を設計すれば、異なるリエントラント・パターンの配置方法により、ハイブリッド型モデル 1 のように y 方向への対称性を崩したり、ハイブリッド型モデル 2 のように格子状平板全体で均質な力学特性を与えたりすることができる。

複合型モデル

複合型モデルは、非周期型モデルとハイブリッド型モデルを同一の格子状平板の設計に適用したモデルであり、複雑で非対称な ABAG 曲面を容易に生成できる点で有効である。各ユニットのサイズは、 $w = 0.75, d = 0.75$ とする。各シェブロン・ロッドの両端の支点に対して、0.30 m の強制変位を作用させる。形状パラメータ γ_D ($D = 1, \dots, 6$) を表 2.7 に示す。複合型モデルは、218 個のリエントラント・ハニカムと 232 個のリエントラント四辺形で構成される。図 2.26 は、複合型モデルの大変形解析の結果である。図 2.26(a), (b), (c), (d) はそれぞれ、曲面形状, xy 平面図と離散ガウス曲率分布, xz 平面図, yz 平面図を表す。曲面に生じた離散ガウス曲率分布は規則性がなく複雑である。形状パラメータ γ_D が 1 未

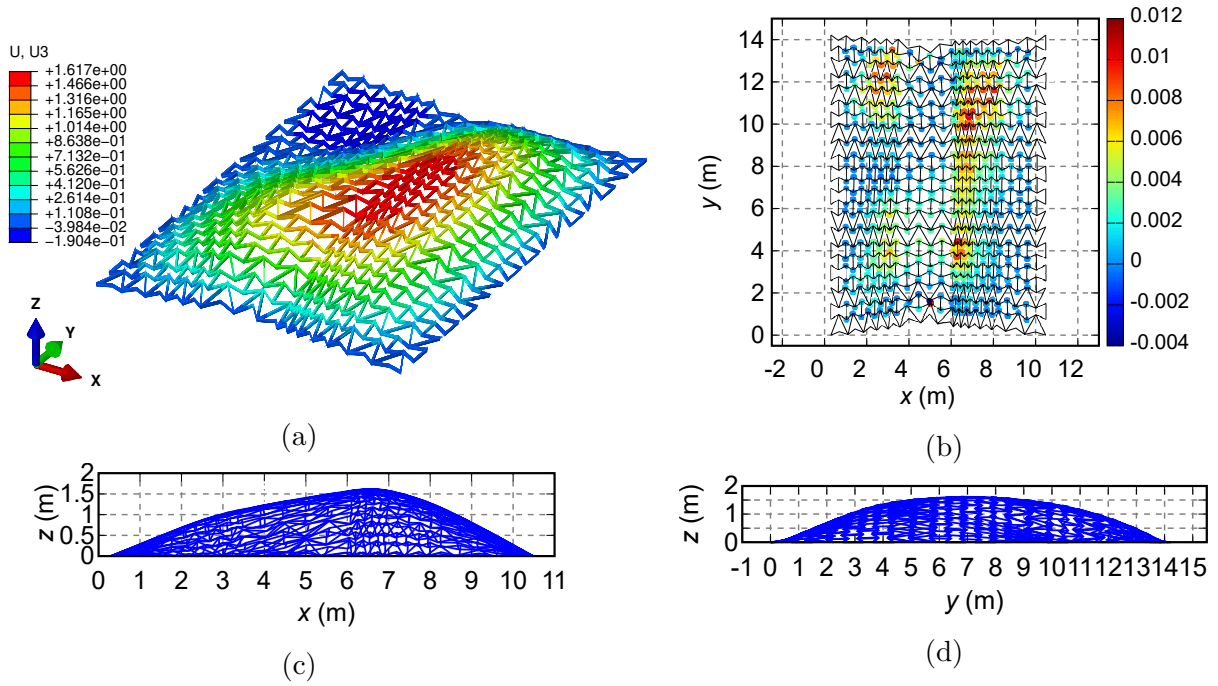


図 2.26: 複合型モデル; (a) 曲面形状, (b) 離散ガウス曲率分布, (c) xz 平面, (d) yz 平面.

溝のサブ領域の節点において、離散ガウス曲率の値が比較的大きい。これは、非周期型モデル 1, 2 と同様の解傾向である。また、異なるリエントラント・パターンを配置したことで、形状の対称性が失われている。リエントラント・ハニカムとリエントラント四辺形に位置するシェブロン・ロッド上の節点において、離散ガウス曲率が增大しやすい。

2.7.4 非均一なユニットで構成される ABAG の最適化問題の定式化

本節では、2.4.3 節で導入した最適化手法を用いた、非均一なユニットからなる ABAG の形状設計法について述べる。以下では、リエントラント・ハニカムからなる非周期型 ABAG、ハイブリッド型 ABAG、複合型 ABAG に関する 3 つの例題を示す。

設計変数には、2.5 節で提示した θ, β_0, β_1 に加え、非周期型 ABAG の初期格子状平板の設計に用いる $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_D\}$ を導入する。また、2.7.1 節で再設定したリエントラント・パターンの形状パラメータに応じて、設計変数 θ の下限値を負の値まで拡張する。

表 2.8 に、ABAG の形状パラメータと最適化に関するパラメータを記す。非周期型 ABAG はリエントラント・ハニカムで構成されるため、設計変数 θ の正負は隣り合うシェブロン・ロッド間で異なる。なお、ハイブリッド型 ABAG の最適化問題では、サブ領域を設けないため、設計変数 γ を考慮しない。

最適化問題は、以下のように定式化できる。

$$\max. \quad F = \min_{1 \leq j \leq N} K_j(\theta, \beta_0, \beta_1, \gamma) \quad (2.11a)$$

$$\text{subject to} \quad H_j^z(\theta, \beta_0, \beta_1, \gamma) \geq 0, \quad (j = 1, \dots, N) \quad (2.11b)$$

$$\theta^L \leq \theta \leq \theta^U, \quad \beta_0^L \leq \beta_0 \leq \beta_0^U, \quad \beta_1^L \leq \beta_1 \leq \beta_1^U, \quad \gamma^L \leq \gamma \leq \gamma^U \quad (2.11c)$$

表 2.8: 非均一ユニットからなる ABAG の初期格子状平板の形状と最適化に関するパラメータ.

Type	w (m)	d (m)	θ^L	θ^U	β_0^L	β_0^U	β_1^L	β_1^U	γ^L	γ^U
Non-periodic (RH)	0.75	0.75	0	$2\pi/9$	0.01	0.30	0.01	0.30	0.30	2.00
Hybrid	0.75	0.75	$-2\pi/9$	$2\pi/9$	0.01	0.30	0.01	0.30	–	–
Mixed	0.75	0.75	$-2\pi/9$	$2\pi/9$	0.01	0.30	0.01	0.30	0.10	2.00

表 2.9: Surface1 と Surface3 の設計変数 γ の最適解.

Model	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7	γ_8
Non-periodic (Type RH)	1.2133	1.8731	0.3000	0.4375	0.3978	0.3309	1.2224	1.6611
Mixed	1.2513	1.2632	0.2982	0.6564	0.3783	0.5270	1.4213	1.7454

解法には, 2.4.3 節と同様にして PSO を用いる.

2.7.5 非周期型, ハイブリッド型, 複合型 ABAG の最適化

非均一なりエントラント・パターンからなる ABAG の形状設計例として, 2.7.4 節で定式化した最適化問題を解いて得られる曲面を示す. 例題として, 非周期型 ABAG, ハイブリッド型 ABAG, 複合型 ABAG のそれぞれの格子設計法に基づく曲面, Surface1, Surface2, Surface3 について最適化の例を示す.

全ての例題において, 各シェブロン・ロッドの要素数を $n_i = 24$ とし, シェブロン・ロッド数を $m = 16$ 本とする. 境界条件は, 図 2.27 に示すように, 例題に応じて変更する. 図 2.27(a) のように, Surface1 の初期格子状平板は 159 個のリエントラント・ハニカムで構成される.

図 2.27(a) のように Surface1 および Surface3 では, 1 番目と m 番目のシェブロン・ロッドの外側の位置に存在する全接合部を y 方向に沿って可動なローラー支点とし, 全てのシェブロン・ロッドの両端の支点は, xy 平面で可動なローラーとする. また, 図 2.27(b) のように Surface2 では, 1 番目と m 番目のシェブロン・ロッドの外側の位置に存在する全接合部を xy 平面で可動なローラー支点とし, 全てのシェブロン・ロッドの両端の支点を, x 方向に沿って可動なローラーとする. 変形に用いる強制変位は, 図 2.27(a), (b) 内の矢印の位置の支点に対して, 矢印の方向に 0.30 m 作用させる. 大変形解析の手順は, 前節までのものと同じとする.

非周期型 ABAG である Surface1 と複合型 ABAG である Surface3 には, 形状パラメータ γ_D を与えるサブ領域を設定する. サブ領域の分割は, 図 2.27(a) の白色と灰色の領域に示すとおりであり, 各サブ領域に含まれるシェブロン・ロッド 1 本あたりの要素数は 3 とする. サブ領域の番号は, x 座標の増加に応じて 1 から 8 へと順に割り当てる.

Surface1 (非周期型 ABAG) の最適化

図 2.28 は, 非周期型 ABAG である Surface1 の最適解の形状である. コントラは節点の z 方向変位を表す. 最適解の格子状平板の x 方向のサイズは 8.3657 m であり, y 方向のサイズは 9.1081 m である. 図 2.29(a) は, 曲面上の節点における離散ガウス曲率を示しており, 特定領域を灰色の領域で示している.

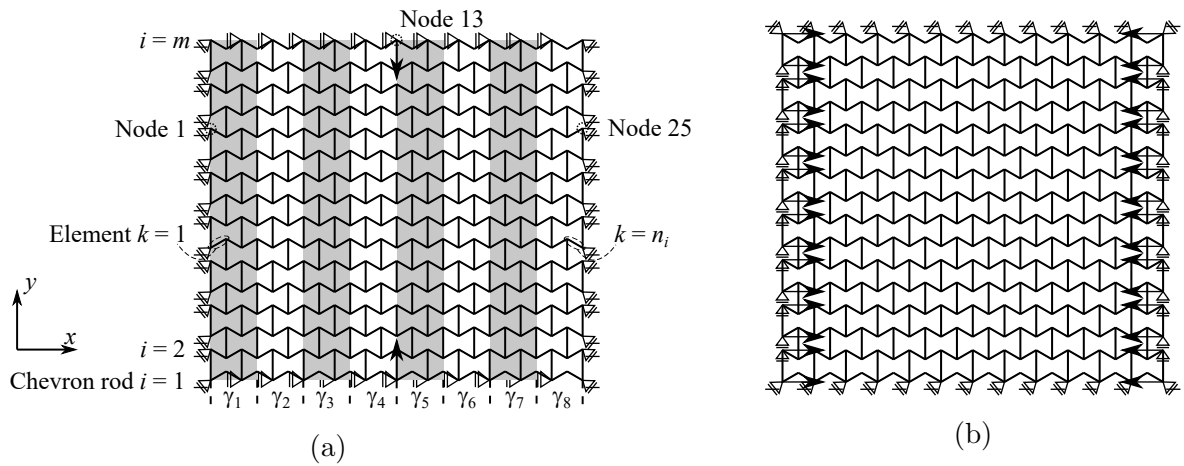


図 2.27: 境界条件と強制変位 (矢印) ; (a) Surface1 (非周期型 ABAG) と Surface3 (複合型 ABAG) , (b) Surface2 (ハイブリッド型 ABAG) .

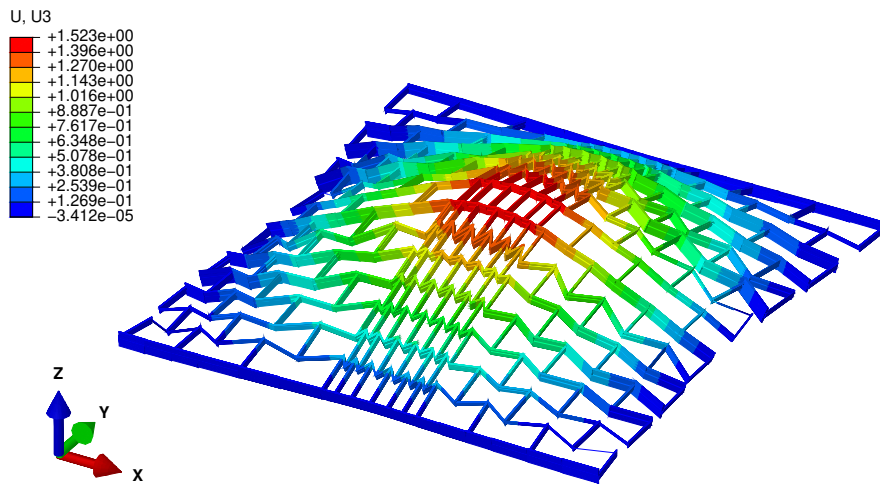


図 2.28: Surface1 の最適解の形状 (コントア: z 方向変位).

図 2.29(b), (c), (d) はそれぞれ, シェブロン・ロッドの要素の断面せい分布, xz 平面への曲面の投影図, yz 平面への曲面の投影図である. 表 2.9 は, 設計変数 γ の最適解を示している. 表 2.10 は, 最適解 θ から算出した値 $(180/2\pi)\theta$ (deg.) を示している.

最適解 γ について, 曲面の境界付近のサブ領域 1, 2, 7, 8 に対する解は 1 以上の値が得られ, 残りの曲面中央付近のサブ領域 3, 4, 5, 6 には 1 より小さい値が得られた. この結果は, 2.7.3 節で紹介した非周期型 ABAG で生成される曲面上の離散ガウス曲率分布の性質を捉えている. つまり, γ_D の値が相対的に小さいサブ領域上の節点における離散ガウス曲率は, その他のサブ領域内の節点に比べて大きくなりやすい, という解傾向が最適解にも確認できた. 設計変数 θ の最適解について, 特定領域に含まれる節点が存在するシェブロン・ロッドの角度 θ_8, θ_9 は, 他の全ての角度より絶対値が小さい. この結果は, 図 2.8(a), (b) で示した結果や 2.5 節の最適解で確認した解傾向に一致している. すなわち, 離散ガウス曲率が曲面内で相対的に大きい節点を有するシェブロン・ロッドの角度 θ_i は, 隣り合うシェブロン・ロッドに比して

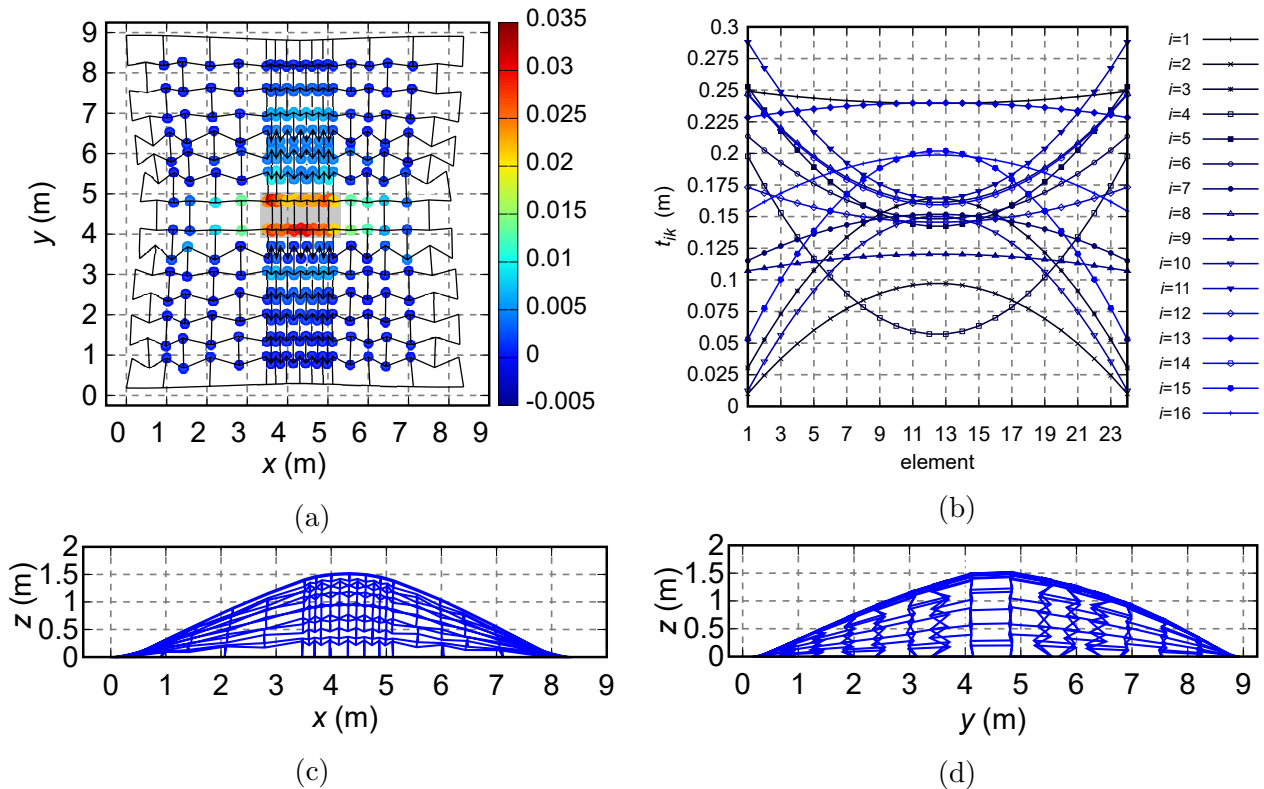


図 2.29: Surface1 の最適解での形状と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図.

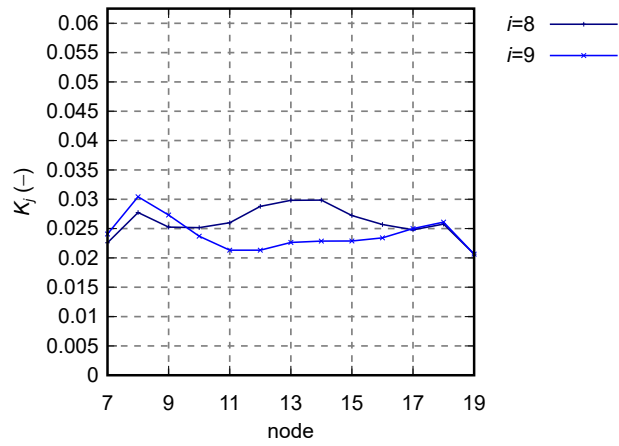
小さいという結果が, 非周期型モデルの最適解でも確認できた.

図 2.29(b) に示すように, シェブロン・ロッドの断面せい分布は, 部材の中央に関して対称に与えられる. しかし, 表 2.9 に示すように, γ の最適解によって x 方向のユニットサイズに対する対称性が失われている. そのため, yz 平面に平行な平面について, 離散ガウス曲率の分布の対称性は見られない. 図 2.10 は, Surface1, Surface2, Surface3 の最適解での角度 θ の値 $(180/\pi)\theta$ (deg.) を示している.

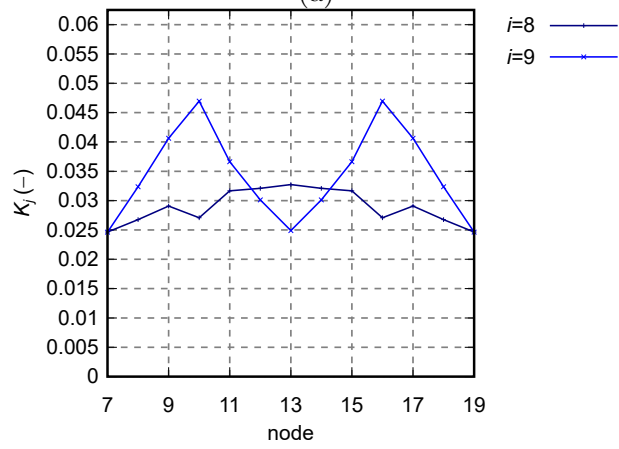
図 2.30(a) は, Surface1 の最適解に対する目標節点上の離散ガウス曲率 K_j の値を示している. 目標節点を有するシェブロン・ロッドは 2 本である. 最適化の結果として, Surface1 の全ての K_j は正であり, 特定領域内で上に凸の形状が得られている. 表 2.11 において, Surface1 の K_j の平均値, 最大値, 最小値を示している. 特定領域内で最小の離散ガウス曲率は, 9 番目のシェブロン・ロッド上の節点 19 で生じている. 最大値は, 9 番目のシェブロン・ロッド上の節点 8 で生じている. 8 番目のシェブロン・ロッドの節点 12, 13, 14 の離散ガウス曲率は最大値に近い値となった. 特定領域外の離散ガウス曲率の値は, 曲面上の大半の箇所でおよそ 0 である. 以上より, 特定領域内の全ての節点の離散ガウス曲率の値が増加しており, かつ, 実行可能解を得ているため, 局所的に上に凸の形状の曲面が得られたと判断できる.

Surface2 (ハイブリッド型 ABAG) の最適化

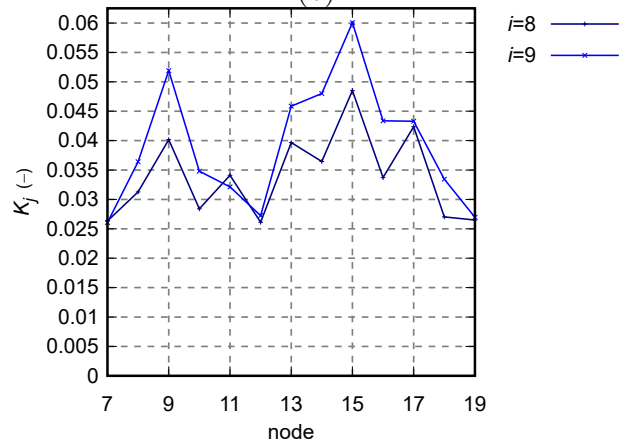
図 2.31 は Surface2 の最適解での曲面形状であり, コントアは節点の z 方向変位を表す. 最適解での格子状平板の x 方向のサイズは 9.0000 m であり, y 方向のサイズは 10.1902 m である. 図 2.32(a) は, 曲



(a)



(b)



(c)

図 2.30: 目標節点を有するシェブロン・ロッド上の離散ガウス曲率 K_j , (a) Surface1 , (b) Surface2, (c) Surface3.

表 2.10: Surface1, Surface2, Surface3 の最適解での角度 $(180/2\pi)\theta$ (deg.).

i	Non-periodic (Type RH)	Hybrid	Mixed
1	0.0092	-21.7721	-12.8387
2	-28.9373	-7.2880	-0.0098
3	21.9426	-28.7674	-17.1340
4	-24.8894	-26.8339	39.1395
5	26.0536	40.0000	39.3135
6	-16.0666	40.0000	-21.4748
7	40.0000	-40.0000	-39.7819
8	-3.3226	-5.9311	38.7891
9	4.6204	-5.8864	4.7354
10	-27.5779	26.1277	-29.0702
11	31.5926	-39.9999	39.8651
12	-38.7370	-21.9373	-31.3823
13	12.0642	-38.8050	-21.3103
14	-12.6912	24.8195	-18.9581
15	9.0207	-1.1693	-34.2104
16	-0.1164	38.1928	34.7261

表 2.11: 目標節点における離散ガウス曲率の平均値, 最大値, 最小値 ($\times 10^{-3}$).

	Surface1	Surface2	Surface3
Mean	25.0383	30.1649	36.5514
Max.	30.0432	46.9606	60.1301
Min.	20.6392	24.6291	26.0870

面上の節点における離散ガウス曲率を示しており, 特定領域は灰色の領域である. 図 2.32(a) に示すように, 最適解の初期格子状平板は 80 のリエントラント・ハニカムと 184 のリエントラント四辺形で構成される. 図 2.32(b), (c), (d) はそれぞれ, シェブロン・ロッドの要素の断面せい分布, xz 平面上への曲面の投影図, yz 平面上への曲面の投影図である. 最適解での角度 θ の値 $(180/2\pi)\theta$ (deg.) を表 2.10 に示す.

最適解 θ について, 特定領域に含まれる節点を有するシェブロン・ロッドの角度 θ_8, θ_9 は, 他の全ての角度に比べて小さい値となった. この結果は, ここまでで示してきた例題の最適解と同じ解傾向を示している. なお, Surface2 の境界条件は, 図 2.27(b) に示すように, Surface1 とは異なる. そのため, 異なる境界条件を与えた ABAG 曲面の形状設計例でも, 特定領域を設定したシェブロン・ロッドが直線に比較的近い形状で得られることが明らかになった.

図 2.32(b) に示すように, シェブロン・ロッドの断面せい分布は, 部材の中央に関して対称に与えられる. 加えて, ハイブリッド型モデルに対する最適化問題では, 設計変数に γ を含まないので, xy 平面に平

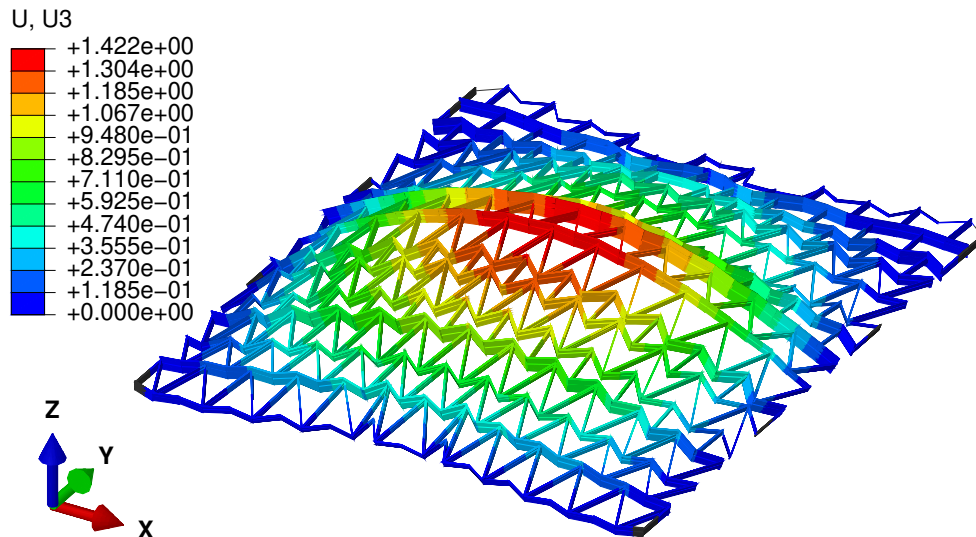


図 2.31: Surface2 の最適解での形状 (コントア: z 方向変位).

行な平面に関する離散ガウス曲率の分布は対称性を有する. 結果より, 得られたリエントラント・パターンの配置には周期性や規則性は見出せない. したがって, 設計者が直感的にリエントラント・パターンを配置して, 最適解のような解を探索するのは困難であると考えられる.

図 2.30(b) は, 最適解での目標節点の離散ガウス曲率 K_j の値を示している. 目標節点を有するシェブロン・ロッドは, 曲面の中央付近に位置する $i=8, 9$ 番目の 2 本であり, これらのシェブロン・ロッド上に位置する全ての K_j は正の値をとる.

表 2.11 に, Surface2 の K_j の平均値, 最大値, 最小値を示している. 特定領域内の離散ガウス曲率の最小値 (目的関数) は, 9 番目のシェブロン・ロッド上の節点 19 で生じている. 最大値は, 9 番目のシェブロン・ロッド上の節点 10 と 16 で生じている. 特定領域外の離散ガウス曲率の値は, ほとんどの箇所でおおよそ 0 である. 以上より, 特定領域内の全ての節点の離散ガウス曲率の値が増加しており, かつ, 実行可能解を得ているため, 局所的に上に凸の形状の曲面が得られたと判断できる.

Surface3 (複合型 ABAG) の最適化

図 2.33 は, Surface3 の最適解での曲面形状であり, コントアは節点の z 方向変位を表す. 図 2.34(a) に示すように, 最適解の格子状平板は 80 のリエントラント・ハニカムと 184 のリエントラント四辺形で構成され, 平板の x 方向のサイズは 8.4839 m, y 方向のサイズは 9.4390 m である. 図 2.33(a) は, 曲面上の節点における離散ガウス曲率を示しており, 特定領域は灰色の領域である. 図 2.34(b), (c), (d) はそれぞれ, シェブロン・ロッドの要素の断面せい分布, xz 平面上への曲面の投影図, yz 平面上への曲面の投影図である. Surface3 の最適解 γ を表 2.9 に示し, 最適解での角度 θ の値 $(180/2\pi)\theta$ (deg.) を表 2.10 に示す.

最適解 γ について, 曲面の境界付近のサブ領域 1, 2, 7, 8 に対する解は 1 以上の値が得られ, 残りの曲面中央付近のサブ領域 3, 4, 5, 6 には 1 より小さい値が得られた. この結果は, Surface1 の最適解と同じ

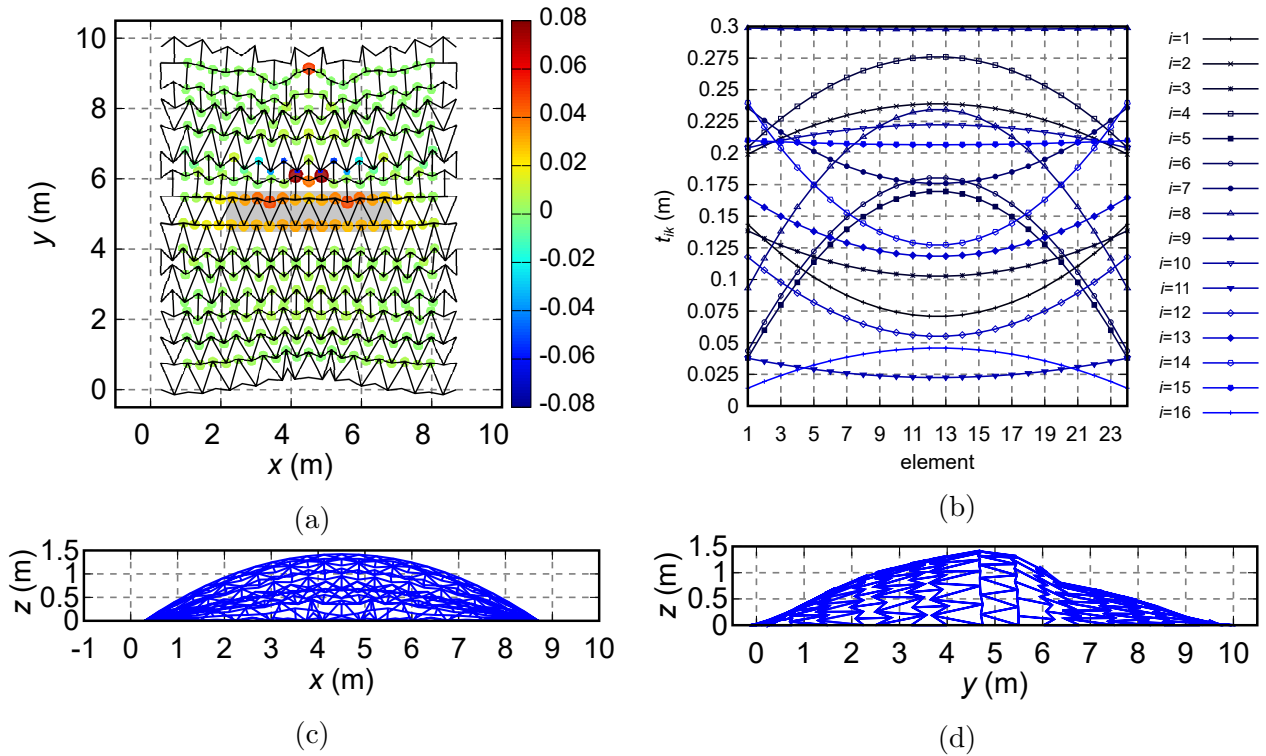


図 2.32: Surface2 の最適解に対する曲面と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図.

解傾向を示している. 最適解 θ について, 特定領域に含まれる節点を有するシェブロン・ロッドの角度 θ_9 は, 他の全ての角度に比べて小さな値であった. しかし, 同じ特定領域に含まれる θ_8 の絶対値は, 特定領域に隣接する位置にあるシェブロン・ロッドに関する角度 θ_i に近い値が得られた. この点について, Surface3 の最適解は, 他の例題とは異なる解傾向を示しているといえる.

図 2.34(b) に示すように, シェブロン・ロッドの断面せい分布は, 部材の中央に関して対称に与えられる. しかし, 表 2.9 に示すように, 最適解 γ の非対称な分布によって x 方向のユニットサイズの対称性が失われている. そのため, yz 平面に平行な平面について, 離散ガウス曲率の分布は対称性を示さない. 結果より, リエントラント・ハニカムとリエントラント四辺形の分布に対する周期性や規則性は見出せず, xz 平面に平行な平面についても, 離散ガウス曲率の分布は対称性を持たない.

図 2.30(c) は, Surface3 の最適解における目標節点上の離散ガウス曲率 K_j の値を示している. 目標節点を有するシェブロン・ロッドは, 曲面の中央付近に位置する $i=8, 9$ 番目の 2 本である. この図から, Surface3 の全ての K_j は正の値である. 表 2.11 は, K_j の平均値, 最大値, 最小値を示している. 特定領域内の離散ガウス曲率の最小値 (目的関数) は, 8 番目のシェブロン・ロッド上の節点 12 で生じている. また, 特定領域の端部の 4 つの節点の離散ガウス曲率は, 目的関数に概ね一致する. 最大値は 0.0601 であり, 9 番目のシェブロン・ロッド上の節点 15 で生じている. 特定領域に含まれない節点での離散ガウス曲率は, ほとんどの箇所でおおよそ 0 である. 以上より, 特定領域内の全ての節点の離散ガウス曲率の値が増加しており, かつ, 実行可能解を得ているため, 局所的に上に凸の形状の曲面が得られたと判断できる.

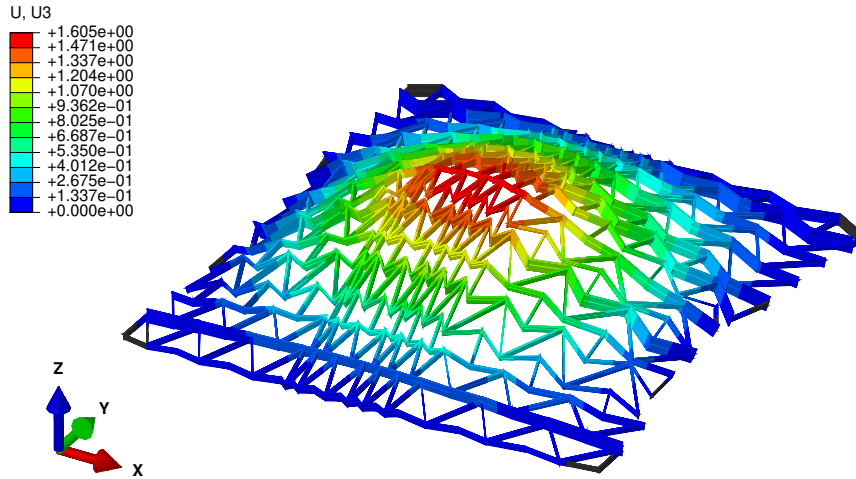


図 2.33: Surface3 の最適解での形状 (コンタ : z 方向変位).

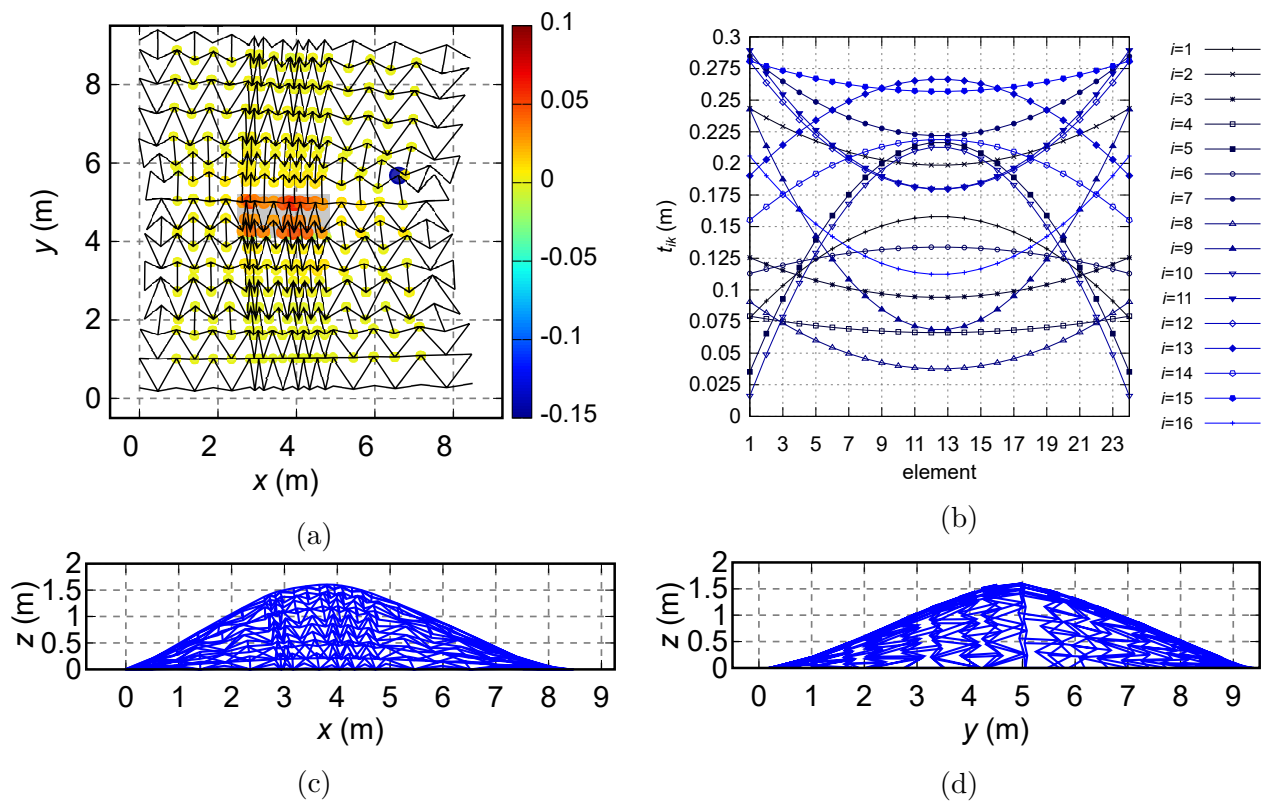


図 2.34: Surface3 の最適解における曲面と離散ガウス曲率分布; (a) 離散ガウス曲率と目標節点 (灰色の領域), (b) シェブロン・ロッドの断面せい, (c) xz 平面図, (d) yz 平面図.

2.8 第 2 章の結論

本章では、負のポアソン比を持つ幾何形状によって設計した格子を有するグリッドシェルである ABAG の形状設計法を提案した。提案手法により、局所的に上に凸な形状を有する曲面を生成できる。本手法は、ABAG の離散的な幾何形状に対する定量化、および、最適化を用いた形状設計法である点で独自性を有する。また、非均一なユニットを用いた格子状平板の設計により、均一なユニットで構成される平板から生成される曲面よりも複雑な形状の曲面を容易に生成できることを示した。

2.2 節では、負のポアソン比を持つリエントラント・パターンに関するパラメータを導入し、格子状平板の面内変形に対するポアソン比の符号によって、得られる曲面において支配的なガウス曲率の符号が異なることを例証した。2.3 節では、離散ガウス曲率および離散平均曲率ベクトルの定義式を示した。2.4 節では、ABAG の形状設計を目的とした最適化問題の定式化を行った。設計変数には、シェブロン・ロッドと x 軸の間の角度 θ 、シェブロン・ロッドの断面せい分布に関するバーンスタイン係数 β_0, β_1 を用いた。目的関数には離散ガウス曲率を用い、制約条件に離散平均曲率ベクトルの z 方向成分を与えた。最適化手法にはメタヒューリスティクス的一种である PSO を使用した。2.5 節では、最適化により生成された ABAG の曲面例を示し、最適解として得られる曲面の形状や離散ガウス曲率分布について考察した。2.6 節では、PSO を用いた場合の結果と SA と GA のそれぞれの結果を比較した。3 つのアルゴリズムで得られた結果はいずれも同様の解傾向を示した。なかでも PSO は、計算時間が他よりも短く、実用上の価値が高いことを示した。2.7 節では、非均一なユニットで構成される ABAG の形状設計法として、非周期型、ハイブリッド型、複合型の 3 種類の格子状平板の設計法を提案した。さらに、2.4 節で提案した最適化手法を適用することで、複雑な形状の曲面が生成できることを例証した。

本章で得られた知見を以下に示す。

1. 梁要素による ABAG のモデル化で負のポアソン比を持つ構造の力学特性が再現できる。
2. シェブロン・ロッドと x 軸の間の角度、ならびに、シェブロン・ロッドの断面せい分布は、ABAG 曲面のガウス曲率分布に大きく影響する。
3. 本章で提案した最適化手法を用いれば、境界条件と強制変位を変更せずに、目的関数を変更することで異なる形状の ABAG 曲面を生成できる。
4. 最適解より、特定領域内に存在する節点をもつシェブロン・ロッドの x 軸との角度は、隣接するシェブロン・ロッドの角度に比べて小さくなることがわかった。しかし、特定領域の指定範囲が、過半数以上のシェブロン・ロッドに及ぶ場合、曲面が全体的に上に凸になるような形状が生成されるため、ここで示す最適解の傾向は確認できなかった。
5. シェブロン・ロッドの断面せい分布に関する最適解には、規則性がないことがわかった。しかし、この事実は最適化を適用したことによってはじめて得られた知見である。
6. 非周期型 ABAG の最適解より、上の項目のシェブロン・ロッドに関する角度の傾向に加え、特定領域に含まれる節点が存在するサブ領域の幅が小さくなる傾向が得られた。
7. ハイブリッド型 ABAG の最適解より、上記の項目で示したシェブロン・ロッドに関する角度の解傾向と一致することが確認できた。
8. 複合型 ABAG の最適解では、サブ領域の幅を決定する設計変数 γ の分布について、非周期型

ABAG の最適解と同様の解傾向を示した。しかし、シェブロン・ロッドに関する角度については、他の例と異なる結果が得られた。複合型 ABAG は、非周期型とハイブリッド型の 2 つの性質を備えるため、最適化問題の解の探索範囲が広く、局所解に陥っている可能性がある。しかし、特定領域内の離散ガウス曲率は、他の例題で得られたものよりも平均的に大きい。そのため、複合型 ABAG は、多様な曲面形状を生成するのに最も適した設計法であると考えられる。

9. 最適化問題では、応力に関する制約は与えていない。現状では、設計者が応力を確認する必要があり、最適化問題に組込むことは今後の課題である。また、1.2.1 節で述べたように、従来の四辺形格子を持つグリッドシェルの実際的设计では形状生成後にブレースやパネルを付与させて剛性の向上を図るため、ABAG についても実用に際して、剛性を高めるための考慮が必要である。

第3章

均一な六角形格子で構成された離散円筒機構の開発

3.1 はじめに

本章では、オーゼティック構造の持つ幾何形状がもたらす特異な変形状態に着目し、それを活用した円筒形の機構“離散円筒機構”の開発を行う。離散円筒機構は、梁部材あるいは板材で構成される格子状円筒面を有する構造である。格子形状には、2回回転対称性のある六角形を用いる。図3.1は、リエントラント・ハニカムや正六角形の回転対称性を示している。 n 回回転対称性 ($n \in \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} は整数集合) は、中

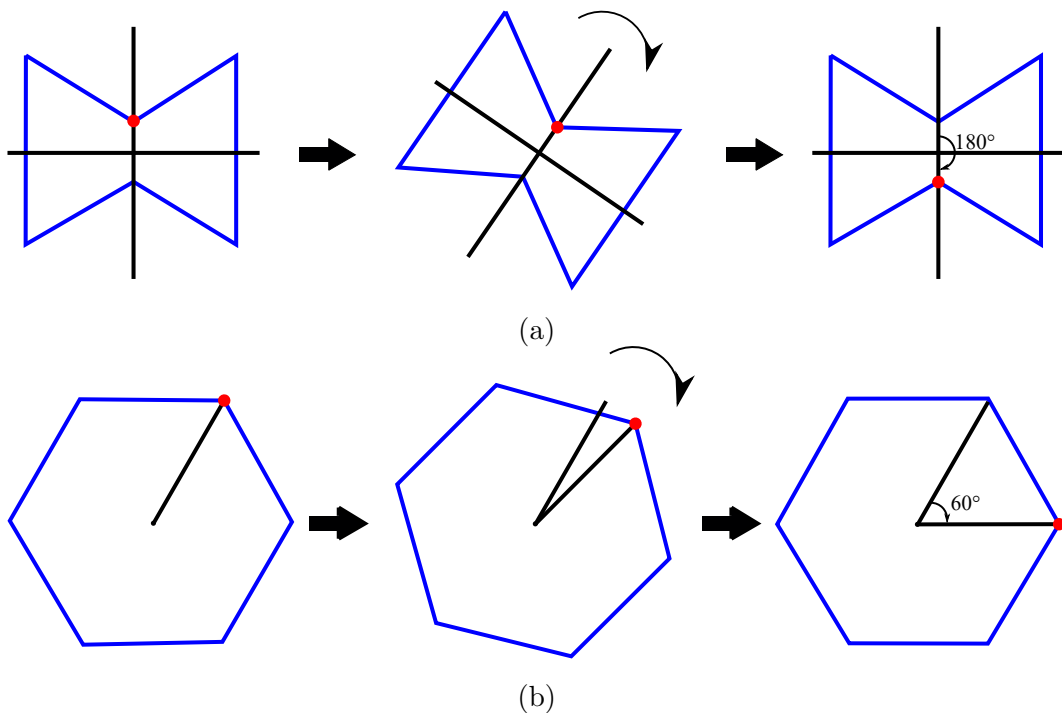


図 3.1: 図形の回転対称性; (a) 2回回転対称性をもつ図形 (リエントラント・ハニカム), (b) 6回回転対称性をもつ図形 (正六角形)。

心点について図形を $(360/n)$ (deg.) 回転させると元の形に一致する性質として定義される。正六角形は 6 回回転対称であるが、同時に 2 回回転対称でもある。

本章では、上記の特徴を満たす離散円筒機構の形状設計法を提案し、静的構造解析を実行して力学特性を確認する。

3.2 形状設計法

本節では、離散円筒機構の形状設計のための定式化を行う。提案する形状設計法は、2つの設計段階に分類することができる。設計段階1では、離散円筒機構の基本構造を決定する。基本構造は、離散円筒機構の擬似円筒形状を構成する頂点と辺による幾何的な情報を指す。設計段階1により、六角形ユニットの形状と配置を決定する。辺を梁部材、頂点を部材間の接合部としてモデル化した機構を生成できる。3.3節では、梁部材で構成される離散円筒機構に対する静的構造解析を行う。

設計段階2では、基本構造の頂点をオフセットして生成した四辺形の板材で構成される離散円筒機構の形状設計法を構築する。具体的には、機構の製作性の向上を目的として、四辺形を平面的に生成するための頂点オフセットの方向を導出するアルゴリズムを提案する。設計段階2については、3.2.2節で説明する。

3.2.1 設計段階1：離散円筒機構の基本構造の設計法

設計段階1で提案するのは、カーボンナノチューブ (Carbon Nanotube: CNT) [131] の形状に関する、離散幾何学に基づく定式化 [132] の拡張である。本手法の特徴は、2回回転対称性を持つ六角形ユニットの形状、および配置を少数のパラメータで多様に設計できることである。

CNT は炭素原子を頂点とし、原子間結合を辺とする正六角形格子で構成された平面充填構造 (グラフェン・シート) を円筒形にした構造である。各頂点には、互いに平行でない3辺が接続する。

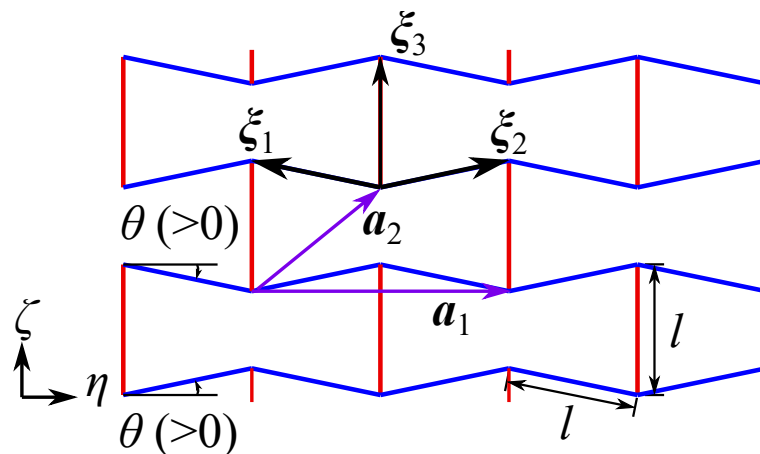


図 3.2: 2 回回転対称な六角形に設定するベクトルと角度。

図 3.2 は、2 回回転対称な六角形を格子形状とする平面充填構造を示している。本章では図 3.2 の辺をシェブロン・エッジ (青)、タイ・エッジ (赤) と呼ぶ。これらの 2 種類の辺は前章のシェブロン・ロッド

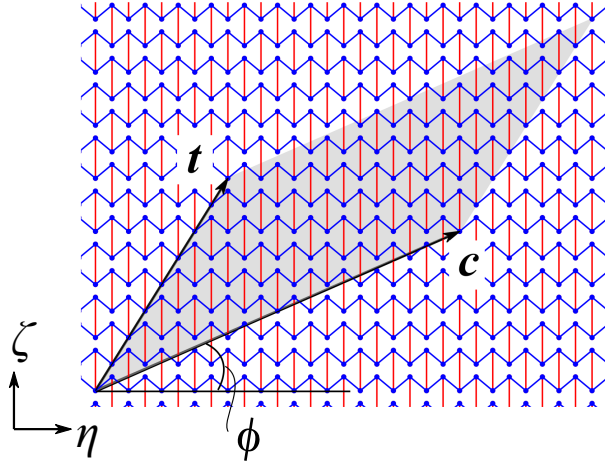


図 3.3: 六角形による平面充填構造, カイラル・ベクトル \mathbf{c} および並進ベクトル \mathbf{t} を用いて生成される平行四辺形領域 (灰色の領域).

およびタイ・ロッドに対応するが, 本章では梁部材だけでなく板材を構成する辺にも適用するため, 別の名称を使用する.

図 3.3 は, 2 回回転対称な六角形ユニットによる平面充填構造である. 2 本のベクトル \mathbf{c}, \mathbf{t} はそれぞれ, カイラル・ベクトルと並進ベクトルという. 灰色の領域は, \mathbf{c} と \mathbf{t} から生成した平行四辺形領域である. ϕ は, \mathbf{a}_1 と \mathbf{c} のなす角度であり, カイラル角という. 離散円筒機構の基本構造は, 後述する, 平行四辺形領域の線形変換により得られる.

図 3.2 に示すように, 平面充填構造を $\eta\zeta$ 平面に定める. シェブロン・エッジが η 軸となす角を θ とする. 角 θ が $0 < \theta < \pi/6$ の範囲にあるとき, 六角形ユニットはリエントラント・ハニカムの形状をなす. $-\pi/6 \leq \theta < 0$ のとき, ユニットは凸な六角形を形成する. なお, $\theta = -\pi/6$ のときユニットは正六角形となり, $\theta = \pi/6$ のとき正三角形となる. そのため, 角度 θ の範囲を $-\pi/6 \leq \theta < \pi/6$ として定める.

いま, 長さ l の辺で構成される六角形格子を考える. 頂点に接続する 3 本の辺に沿ったベクトル ξ_1, ξ_2, ξ_3 を以下のように表す.

$$\xi_1 = [-l \cos \theta, l \sin \theta] \quad (3.1)$$

$$\xi_2 = [l \cos \theta, l \sin \theta] \quad (3.2)$$

$$\xi_3 = [0, l] \quad (3.3)$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 を用いると, 六角形ユニットの並進に関する基本格子ベクトルは以下のように定式化できる.

$$\mathbf{a}_1 = \xi_2 - \xi_1 = [2l \cos \theta, 0] \quad (3.4)$$

$$\mathbf{a}_2 = \xi_3 - \xi_1 = [l \cos \theta, l(1 - \sin \theta)] \quad (3.5)$$

カイラル・ベクトル \mathbf{c} は, カイラル指数 c_1, c_2 を用いて次式で書ける.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(c_1, c_2, l, \theta) &= c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 \\ &= [(2c_1 + c_2) l \cos \theta, c_2 l(1 - \sin \theta)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

並進ベクトル \mathbf{t} をカイラル指数と同様に, 任意の並進指数 t_1, t_2 と基本格子ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を用いた次式

で計算する.

$$\mathbf{t}(t_1, t_2, l, \theta) = t_1 \mathbf{a}_1 + t_2 \mathbf{a}_2 \quad (3.7)$$

並進ベクトル \mathbf{t} は \mathbf{c} と同じ始点を持つ. 図 3.4 に示すように, c_1, c_2, t_1, t_2 は, 以下の条件を満たすように設定する.

- \mathbf{c} と \mathbf{t} が平行でないこと.
- 平行四辺形領域の面積が離散円筒機構の成立に十分な大きさであること.

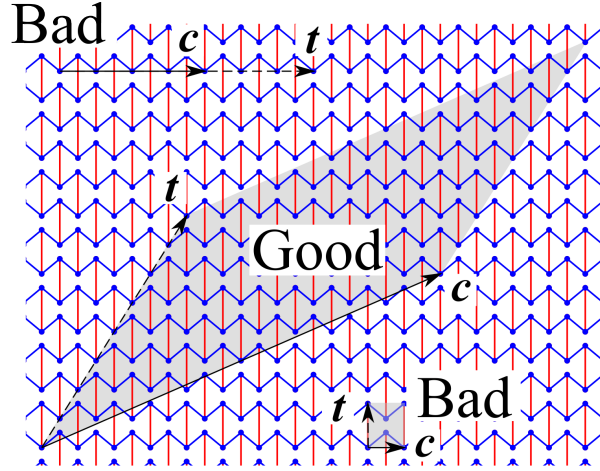


図 3.4: \mathbf{c} と \mathbf{t} の設定の良い例と悪い例.

また, 六角形格子に対する頂点集合 V と辺集合 E は次式で表せる.

$$V = \left\{ \boldsymbol{\xi} = \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 \mid (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ or } \left(\alpha_1 + \frac{1}{2(1-\sin \theta)}, \alpha_2 - \frac{\sin \theta}{1-\sin \theta} \right) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \right\} \quad (3.8)$$

$$E = \left\{ (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2, \beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2) \mid \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = \pm \frac{1}{2(1-\sin \theta)}, \alpha_2 - \beta_2 = \mp \frac{\sin \theta}{2(1-\sin \theta)} \\ \alpha_1 - \beta_1 = \mp \frac{1-2\sin \theta}{2(1-\sin \theta)}, \alpha_2 - \beta_2 = \mp \frac{\sin \theta}{2(1-\sin \theta)} \\ \alpha_1 - \beta_1 = \pm \frac{1}{2(1-\sin \theta)}, \alpha_2 - \beta_2 = \mp \frac{1}{2(1-\sin \theta)} \end{cases} \right\} \quad (3.9)$$

α_1, α_2 および β_1, β_2 は, 基本格子ベクトルに対する係数を一般化したものであり, 式 (3.8) および (3.9) 内の | の右側の条件を満たす. すなわち, この条件を満たすようにしてカイラル指数 c_1, c_2 と並進指数 t_1, t_2 を設定すれば, \mathbf{c} と \mathbf{t} の終点は平面充填構造の頂点に一致する. なお, 本論文では簡単のため, c_1, c_2, t_1, t_2 は全て整数とする.

図 3.5 は, 平面充填構造から離散円筒機構の基本構造を生成する過程を示している. 離散円筒機構の基本構造は, 図 3.5(a) に示す平面構造上の平行四辺形領域に含まれる頂点と辺を, 合成写像 $P_{c_1, c_2, l, \theta} \circ \rho$ で円筒形に変換することで得られる. $\rho(c_1, c_2, \theta)$ は, $\eta\zeta$ 座標系における四辺形領域をカイラル角 ϕ だけ回転させて \mathbf{c} を η 軸と平行にする回転変換である. 回転変換 $\rho(c_1, c_2, \theta)$ によって, 平行四辺形領域は $\eta\zeta$ 座標系から図 3.5(b) に示すような XY 座標系に移される. $P_{c_1, c_2, l, \theta}$ は, XY 座標系の平行四辺形領域内の頂点と辺を, 図 3.5(c) に示す円筒面上に移す変換である. $\rho(c_1, c_2, \theta)$ および $P_{c_1, c_2, l, \theta}$ は, 以下のように定

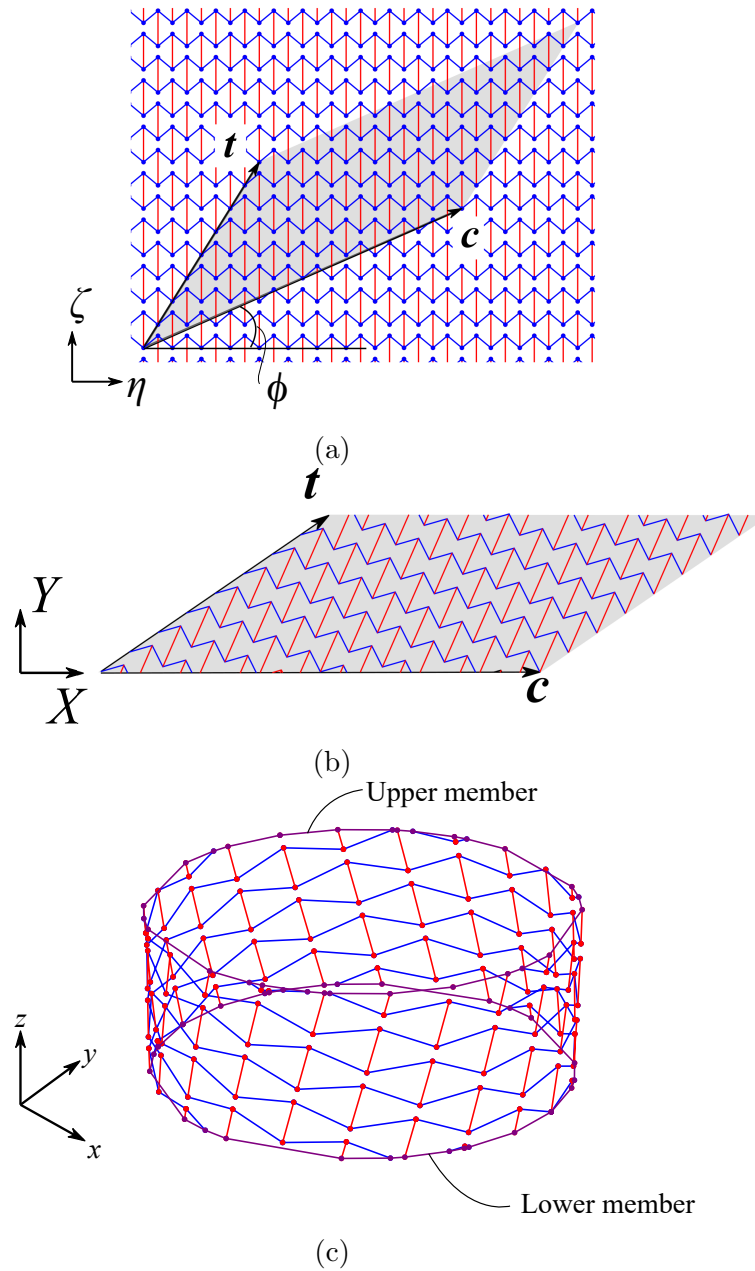


図 3.5: 平面充填構造の平行四辺形から離散円筒機構の基本構造への変換過程; (a) 平行四辺形領域, (b) カイラル角 ϕ に関する回転変換後の平行四辺形領域, (c) 写像 $P_{c_1, c_2, l, \theta}$ により平行四辺形領域から変換された離散円筒機構 (青: シェブロン・ロッド, 赤: タイ・ロッド, 紫: 上限材, 下限材) .

式化される.

$$\begin{aligned}\rho(c_1, c_2, \theta) &= \frac{\cos \theta}{L_0(c_1, c_2, \theta)} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \frac{\cos \theta}{L_0(c_1, c_2, \theta)} \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 & \sqrt{\frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta}} c_2 \\ -\sqrt{\frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta}} c_2 & 2c_1 + c_2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.10)$$

$$P_{c_1, c_2, l, \theta} : (X, Y) \mapsto \left(r \cos \frac{X}{r}, r \sin \frac{X}{r}, Y \right) \quad (3.11)$$

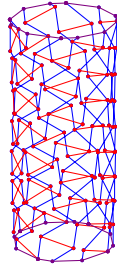
式 (3.11) の $r(= |c|/2\pi)$ は機構の円筒断面の半径である. また, 式 (3.10) の $L_0(c_1, c_2, \theta)$ は,

$$L_0(c_1, c_2, \theta) = \frac{|c|}{l} = 2 \cos \theta \sqrt{c_1^2 + c_1 c_2 + \frac{c_2^2}{2(1 + \sin \theta)}} \quad (3.12)$$

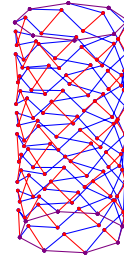
として計算される.

以上の変換によって生成された円筒形の下端と上端のそれぞれに対して, 下限材と上限材という円周に沿った部材を配置する.

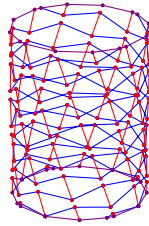
図 3.6 は, 提案手法で生成される離散円筒機構の基本構造の例を示している. 図 3.6 の右下の形状を除く全ての形状は, $\theta = \pi/9$ のリエントラント・ハニカムで構成され, カイラル指数 c_2 のみを変更して得られる. また, 図 3.6 の右下の形状は, $\theta = -\pi/9$ の凸な六角形ユニットを持つ. パラメータの変更により, さまざまな形状の離散円筒機構を生成できる.



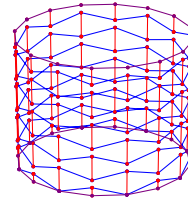
$$\theta = \pi/9, (c_1, c_2) = (8, -12), (t_1, t_2) = (0, 8).$$



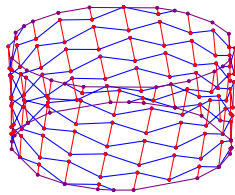
$$\theta = \pi/9, (c_1, c_2) = (8, -8), (t_1, t_2) = (0, 8).$$



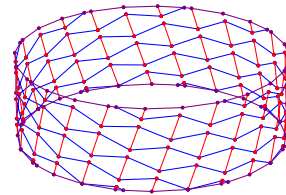
$$\theta = \pi/9, (c_1, c_2) = (8, -4), (t_1, t_2) = (0, 8).$$



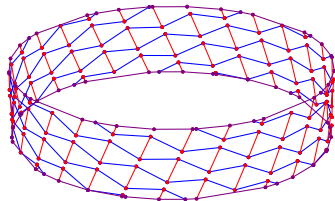
$$\theta = \pi/9, (c_1, c_2) = (8, 0), (t_1, t_2) = (0, 8).$$



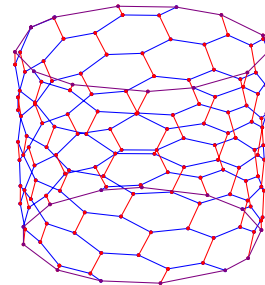
$$\theta = \pi/9, (c_1, c_2) = (8, 4), (t_1, t_2) = (0, 8).$$



$$\theta = \pi/9, (c_1, c_2) = (8, 8), (t_1, t_2) = (0, 8).$$



$$\theta = \pi/9, (c_1, c_2) = (8, 12), (t_1, t_2) = (0, 8).$$



$$\theta = -\pi/9, (c_1, c_2) = (8, 5), (t_1, t_2) = (0, 8).$$

図 3.6: 離散円筒機構の基本構造.

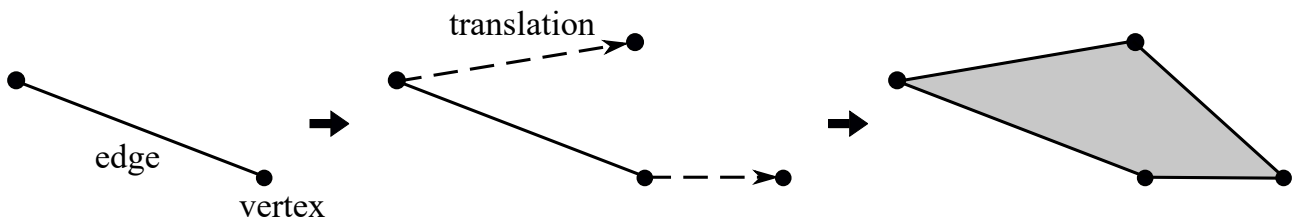


図 3.7: 頂点オフセットによる四辺形の生成過程.

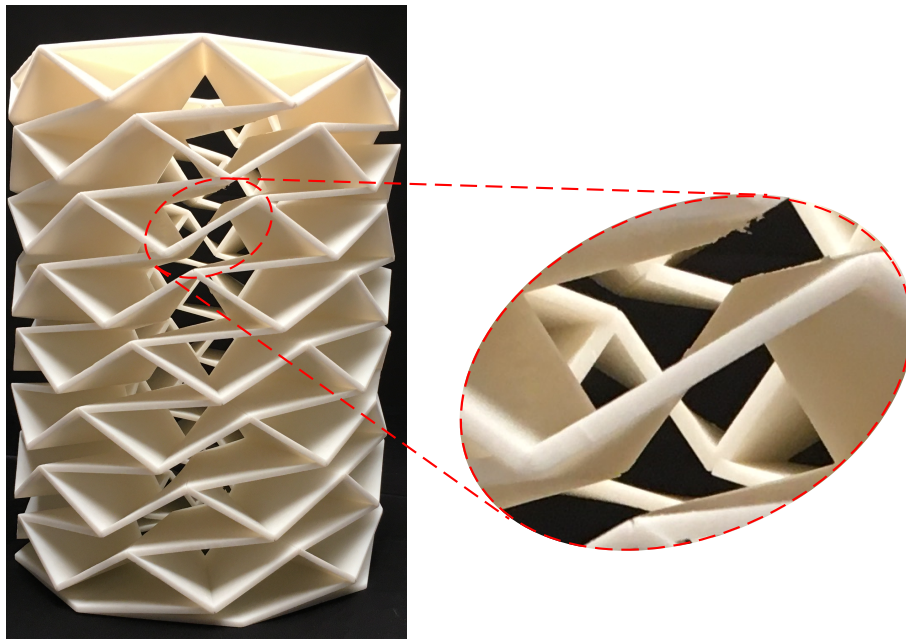


図 3.8: 中心方向オフセットで設計された離散円筒機構の模型と板材の拡大図.

3.2.2 設計段階 2 : 板材で構成される離散円筒機構の設計法

梁部材からなる離散円筒機構は，ソフトロボットのアクチュエータやステントのように柔軟性が要求される場面で利用されるが，クラッシュバンパーや制振材など高い剛性を要する構造としての適用は難しい．離散円筒機構の剛性を高めるには，機構の構造要素を梁でなく板材とする方法がある．しかし，板材を設計する際に，板材の形状に生じる不整形性が問題となる．板材の不整形性は，当該機構の製作性を低下させる [89]．この問題を解決するには，板材の不整形性を定量化し，それを低減させることが有効である．具体的には，設計段階 1 で生成した基本構造の全ての頂点をオフセット（並進移動で頂点および辺を複製）して，板材の形状として適用する四辺形を生成する．この四辺形を平面として生成する頂点オフセット手法を提案する．図 3.7 は，頂点オフセットによる四辺形の生成過程を示す．以下では，提案手法による平面的な四辺形の生成手法，板材のねじれに関する定量評価，および提案手法の適用限界について述べる．

まず，板材のねじれが発生する頂点オフセット法である中心方向オフセットを紹介する．中心方向オフセットは，基本構造の各頂点を，その頂点と同じ高さにある円筒中心軸上の点に向けて任意の距離だけ並進移動させる．図 3.8 は，中心方向オフセットを用いて設計した板材からなる離散円筒機構の 3D プリン

ティング模型である。図より、板材にねじれが生じていることが明らかである。

次に、本節で提案する手法について説明する。提案手法は、文献 [89] の平面的な四辺形を設計するための頂点オフセットの考えに基づく。文献 [89] では、 $\phi = 0$ あるいは $\phi = \pi/2$ のカイラル角を持つ正六角形ユニットからなる離散円筒機構を対象としている。これらの機構の基本構造は、円弧方向と母線方向にタイ・エッジの軸方向が一致している。さらに、正六角形ユニットは高い回転対称性を有する。したがって、各頂点に対応する四辺形を平面に設計できるオフセット方向が存在する。しかし、設計段階 1 で生成できる $0 < |\phi| < \pi/2$ または $-\pi/6 < \theta < \pi/6$ を満たす基本構造を持つ機構には対応していない。

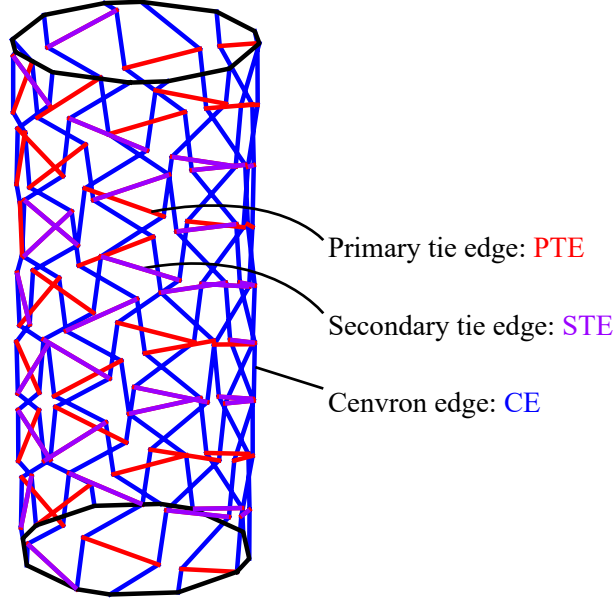


図 3.9: PTE, STE, CE の分類.

本節で提案する頂点オフセットのアルゴリズムを以下に示す。全ての頂点に対するオフセット距離を d とする。

- Step 1: 図 3.9 に示すように、基本構造の辺を 3 種類 (Primary Tie Edge: PTE (赤), Secondary Tie Edge: STE (紫), Chevron Edge: CE (青)) に分類する。
- Step 2: 図 3.10 のように、 i 番目の PTE の中点を M_i^P , M_i^P と同じ高さの円筒中心軸上の点を \bar{M}_i^P とする。線分 $M_i^P \bar{M}_i^P$ と PTE が存在する平面内で頂点のオフセット方向を決定する。 $M_i^P \bar{M}_i^P$ と平行な方向を基準方向と定める。頂点 V_{i0}^P を中心に基準方向から角度 ψ だけ回転した方向を V_{i0}^P のオフセット方向とする。 V_{i1}^P のオフセット方向は、板材面内で $M_i^P \bar{M}_i^P$ に関して V_{i0}^P のオフセット方向を鏡映反転させた方向とする。
- Step 3: 図 3.11(a) のように、STE の中点を M_i^S , M_i^S と同じ高さの円筒中心軸上の点を \bar{M}_i^S とする。線分 $M_i^S \bar{M}_i^S$ と STE が存在する平面を決定する。
- Step 4: Step 3 で決定した平面に対する単位法線ベクトル \hat{n}_i^S を求める。図 3.11(b) に示す 2 本の CE のうち頂点 V_{i0}^S に接続する CE に対する単位法線ベクトルを \hat{n}_0^C とし、残りの単位法線ベクトルを \hat{n}_1^C とする。

Step 5: V_{i0}^S の頂点オフセット方向を外積ベクトル $\hat{n}_i^S \times \hat{n}_0^C$ とし, V_{i1}^S の頂点オフセット方向を外積ベクトル $\hat{n}_1^C \times \hat{n}_i^S$ とする.

Step 6: オフセット量 d だけ V_{i0}^S および V_{i1}^S を Step 5 で求めたそれぞれの頂点オフセット方向に移動・複製して板材となる四辺形を生成する.

以下にアルゴリズムの詳細を記す.

はじめに, 基本構造のタイ・エッジを, 図 3.9 のように PTE と STE に分類する.

次に, PTE に対応する四辺形を頂点オフセットで生成する. 1 本の辺から四辺形の平面を生成するには, その四辺形が存在する平面を決定しなければならない. 平面の決定には, PTE の他に辺を 1 本定める必要があり, その辺を $M_i^P \bar{M}_i^P$ とする. さらに, $M_i^P \bar{M}_i^P$ を基準方向とし, それに対して先ほど決めた面内で角度 ψ だけ傾いた方向を V_{i0}^P の頂点オフセット方向とする. 同一平面内における V_{i1}^P の頂点オフセット方向は, 簡単のため, $M_i^P \bar{M}_i^P$ について V_{i0}^P の頂点オフセット方向と鏡映対称な方向とする.

続いて, STE に対応する四辺形を頂点オフセットで生成する. 四辺形が存在する平面の決定は, PTE と同様の方法で行う. なお, STE だけでなく全ての CE に対応する四辺形も同時に平面となる頂点オフセット方向を求めるのは, 困難である. したがって, 提案手法では, STE の 1 つの端点に接続する 2 本の CE に対応する四辺形のうち, 片方の四辺形だけが平面となるように頂点オフセット方向を決定する. 残りの CE に対応する四辺形は平面として設計できないため, これは提案手法の限界であるといえる. 以下では, 各頂点の文字をボールドで表したものは位置ベクトルとして扱う. STE に対応する四辺形の単位法線ベクトルを次式で表す.

$$\hat{n}_i^S = \frac{(V_{i0}^S - V_{i1}^S) \times (\bar{M}_i^S - M_i^S)}{|V_{i0}^S - V_{i1}^S| |M_i^S - \bar{M}_i^S|} \quad (3.13)$$

図 3.11(b) 内の 2 本の CE に対応する四辺形の単位法線ベクトルは, 以下のように導出する.

$$\hat{n}_0^C = \frac{(\bar{V}_{i1}^P - V_{i1}^P) \times (V_{i0}^S - V_{i1}^P)}{|\bar{V}_{i1}^P - V_{i1}^P| |V_{i0}^S - V_{i1}^P|} \quad (3.14)$$

$$\hat{n}_1^C = \frac{(\bar{V}_{i1}^S - V_{(i+1)1}^P) \times (\bar{V}_{(i+1)0}^P - V_{(i+1)1}^P)}{|\bar{V}_{i1}^S - V_{(i+1)1}^P| |\bar{V}_{(i+1)0}^P - V_{(i+1)1}^P|} \quad (3.15)$$

オフセット量 d と式 (3.13)–(3.15) で求めたベクトルを用いて, 頂点 V_{i0}^S および V_{i1}^S に対するそれぞれの頂点オフセットは $d(\hat{n}_i^S \times \hat{n}_0^C)$, $d(\hat{n}_1^C \times \hat{n}_i^S)$ として得られる.

この頂点オフセットの操作は, 全ての頂点に対して同時に行われる. また, 先に述べたように, 一部の CE に対応する四辺形は平面として設計できない. すなわち, 提案頂点オフセットでは, $-\pi/6 < \theta < \pi/6$ または $0 < |\phi| < \pi/2$ を満たす離散円筒機構の全ての板材を平面に設計できない. 図 3.12 は, 平面的な四辺形として設計された板材を表す.

3.2.3 頂点オフセットによる四辺形のねじれに関する定量評価法

設計段階 2 により, 四辺形の平面性が向上することを数値例題で確認する. ここで, 四辺形の平面性とは, 各四辺形にねじれがなく平面であること, ならびに離散円筒機構の全板材のうち平面的な四辺形の板材が占める割合を指す.

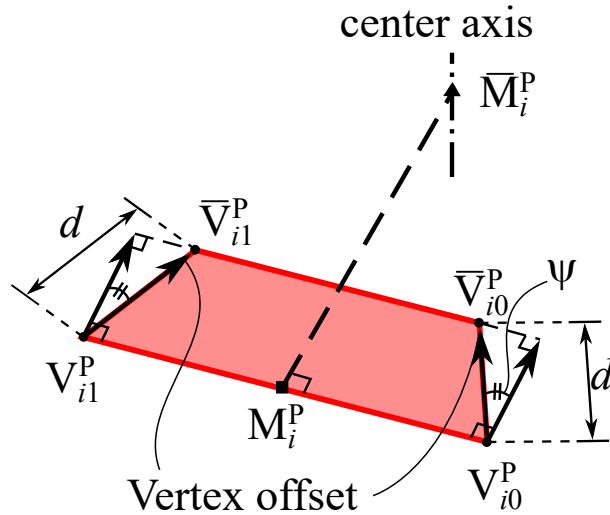


図 3.10: i 番目の PTE に対する頂点オフセットと平面に生成された四辺形.

以下では、各四辺形のねじれを定量化した指標をねじれ量と呼ぶ。ねじれ量は、スカラー 3 重積の絶対値として計算される、四辺形の外包体積と定義する。例えば、図 3.13 に示す頂点 $V_0, V_1, \bar{V}_0, \bar{V}_1$ からなる四辺形のねじれ量は、

$$|(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \cdot [(\bar{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{V}_0) \times (\bar{\mathbf{V}}_1 - \mathbf{V}_0)]| \quad (3.16)$$

として計算される。ねじれ量が 0 なら四辺形は平面である。

パラメータ $l = 1.0, c_1 = 8, c_2 = -12, t_1 = 0, t_2 = 8$ で生成される基本構造に対して頂点オフセットを行い、四辺形の板材を有する離散円筒機構を生成する。ここでの基本構造は円筒断面の外径に相当するものと考え、円筒の内側に向けて頂点オフセットを行う。提案した頂点オフセットで板材のねじれが有効に低減されることを調べるため、中心方向オフセットの結果との比較を行う。比較項目は、機構全体のねじれ量の総和、ならびに、ねじれ量が 1.0×10^{-10} 以上である板材の数とする。異なる値のパラメータ θ, d, ψ (ψ は提案頂点オフセットにのみ適用) を与えた例について検証する。

図 3.14, 3.15 はそれぞれ、 $\theta = \pi/9, \theta = -\pi/6$ の六角形ユニットに基づく離散円筒機構であり、頂点オフセット量を $d = 0.4$ とした板材で構成される。図 3.14(a) と 3.15(a) は中心方向オフセットで生成された板材で構成され、図 3.14(b) と 3.15(b) は提案した頂点オフセットで生成された板材で構成される。提案頂点オフセットについて、PTE の頂点オフセットに関する角度は $\psi = \pi/9$ である。表 3.1 および 3.2 はそれぞれ、 $\theta = \pi/9$ および $\theta = -\pi/6$ に対応する離散円筒機構の板材のねじれ量の総和を示す。表中で“infeasible”と記される機構では、得られた形状において板材間の接触が確認された。

上記のパラメータで得られる機構の板材総数は、全ての例で 224 個である。中心方向オフセットで生成した機構の板材のうち、ねじれた四辺形は 200 個であった。一方で、提案頂点オフセットで生成した機構の板材のうち、ねじれた四辺形は 96 個あるいは 81 個であった。ねじれのある四辺形の数 81 個の例は、 $\theta = -\pi/6, \psi = 0$ のパラメータの組である。中心方向オフセットと提案頂点オフセットで得られる板材のねじれ量の総和を比較すると、全ての例において提案頂点オフセットの方が小さくなることが明らかになった。

以上の結果から、提案頂点オフセットは板材のねじれを低減した離散円筒機構の形状設計法として有効

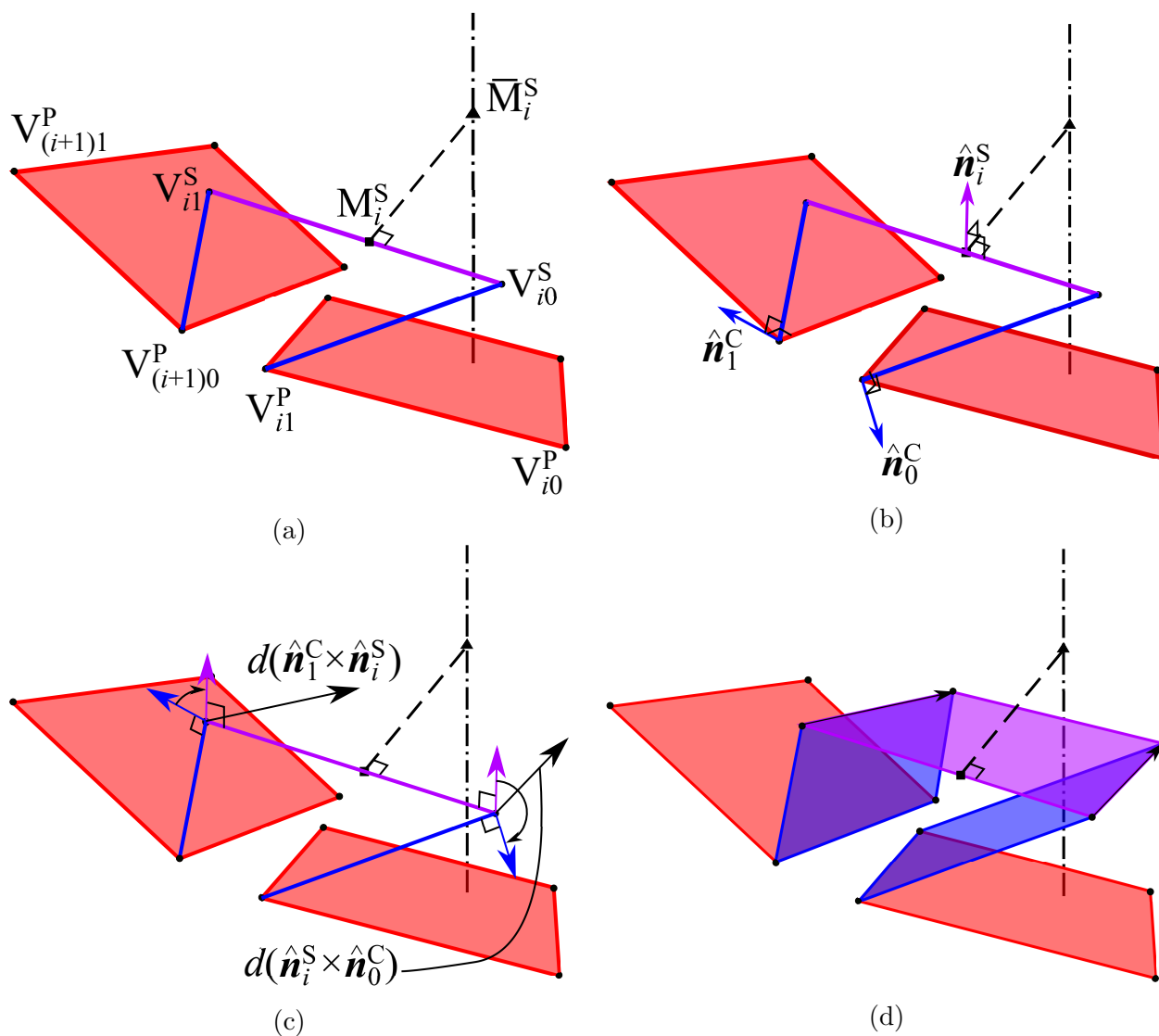


図 3.11: STE の 2 頂点に対する頂点オフセットの手順; (a) STE の中点 M_i^P と同じ高さの円筒中心軸上の点 \bar{M}_i^P の結合, (b) STE と CE に対応する四辺形の単位法線ベクトルの導出, (c) 単位法線ベクトルによる頂点オフセット方向の導出, (d) 頂点オフセットと平面として設計された四辺形板材の生成.

であるといえる.

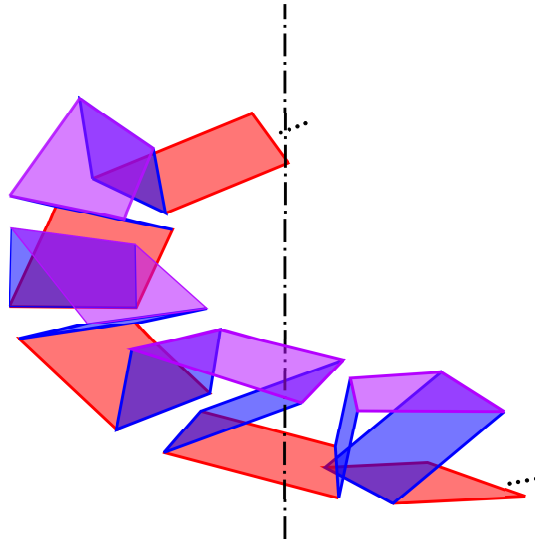


図 3.12: 機構の一部を構成する平面的な四辺形.

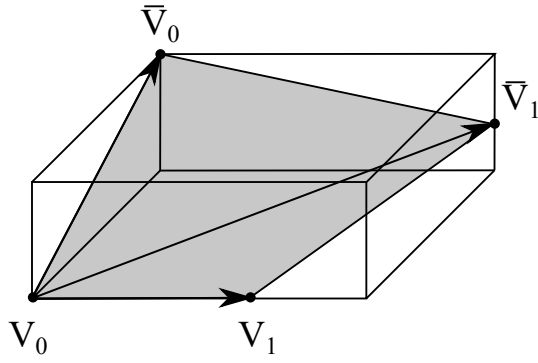


図 3.13: ねじれ量が 0 でない四辺形.

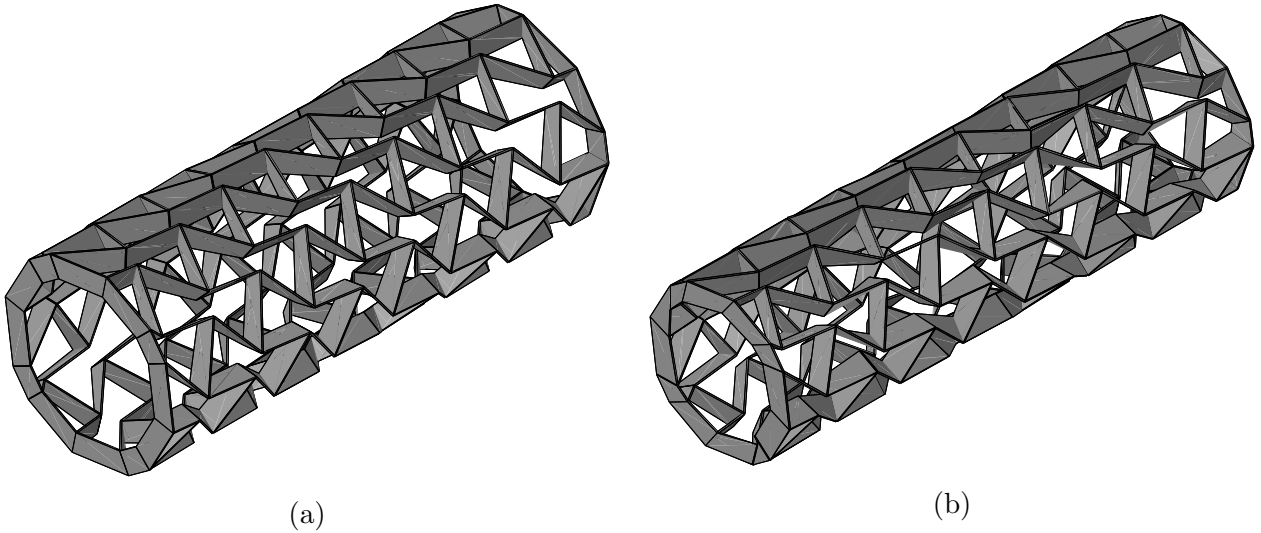


図 3.14: $\theta = \pi/9, d = 0.4$ を与えた離散円筒機構の形状比較; (a) 中心方向オフセット, (b) 提案頂点オフセット ($\psi = \pi/9$).

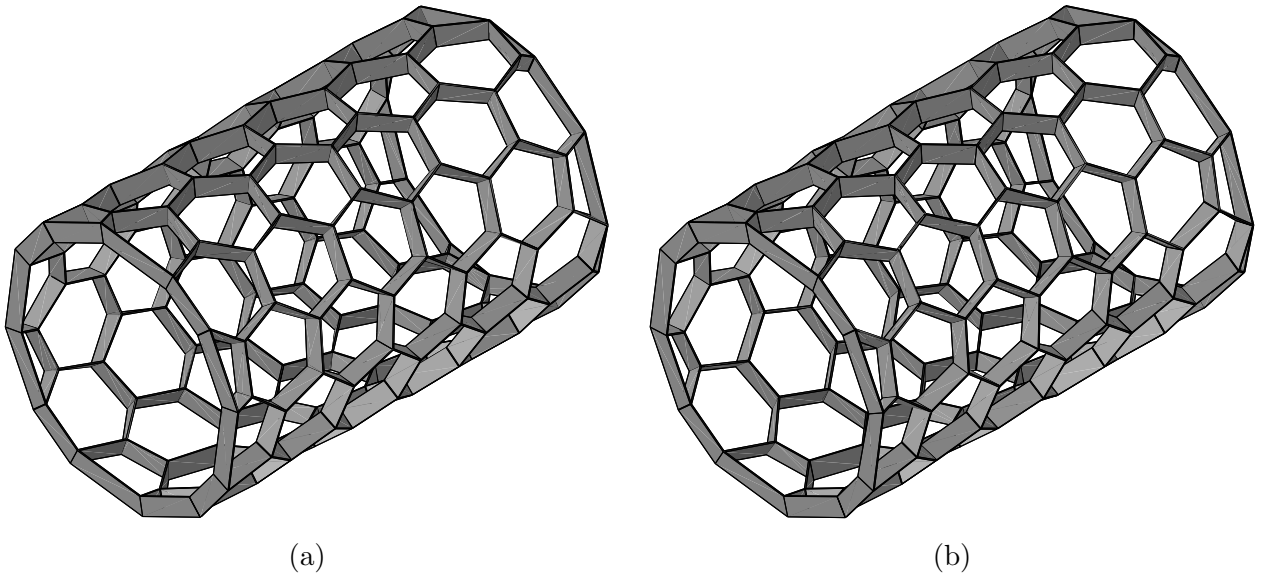


図 3.15: $\theta = -\pi/6, d = 0.4$ を与えた離散円筒機構の形状比較; (a) 中心方向オフセット, (b) 提案頂点オフセット ($\psi = \pi/9$).

表 3.1: 形状パラメータとねじれ量 ($\theta = \pi/9$).

Method	d	ψ	Quantity of distortion
Central offset	0.1	–	0.4242
Proposed offset	0.1	0	0.3200
Proposed offset	0.1	$\pi/18$	0.3282
Proposed offset	0.1	$\pi/9$	0.3236
Proposed offset	0.1	$\pi/6$	0.3338
Central offset	0.2	–	1.6969
Proposed offset	0.2	0	1.2798
Proposed offset	0.2	$\pi/18$	1.3130
Proposed offset	0.2	$\pi/9$	1.2945
Proposed offset	0.2	$\pi/6$	1.3353
Central offset	0.3	–	3.8179
Proposed offset	0.3	0	2.8796
Proposed offset	0.3	$\pi/18$	2.9542
Proposed offset	0.3	$\pi/9$	2.9127
Proposed offset	0.3	$\pi/6$	3.0045
Central offset	0.4	–	6.7874
Proposed offset	0.4	0	5.1194
Proposed offset	0.4	$\pi/18$	5.2519 (infeasible)
Proposed offset	0.4	$\pi/9$	5.1781
Proposed offset	0.4	$\pi/6$	5.3413

表 3.2: 形状パラメータとねじれ量 ($\theta = -\pi/6$).

Method	d	ψ	Quantity of distortion
Central offset	0.1	–	0.2108
Proposed offset	0.1	0	0.1159
Proposed offset	0.1	$\pi/18$	0.0485
Proposed offset	0.1	$\pi/9$	0.0636
Proposed offset	0.1	$\pi/6$	0.1357
Central offset	0.2	–	0.8431
Proposed offset	0.2	0	0.4635
Proposed offset	0.2	$\pi/18$	0.1941
Proposed offset	0.2	$\pi/9$	0.2546
Proposed offset	0.2	$\pi/6$	0.5429
Central offset	0.3	–	1.8970
Proposed offset	0.3	0	1.0430
Proposed offset	0.3	$\pi/18$	0.4368
Proposed offset	0.3	$\pi/9$	0.5727
Proposed offset	0.3	$\pi/6$	1.2215
Central offset	0.4	–	3.3724
Proposed offset	0.4	0	1.8541
Proposed offset	0.4	$\pi/18$	0.7765
Proposed offset	0.4	$\pi/9$	1.0182
Proposed offset	0.4	$\pi/6$	2.1716

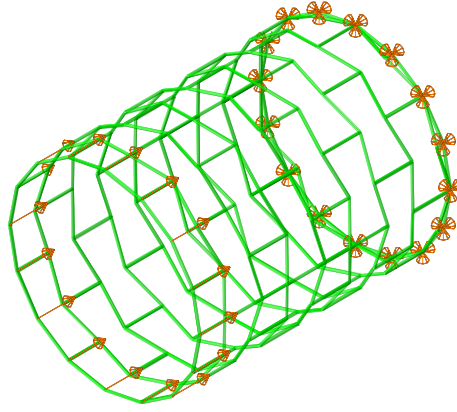


図 3.16: モデルの境界条件と強制変位 (矢印).

表 3.3: 非螺旋モデル 1, 2 および螺旋モデル 1, 2 の形状パラメータ

	l (m)	c_1	c_2	t_1	t_2	θ
Achiral 1	0.10	8	0	0	8	$-\pi/6, -\pi/9, -\pi/18, 0, \pi/18, \pi/9$
Achiral 2	0.10	16	-32	2	0	$-\pi/6, -\pi/9, -\pi/18, \pi/18, \pi/9$
Chiral 1	0.10	8	-4	0	8	$-\pi/6, -\pi/9, -\pi/18, 0, \pi/18, \pi/9$
Chiral 2	0.10	8	-12	0	8	$-\pi/6, -\pi/9, -\pi/18, 0, \pi/18, \pi/9$

3.3 静的構造解析

本節では、設計段階 1 で生成した基本構造を梁要素でモデル化した機構について、静的構造解析により力学特性を確認する。モデル化に際して、円筒機構の辺を梁部材とし、頂点を剛な接合部とする。梁の長さを $l = 0.10$ m とし、断面を半径 0.003 m の中実円断面とする。1 部材を 4 要素を用いてモデル化する。材料定数は、GFRP の使用を想定して、ヤング係数を 25 GPa, ポアソン比を 0.221, 降伏応力を 433 MPa とする。図 3.16 に示すように、境界条件として円筒機構の下限材の全ての接合部を 3 方向のピン支点とし、自由端とした上限材の全ての接合部に対してモデルの高さの 10% の大きさの強制変位を圧縮方向へ作用させる。

以下の全てのモデルの解析について、幾何学的非線形性を考慮する。解析には Abaqus Ver. 2018 [15] を使用する。荷重パラメータ τ は最大時間増分 1.0×10^{-2} で、 $0.0 \leq \tau \leq 1.0$ の範囲で線形的に増加させ、自由端に強制変位を作用させる。

解析モデルの初期形状に関するパラメータを表 3.3 に記載する。4 種の解析モデルを、六角形ユニットの配置方向に応じて、表 3.3 の上から順に、非螺旋モデル 1, 2 および螺旋モデル 1, 2 と呼ぶ。非螺旋モデル 1, 螺旋モデル 1, 2 について、角度 $\theta \in \{-\pi/6, -\pi/9, -\pi/18, 0, \pi/18, \pi/9\}$ で生成される機構の力学特性を検証する。また、非螺旋モデル 2 について、 $\theta \in \{-\pi/6, -\pi/9, -\pi/18, \pi/18, \pi/9\}$ で生成される機

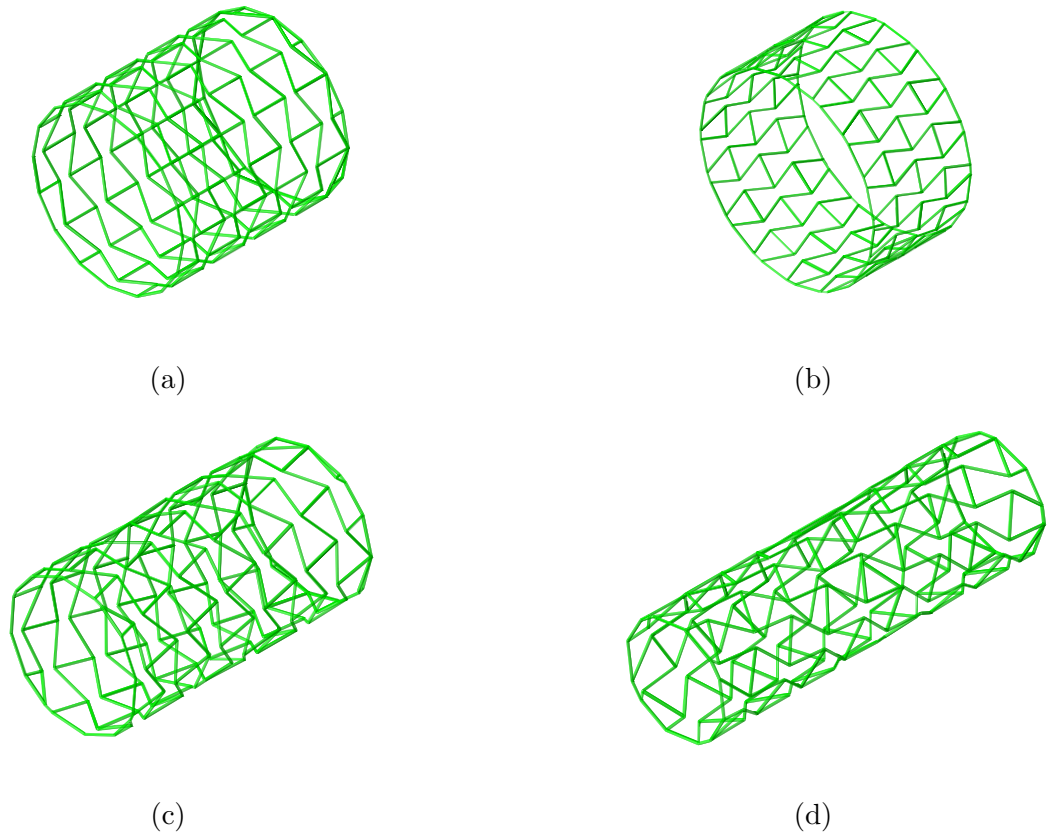


図 3.17: モデルの初期形状 ($\theta = \pi/9$) ; (a) 非螺旋モデル 1, (b) 非螺旋モデル 2, (c) 螺旋モデル 1, (d) 螺旋モデル 2.

構について検証するが、他のモデルとは異なり $\theta = 0$ の機構は除外している。この理由は、非螺旋モデル 2 の $\theta = 0$ の機構の解析では開始直後に計算が発散してしまい、他のモデルと結果を比較することが困難なためである。

各解析モデルのうち $\theta = \pi/9$ で生成される機構の初期形状を図 3.17 に示す。図 3.18 と 3.19 は、各モデルについて $\theta = \pi/9$ で生成した機構の変形形状を示し、それぞれの図におけるコントラストは Mises 応力と z 軸まわりの回転変位を表す。初期状態において、モデルの円筒中心軸は z 軸に一致している。図 3.20 は、 $\theta = \pi/9$ の螺旋モデル 1 および 2 の変形前の形状（黒）と変形後の形状（緑）を示しており、圧縮を受ける機構が xy 平面内で円筒中心軸について対称に変形していることがわかる。そのため、機構の z 軸まわりの回転変位は、ねじれ変形に相当する。

圧縮方向への強制変位に対する離散円筒機構の変形性状について述べる。図 3.18(a) を見ると、シェブロン・エッジとタイ・エッジの接合部で応力が集中しており、各タイ・エッジに発生する応力は比較的小さい。図 3.19(a) から、非螺旋モデル 1 の自由端における節点の z 軸まわりの回転変位は微小である。これは、タイ・エッジの軸方向が円筒中心軸に平行なため、六角形ユニットの配置が中心軸を通過する平面について対称なことから明らかである。

図 3.18(b) および 3.19(b) より、非螺旋モデル 2 は圧縮方向に対して直交する方向に収縮している。こ

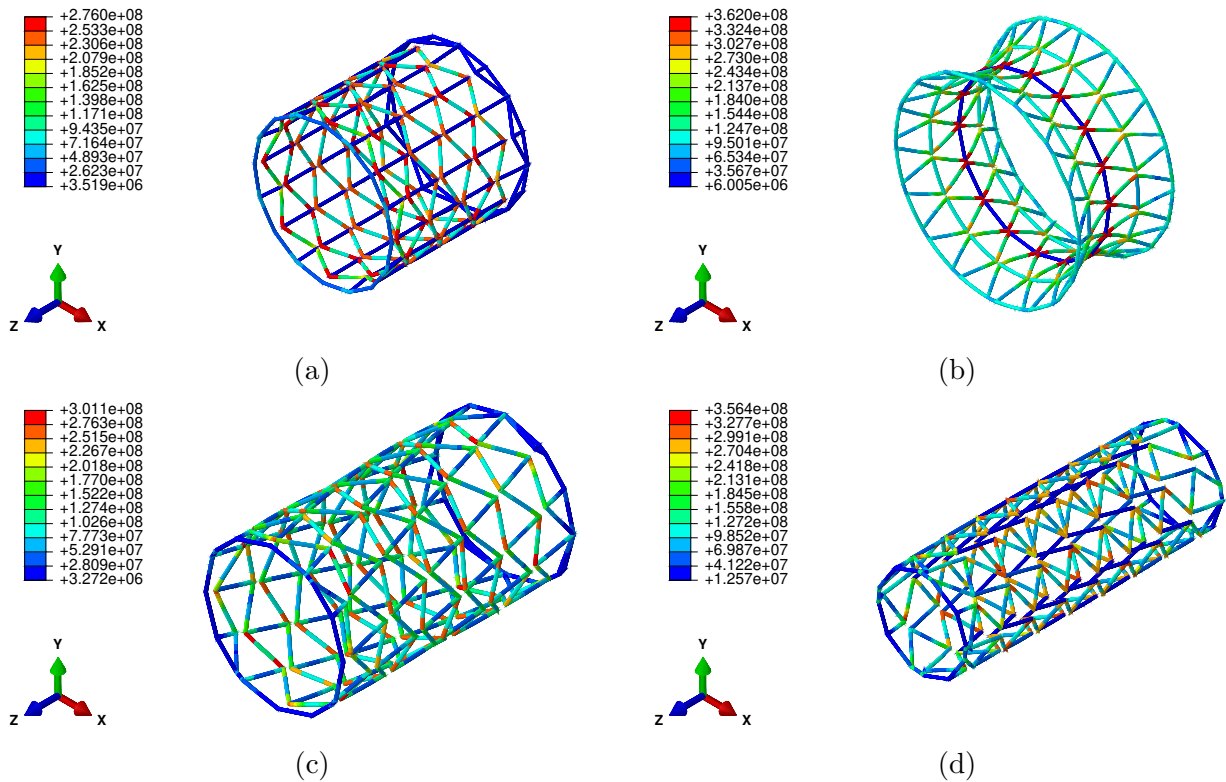


図 3.18: モデルの変形形状 ($\theta = \pi/9$) と Mises 応力分布; (a) 非螺旋モデル 1, (b) 非螺旋モデル 2, (c) 螺旋モデル 1, (d) 螺旋モデル 2.

の変形性状は、オーゼティック構造の力学特性に一致する。応力は、円筒面の中央部に位置するシェブロン・エッジの接合部で大きく、その接合部に接続するタイ・エッジでは小さい。非螺旋モデル 2 も非螺旋モデル 1 と同様、六角形ユニットの配置が中心軸を通過する平面について対称であり、タイ・エッジの軸方向は円周方向に一致している。そのため、図 3.19(b) で示すように、 $\theta = \pi/9$ の非螺旋モデル 2 の機構も圧縮時に z 軸まわりの回転変位がほとんど生じていない。

螺旋モデル 1 および 2 では、図 3.20 に示すように、圧縮方向の直交方向への収縮または膨張がほぼ生じない。図 3.19(c), (d) に示すように、螺旋モデル 1 および 2 では z 軸まわりの回転変位が明確に生じており、機構全体がねじれている。このような圧縮変形と同時にねじれ変形が生じる螺旋モデル特有の変形性状は、機構の幾何形状に由来する。つまり、タイ・エッジの軸方向が圧縮方向に対して平行でも垂直でもないため、機構の圧縮により、個々の六角形ユニットにはせん断変形が生じる。六角形ユニットにおける局所的なせん断変形の連成が、機構全体のねじれに変換されている。

図 3.21–3.23 は、各モデルの圧縮変形に対する応答の推移履歴を示している。これらの図内の複数の曲線は、異なるパラメータ θ で生成される各機構の応答に対応している。途切れた曲線に対応する機構の解析では、指定した強制変位量に到達するまでに計算が発散しており、発散する直前のステップまでの推移履歴を記録している。

図 3.21, 3.22 はそれぞれ、非螺旋モデル 1, 2 および螺旋モデル 1, 2 の圧縮変形に対する応答の推移履歴である。上段と下段の両者について、横軸は圧縮方向に作用させた強制変位量の機構の中心軸方向のサ

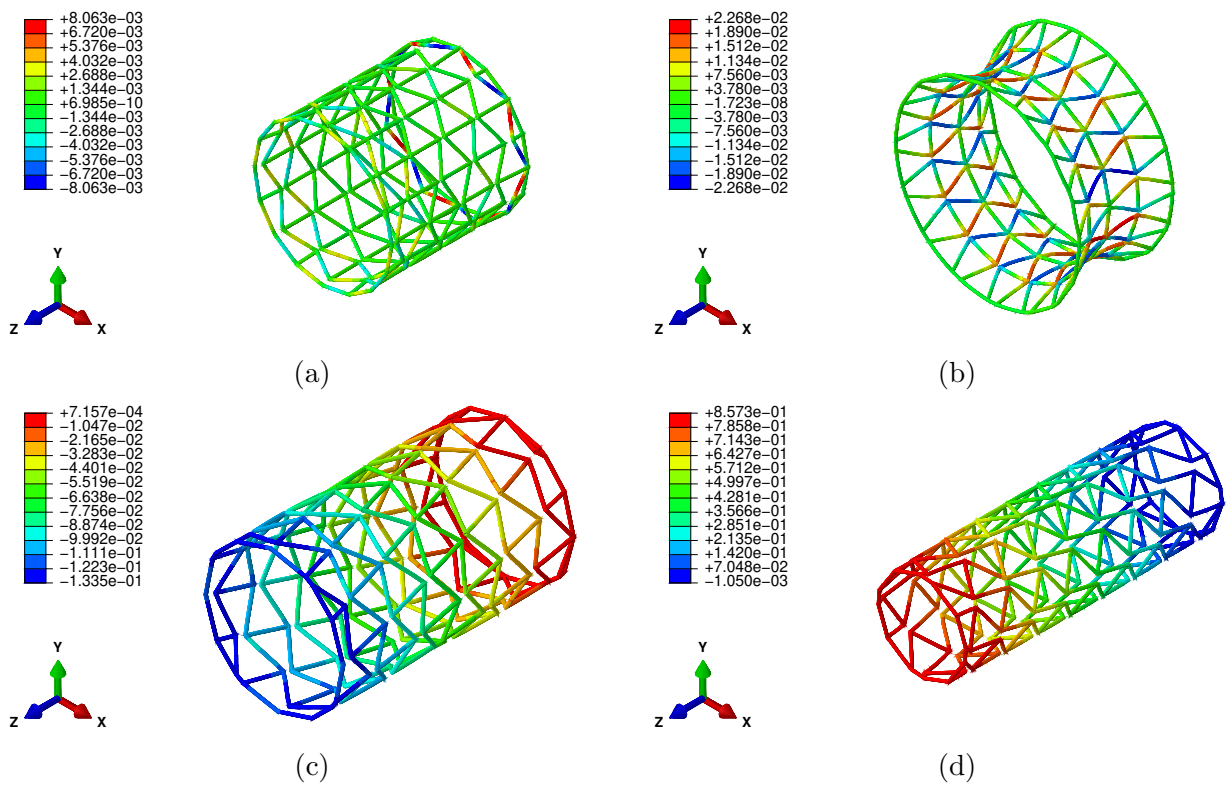


図 3.19: モデルの変形形状 ($\theta = \pi/9$) と z 軸まわりの回転変位; (a) 非螺旋モデル 1, (b) 非螺旋モデル 2, (c) 螺旋モデル 1, (d) 螺旋モデル 2.

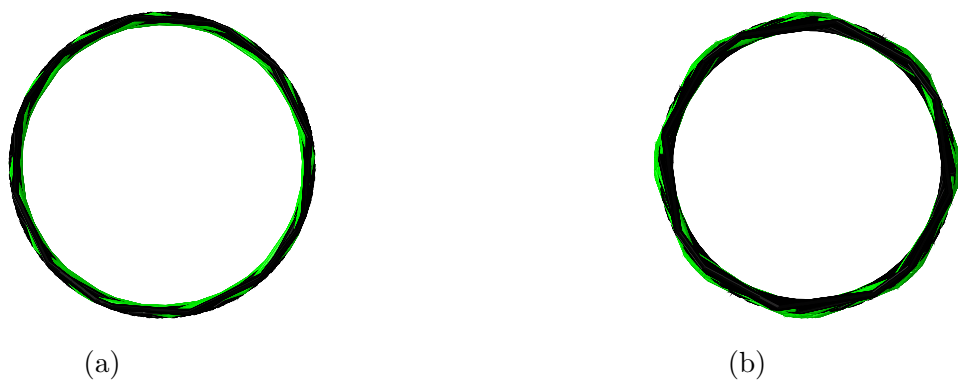


図 3.20: $\theta = \pi/9$ の螺旋モデル 1 および 2 の変形形状の xy 平面への投影図 (黒: 変形前の形状, 緑: 変形後の形状); (a) 螺旋モデル 1, (b) 螺旋モデル 2.

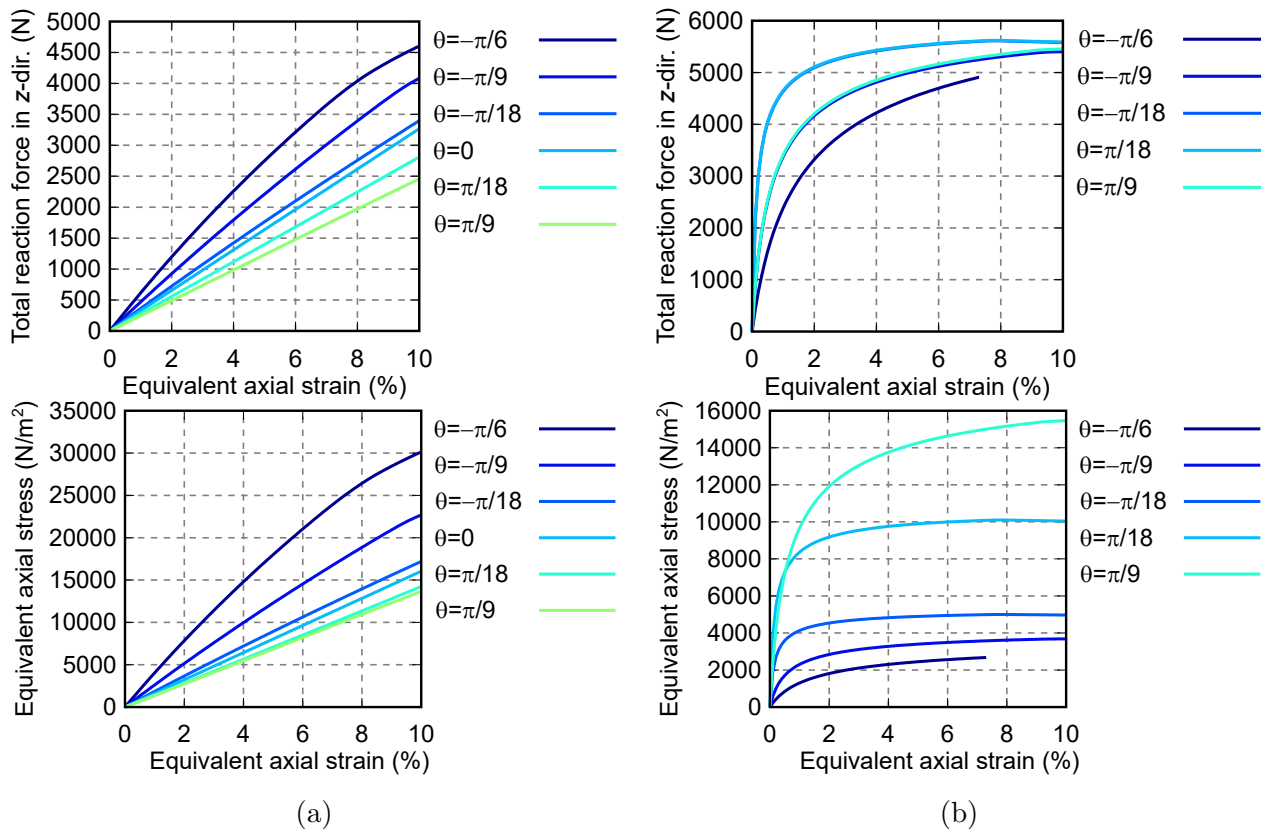


図 3.21: 非螺旋モデル 1 および 2 の圧縮変形に対する応答の推移履歴。(上段) z 方向反力の合計値。(下段) 等価軸応力; (a) 非螺旋モデル 1, (b) 非螺旋モデル 2.

イズに対する割合を表している。縦軸について、上段の図では全てのピン支点に発生した z 方向反力の合計値を表し、下段の図では全てのピン支点に発生した z 方向反力の合計値を円筒の断面積で除した量を表している。横軸の量を等価軸ひずみ、下段の図の縦軸を等価軸応力とし、等価軸応力の勾配を離散円筒機構の等価弾性係数と定義する。

図 3.21(a) から、非螺旋モデル 1 に分類される全ての機構の反力は概ね線形に増加しており、強制変位を作用し終えるまで機構が弾性範囲内で変形していることがわかる。最終ステップでの z 方向反力の合計値は、約 2500 N から約 4500 N の範囲で分布しており、機構によってばらつきがある。非螺旋モデル 1 の等価弾性係数は θ の増加とともに減少しており、六角形ユニットの形状が正六角形に近いほど軸方向に変形しにくく、リエントラント・ハニカムの幾何特性が明確であるほど変形しやすいといえる。

非螺旋モデル 2 に分類される機構の z 方向反力の合計値は、図 3.21(b) の上段の図のように、初期において線形に増加するが、等価軸ひずみの 1% 付近から勾配が減少し始め、それ以降は図 3.18(b) や 3.19(b) に示すような座屈が機構に発生するため、ほとんど増加しない。また、線形範囲では機構の z 方向反力の合計値は、 θ の絶対値が小さくなるにつれて増加する。 $\theta = -\pi/6$ の機構を除く全ての機構について、最終ステップで得られた z 軸方向反力は 5500 N 付近に集中している。一方で、図 3.21(b) の下段の図から、等価軸応力は機構ごとに大きくばらつき、 θ が増加するにつれて等価弾性係数が増加していることがわかる。反力と等価軸応力の履歴曲線が大きく異なる理由は、非螺旋モデル 2 ではタイ・エッジが機構の円周

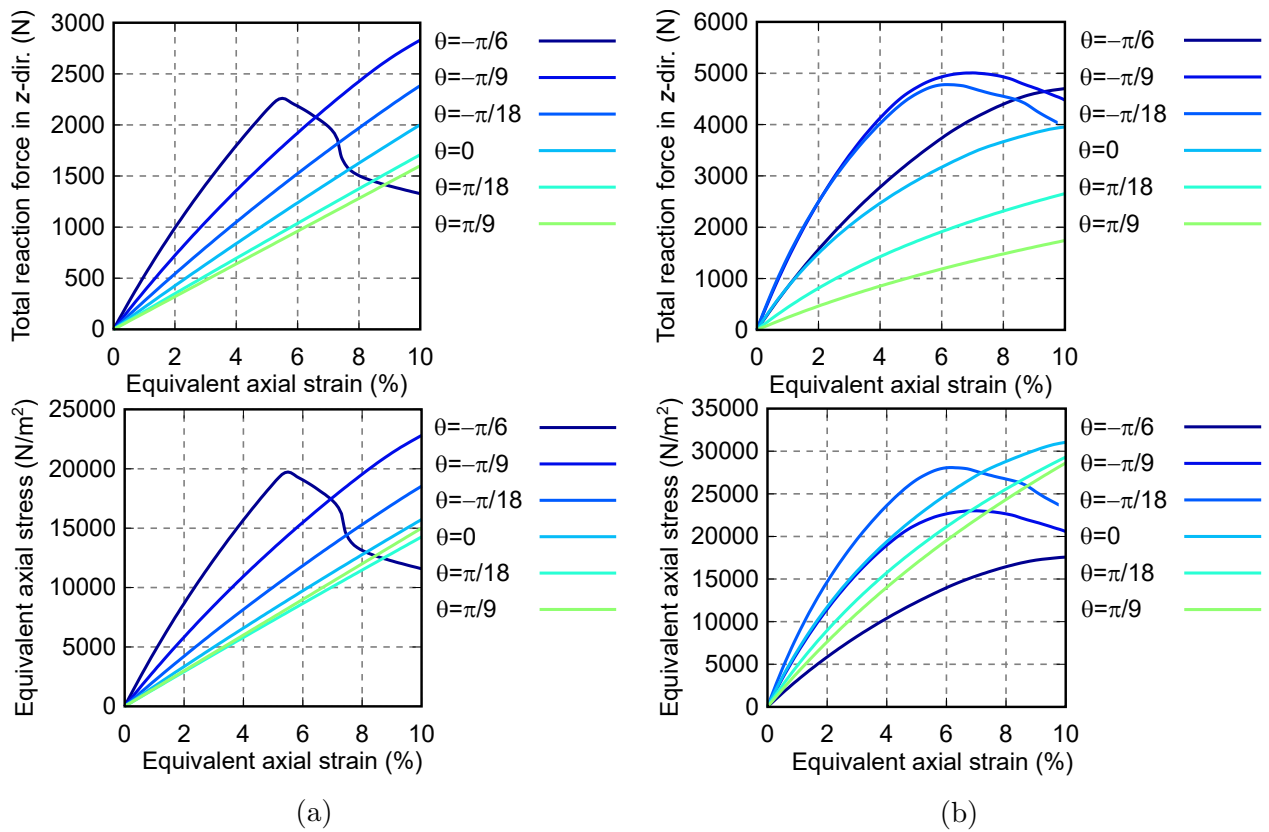


図 3.22: 螺旋モデル 1 および 2 の圧縮変形に対する応答の推移履歴. (上段) z 方向反力の合計値. (下段) 等価軸応力; (a) 螺旋モデル 1, (b) 螺旋モデル 2.

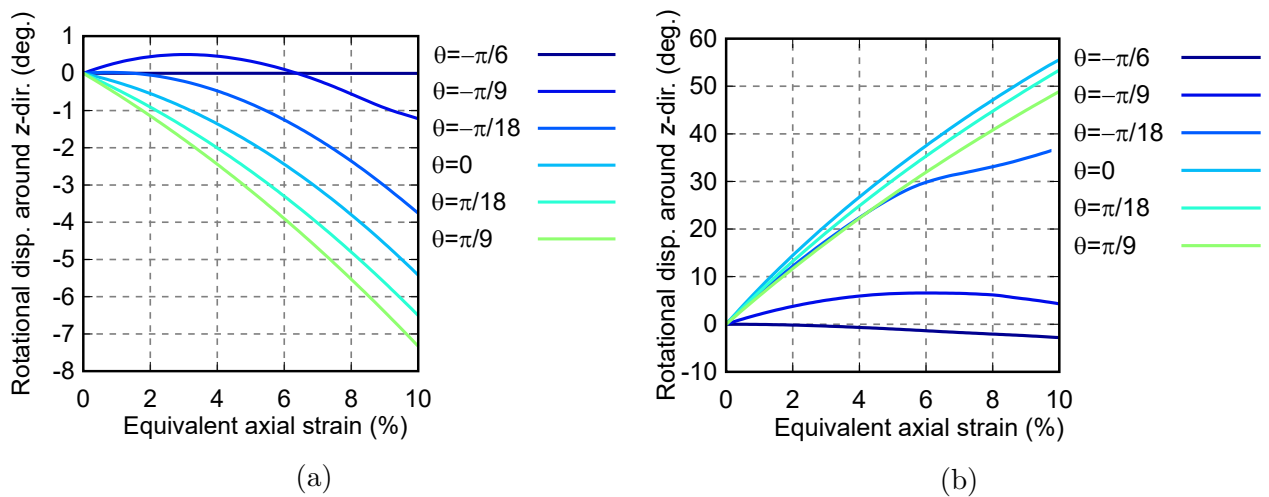


図 3.23: 螺旋モデル 1 および 2 の円筒中心軸まわりの回転変位の推移履歴; (a) モデル 1, (b) モデル 2.

方向に沿って配置されパラメータ θ による円周の変化率が大きいためである。

図 3.22(a) の上段から、螺旋モデル 1 に分類される機構の線形範囲での z 方向反力は、 θ の大きいモデルほど小さいことが確認できる。 $\theta = -\pi/6$ の機構は、等価軸ひずみの 5.5% 付近で一部のシェブロン・エッジが降伏し始め、最終的に崩壊する。この応答が生じた原因は、 $\theta = -\pi/6$ の機構のタイ・エッジが円周方向に一致していることにより、圧縮変形過程でシェブロン・エッジに応力が集中したためである。 $\theta = -\pi/6$ の機構を除く、螺旋モデル 1 に分類される全ての機構の最終ステップにおける z 方向反力は、約 1600 N から約 2750 N の範囲で分布する。図 3.22(a) の下段から、等価軸応力の推移履歴が z 方向反力に概ね一致することが確認できる。

図 3.22(b) の上段に示すように、螺旋モデル 2 に分類される機構の z 方向反力について、 $\theta \geq 0$ では θ が小さくなるにつれて増加する。したがって、ユニットの形状がリエントラント・ハニカムとしての幾何特性を顕著に示す機構ほど軸方向に柔軟に変形するといえる。 $\theta = 0$ と $\theta = -\pi/6$ の機構は、変形の初期において z 方向反力の推移履歴が概ね一致しているが、 $\theta = 0$ の機構の z 方向反力の勾配は、等価軸ひずみが 2% 付近に至ってから減少し始める。また、 $\theta = -\pi/18$ と $\theta = -\pi/9$ の機構の z 方向反力の推移は概ね一致しており、等価軸ひずみの 6% 付近で一部の部材が降伏し、機構全体に弾塑性座屈が生じる。これらの機構の最終ステップでの z 方向反力は、約 1750 N から約 4700 N の範囲でばらつきがある。図 3.22(b) の下段をみると、 $\theta \geq 0$ の 3 つの機構と $\theta < 0$ の 3 つの機構の最終ステップにおける等価軸応力の大きさの序列が入れ替わっている。これは、 θ の値による機構の円周の変化率が大きいことによる。とくに、 $\theta < 0$ の機構の等価軸応力に着目すると、 z 方向反力が最終ステップで最大である $\theta = -\pi/6$ の機構の最終ステップにおける等価軸応力は最小である。

図 3.23 は、螺旋モデル 1 および 2 の z 軸まわりの回転変位の推移である。横軸は等価軸ひずみを表しており、縦軸は自由端の節点における z 軸まわりの回転変位を表している。上で述べたように、 z 軸まわりの回転変位は機構の自由端でのねじれ変形に相当する。

図 3.23(a) より、螺旋モデル 1 に分類される機構では θ の増加とともに回転変位量が増加している。ただし、 $\theta = -\pi/9$ の機構は例外的な応答を示しており、変形初期では他の機構の回転方向と反対方向に回転しており、等価軸ひずみが約 6% を超えた時点で回転方向が反転する。また、 $\theta = -\pi/6$ の機構は、円筒中心軸を通る平面について対称な形状であるため、自由端で回転変位が生じない。

図 3.23(b) より、螺旋モデル 2 では $\theta = -\pi/6$ を除く全ての機構の回転方向が正であり、回転変位量は螺旋モデル 1 に比べて平均して大きいことがわかる。 $\theta \geq 0$ では θ が大きくなるにつれて回転変位量が増加しており、50(deg.) から 60(deg.) 程度の値が得られた。 $\theta = -\pi/18$ のモデルは、 $\theta = \pi/9$ のモデルと概ね同じ推移を示すが、座屈後から回転変位量の勾配が減少している。また、 $\theta = -\pi/6$ の機構は、他の機構の回転方向と反対の方向に回転することが明らかになった。

3.4 伸縮とねじれのカップリング変形とカイラリティに関する考察

3.3 節では、さまざまな形状パラメータで生成される離散円筒機構の圧縮変形に対する変形性状について確認した。本節では、螺旋モデルの変形性状として得られた伸縮とねじれのカップリング変形について考察する。以下では、幾何学的カイラリティと動的カイラリティの 2 つの概念と離散円筒機構の形状と変形性状の共通点について説明し、離散円筒機構の螺旋モデルがカイラル・メタマテリアルとして成立する

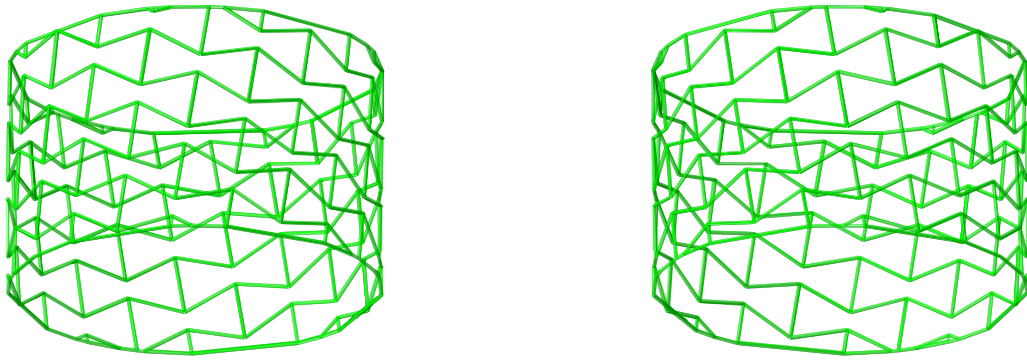


図 3.24: 互いに鏡映関係にある螺旋モデル.

可能性を示す.

3.4.1 幾何学的カイラリティと離散円筒機構の螺旋モデル

螺旋モデル 1 および 2 は, 六角形ユニットが螺旋状に配置された幾何形状を有する. 第 1 章で説明した通り, 鏡映関係にある 2 つの螺旋は重ならない. このことは, 設計段階 1 で生成される離散円筒機構の螺旋モデルについても同様である. 例えば, 図 3.24 に示すように, 互いに鏡映関係にある 2 つの螺旋モデルは重ならない. 鏡映関係にあつて, かつ重ならない形状を持つ構造は, 幾何学的カイラリティの性質を持つとされる. なお, 自明であるが, 非螺旋モデルは鏡映しても同じ形状の構造が得られるため, 幾何学的カイラリティの性質には該当しない.

3.4.2 動のカイラリティと離散円筒機構の螺旋モデル

幾何学的カイラリティを広義のカイラリティとした場合, 動のカイラリティは狭義のカイラリティであるといえる. 動のカイラリティは, “回転と並進の結合” として再定義された “真のカイラリティ (true chirality)” として解釈されている [134]. 3.4.1 節では, 離散円筒機構の螺旋モデルが幾何学的カイラリティの性質を持つ構造であると述べた. 本節では, 離散円筒機構の螺旋モデルが動のカイラリティの性質も満たすことについて考察する.

動のカイラリティの定義は, 空間反転 (パリティ変換) 対称性 P , 純粋回転対称性 R , 時間反転対称性 T を用いて, “ P は破れているが RT は破れていない状態” と表現される. 図 3.25 は, 動のカイラリティの概念を図示している. 自転しながら回転中心軸に沿って真直な矢印の向きに並進する物体を考える. この物体は円盤に円錐が付着した非対称な形をしており, 円錐を円盤のどちらの面に付けるかは, 右ねじの法則に従って回転方向に合わせて決定する. この設定に則ると, 図 3.25 内の左の物体は並進方向と円錐の頂点方向が一致する. この左の円盤の動きを Type R とする. Type R の円盤に対して $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$ の変換を行うと, 右上の運動を行う円盤が得られる. この変換は, 先に提示した空間反転に相当する. 右上の円盤は Type R とは反対の向きに並進するが, 回転方向は同じである. したがって, 回転方向に従って円錐の頂点は右向きとなる. このことから, 右上の円盤に付着する円錐の頂点方向と並進方向は反対向きとなる. ゆえに, この円盤の運動は Type R とは異なり, これを Type L と

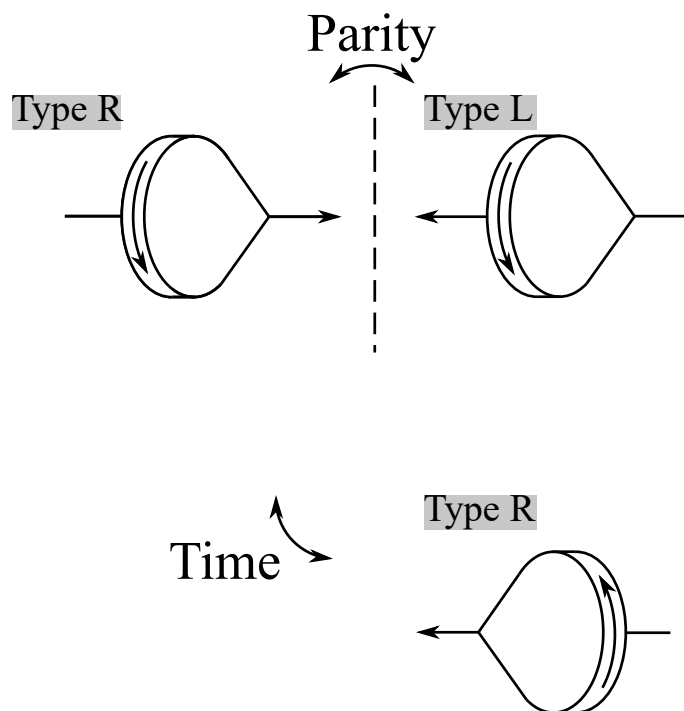


図 3.25: 動的カイラリティの概念図.

する。時間反転は、運動を反転させる操作である。右下の円盤は、左の Type L の円盤を時間反転させたものである。並進方向は左であり、回転方向を表す円錐の頂点方向は左向きである。これは、並進方向と頂点方向が一致するので左の円盤と同じ Type R に相当する。右上と右下の円盤は、空間内でどのように回転させても一致することはない。以上をまとめると、回転と並進を同時に行う物体は、空間反転で性質が変化してしまうが、空間内での回転や時間反転では変化しない。これが先に示した動的カイラリティの定義である。

図 3.26 は、離散円筒機構の螺旋モデルの圧縮変形とねじれ変形を図 3.25 に対応させたものである。左の離散円筒機構は右側をピンで固定され、左側から強制変位により圧縮される。このときの離散円筒機構のねじれ変形、すなわち中心軸まわりの回転変位の方向は、図 3.25 の左の物体の回転方向に一致するので Type R とみなせる。また、右上の機構は左の機構を空間反転したものである。空間反転によりピン支点の位置と強制変位の作用方向は入れ替わり、ねじれ変形の方向のみが Type R に一致する。したがって、これは Type L に相当する回転と並進の結合を示す。さらに、右下の機構は左の機構を時間反転したものである。右下の機構は、圧縮された状態から左向きに引張られ、同時に、左の機構と反対方向にねじれる。したがって、右下の機構の変形は Type R の運動に相当する。Type R と Type L の機構の変形性状は、空間内での回転では重ね合わせられない。以上より、離散円筒機構の螺旋モデルは幾何学的カイラリティだけでなく動的カイラリティの性質も持ち合わせ、カイラル・メタマテリアルとしての機能を有するといえる。

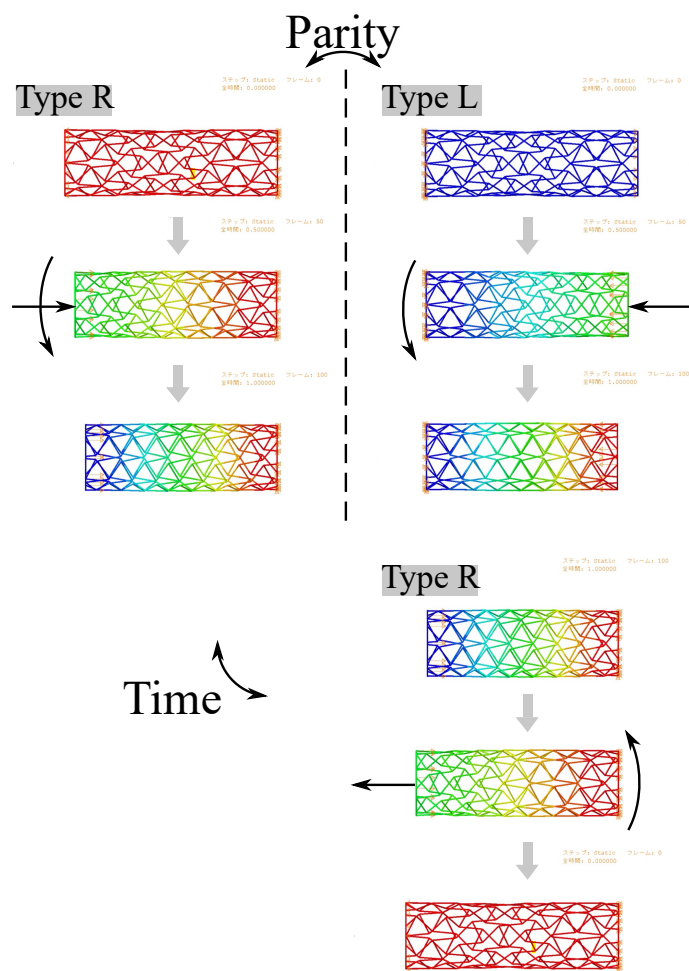


図 3.26: 螺旋モデルの変形と動的カイラリティの対応.

3.5 第3章の結論

本章では、均一な2回回転対称な六角形ユニットで構成される離散円筒機構の形状設計法を提案し、提案手法より生成された機構の力学特性を検証した。さらに、螺旋モデルの軸方向とねじれのカップリング変形について、物理学的な対称性の概念を用いて考察した。

3.2節では、均一な2回回転対称な六角形で構成される離散円筒機構の形状設計法について論じた。設計段階1では、頂点と辺からなる基本構造の設計法に関する定式化を行った。設計段階2では、四辺形の板材で構成される場合の離散円筒機構の製作性について考慮した頂点オフセット法を提案した。3.3節では、設計段階1で設計した基本構造を梁部材でモデル化した離散円筒機構に対し、強制変位による圧縮変形を作用させて変形性状を確認した。3.4節では、3.3節で行った静的構造解析の結果に基づき、圧縮と同時に中心軸まわりにねじれが生じるカップリング変形について物理学の対称性の観点から考察した。提案手法で生成される離散円筒機構のうち軸方向に対してねじれが生じるモデルは、カイラリティを持つメタマテリアルと考えることができる。

本章で得た知見を以下にまとめる。

1. 正六角形格子を有するCNTの幾何形状を円筒形に変換するための既往の式に対して、六角形ユニットの形状に関する角度の範囲を拡張した式を提案した。これにより、2回回転対称な六角形ユニットで構成された離散円筒機構の基本構造を生成できる。また、並進ベクトル t のパラメータを、指定した条件の範囲内で設計者が任意に決定できる。平面充填構造から円筒形への変換は線形変換であるため、くり返し計算は含まれない。
2. 四辺形の板材の設計に3.2.2節で提案した頂点オフセットを用いることで、中心方向オフセットで設計した機構に比して、ねじれ量およびねじれた四辺形の数が増加するという結果が得られた。提案頂点オフセットの限界として、一部のシェブロン・エッジに対応する四辺形には必然的にねじれが生じてしまうことが挙げられる。また、提案頂点オフセットを適用したモデルの一部には、板材間での交差が生じていた。
3. 数値例題を通じて、梁部材で構成される離散円筒機構は、形状パラメータの変更により機構形状と円筒中心軸方向の反力および等価弾性係数をさまざまに調整できることを示した。また、螺旋モデルの中には、圧縮によりねじれ変形が生じる機構が存在することを明らかにし、これらの機構が幾何学的カイラリティおよび動的カイラリティの性質を有することについて考察した。

第 4 章

柔軟な変形構造の大変形解析のための 3 次元弾性梁モデルの開発

4.1 はじめに

本章では、大変形微小ひずみの仮定の下、動的緩和法 (dynamic relaxation method: DRM) によるグリッドシェルの大変形解析のための 3 次元弾性梁モデルを開発する。提案する梁モデルは、共回転梁要素の概念に基づく [135,136]。提案モデルの特徴として、平板から変形したグリッドシェル曲面の接平面に垂直な単位法線ベクトルを、梁要素の各節点に与え、局所座標を定義するために用いることが挙げられる。これにより、変形状態は、節点位置と曲面上の法線ベクトルによって一意に定まる。また、法線ベクトルの 2 方向成分と法線ベクトルまわりの回転変位を独立変数として使用する。そして、陽的解法である DRM での使用のために、全ポテンシャル・エネルギーを偏微分して残差力を導出する。さらに、交差する 2 つの梁部材に、曲面上の法線ベクトルまわりの回転変位をそれぞれ独立に持たせることで、節点におけるヒンジ接合部を合理的に実装できる。提案手法の精度は、有限要素法 (finite element method: FEM) で得られる結果や、全ポテンシャル・エネルギー最小化に基づく最適化問題を解いて得られる結果との比較を通じて、数値例題で検証する。加えて、提案手法を用いた、負のポアソン比を持つ格子形状であるリエントラント・ハニカムの面内および面外変形に関する解析結果を示す。

4.2 動的緩和法

DRM は、構造物の静的問題を動的に解くための陽的解法であり、1965 年に Day によって提案された [24]。DRM は、主に膜構造 [137]、ケーブルネット [138]、テンセグリティ [139]、ベンディングアクティブ構造 [28] のような柔軟な構造の形状探索法として用いられる。DRM では、構造の形状をモデル化するために節点変位を利用し、逐次的に節点運動を追跡する。そして、人工減衰により節点運動を静的釣合い状態に収束させる。

いま、梁要素で離散化された幾何学的非線形性を有する構造を考える。 \mathbf{a} , \mathbf{v} , \mathbf{r} , \mathbf{x} , \mathbf{u} をそれぞれ、加速度ベクトル、速度ベクトル、構造の内力ベクトル、節点位置ベクトル、節点変位ベクトルとする。なお、これらのベクトルは構造の全自由度を含む。また、質量行列を \mathbf{M} とする。提案手法では、以下の DRM

のアルゴリズムの Step 6 で説明する人工減衰を使用するため、減衰行列は省略する。質量行列 \mathbf{M} は対角行列なので、以下の式は各節点、あるいは各変位成分ごとに定式化できる。しかし、4.4 節では、残差力を単純な式で導くために、全自由度を含むベクトルおよび行列を用いている。静的な外力ベクトル \mathbf{p} を作用させた節点の運動は、次式の運動方程式で計算される。

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{r} = \mathbf{p} \quad (4.1)$$

式 (4.1) は、 \mathbf{a} が $\mathbf{0}$ のときには、非線形な静的釣合い式を表す。現在の時刻 t における静的釣合い式の残差力ベクトル \mathbf{R}^t は

$$\mathbf{R}^t = -\mathbf{r}^t + \mathbf{p} \quad (4.2)$$

として書ける。以下では、上添字 t は時刻 t の値を表す。式 (4.1) は \mathbf{R}^t を用いて以下のように書き直せる。

$$\mathbf{M}\mathbf{a}^t = \mathbf{R}^t \quad (4.3)$$

運動エネルギー K を、次式で定義する。

$$K = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} \quad (4.4)$$

DRM のアルゴリズムを以下にまとめる。

DRM のアルゴリズム:

Step 1: 初期の時間増分として $\Delta t = \Delta t_{\text{ini}}$ とおく、初期の節点位置 $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ として設定する。変位ベクトルと速度ベクトルの初期条件 ($t = 0$) はそれぞれ、 $\mathbf{u}^t = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{v}^{t-\Delta t/2} = \mathbf{0}$ とする。運動エネルギーは $K^{t-\Delta t/2} = 0$ として初期化する。

Step 2: 式 (4.2) から現在の残差力ベクトルを計算する。

Step 3: 式 (4.3) を用いて、現在の加速度ベクトル \mathbf{a}^t を次のように計算する。

$$\mathbf{a}^t = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}^t \quad (4.5)$$

実際には質量行列の逆行列は計算しない。質量行列は対角行列であり、加速度の各成分は、式 (4.5) を用いて独立に更新される。

Step 4: 速度ベクトル、変位ベクトル、位置ベクトルを順に更新する。

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} = \mathbf{v}^{t-\Delta t/2} + \Delta t \mathbf{a}^t \quad (4.6)$$

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \mathbf{u}^t + \Delta t \mathbf{v}^{t+\Delta t/2} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{x}^{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{u}^{t+\Delta t} \quad (4.8)$$

Step 5: 式 (4.4) から、運動エネルギー $K^{t+\Delta t/2}$ を計算する。

Step 6: 運動エネルギーに関する不等式

$$K^{t-\Delta t/2} \geq K^{t+\Delta t/2} \quad (4.9)$$

を満たせば、Step 7 へ。満たさなければ、時間を $t \leftarrow t + \Delta t$ と更新して、Step 2 へ戻る。

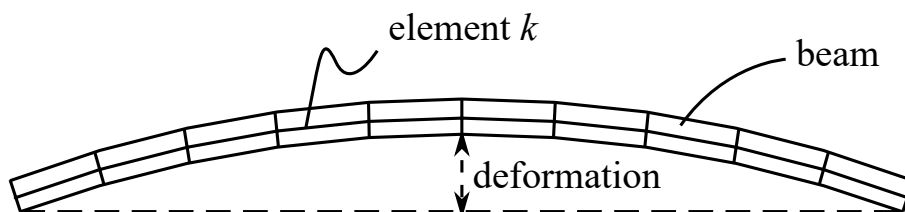


図 4.1: 大変形微小ひずみの仮定に基づく梁の形状.

Step 7: 残差力ベクトル $\mathbf{R}^{t+\Delta t}$ に関する収束条件を満たしたとき、アルゴリズムを終了させる。満たさなければ、速度ベクトルを $\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} = \mathbf{0}$ でリセットして、時間増分を $\Delta t \leftarrow \xi \Delta t$ として更新し、時刻を $t \leftarrow t + \Delta t$ として更新してから Step 2 へ戻る。 ξ は時間増分 Δt を細分化するパラメータである。 Δt はアルゴリズムの初期において計算負荷を低減するために大きめの値を与えておき、変形が静的釣合い解に収束するにつれて減少させていくことで解の精度を向上させる。

4.3 3次元弾性梁モデルの定式化

DRM による大変形解析への適用を目的とした、3次元弾性梁要素に対する幾何学的非線形性を考慮した全ポテンシャル・エネルギーの定式化の方法について説明する。グリッドシェルの梁は、図 4.1 に示すように、複数の要素に分割する。また、節点の並進変位は大きく、かつ各要素における局所的な軸ひずみと曲げひずみを微小とする、大変形微小ひずみの仮定を用いる。

4.3.1 局所軸ベクトルと節点の回転変位

3次元オイラー・ベルヌーイ梁要素は一般に、独立な変数として3方向の並進変位および3軸まわりの回転変位を有する2節点で構成される。局所軸ベクトルは通常、節点の回転変形の大きさを表現するために用いられる [34-37,135,136]。提案手法では、回転変位を、節点における単位法線ベクトルから導出する。なお、回転変位は、剛体変位を除いた局所的な量である。図 4.2 に示すように、単位法線ベクトルは、曲線状に変形した交差する2本の梁に対して垂直である。各節点における単位法線ベクトルの2つの初期平面への投影成分を、梁のねじれと曲げの1成分の計算に用いる。梁の曲げに関する残りの1成分を、単位法線ベクトルの軸まわりの回転から求める。

図 4.3(a) は、節点 j と $j+1$ を結ぶ要素 k である。節点 j から $j+1$ へ向かう局所軸は $\hat{\mathbf{t}}_{1,k}$ で表す。節点 j における曲面の位置ベクトルと単位法線ベクトルはそれぞれ、 $\mathbf{X}_j, \hat{\mathbf{n}}_j$ とする。以下では、 $(\hat{\cdot})$ で表す記号を単位ベクトルの意味で使用する。節点 j と $j+1$ の単位法線ベクトルの平均として定義される、要

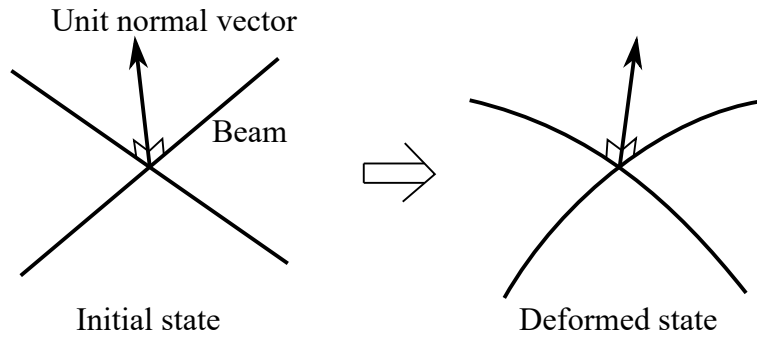


図 4.2: 梁部材からなる格子から生成される変形後の単位法線ベクトル.

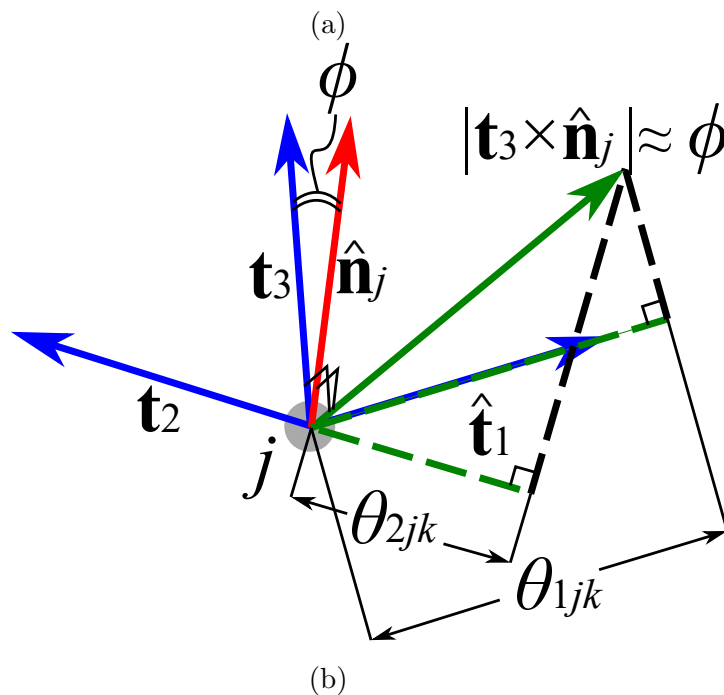
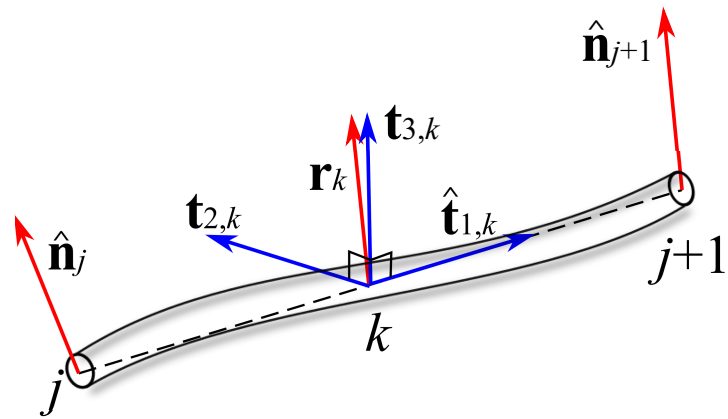


図 4.3: 局所軸ベクトルと、節点 j と $j+1$ を結ぶ要素 k の回転変位の定義; (a) 要素 k の局所軸ベクトル $\hat{\mathbf{t}}_{1,k}, \hat{\mathbf{t}}_{2,k}, \hat{\mathbf{t}}_{3,k}$, (b) 節点 j における単位法線ベクトルの幾何学的関係から導かれる回転変位 $\theta_{1jk}, \theta_{2jk}$.

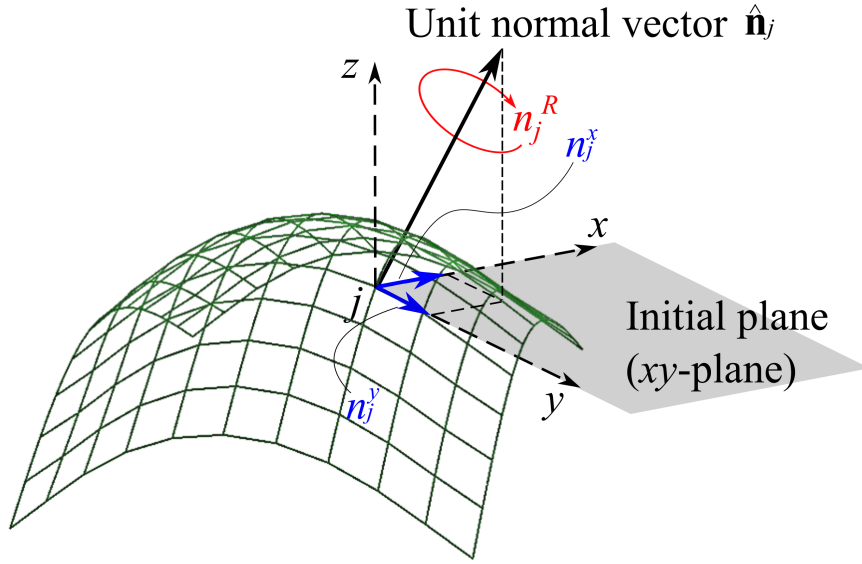


図 4.4: \hat{n}_j の投影成分.

素 k の単位ベクトル \hat{r}_k を用いると, 局所軸ベクトル $\hat{t}_{1,k}$, $\hat{t}_{2,k}$, $\hat{t}_{3,k}$ は以下のように定式化できる.

$$\hat{t}_{1,k} = \frac{\mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_j}{\|\mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_j\|} \quad (4.10)$$

$$\hat{t}_{2,k} = \frac{\hat{r}_k \times \hat{t}_{1,k}}{\|\hat{r}_k \times \hat{t}_{1,k}\|} \quad (4.11)$$

$$\hat{t}_{3,k} = \frac{\hat{t}_{1,k} \times \hat{t}_{2,k}}{\|\hat{t}_{1,k} \times \hat{t}_{2,k}\|} \quad (4.12)$$

$$\hat{r}_k = \frac{\hat{n}_j + \hat{n}_{j+1}}{\|\hat{n}_j + \hat{n}_{j+1}\|} \quad (4.13)$$

図 4.3(b) に示すように, 要素 k の節点 j における局所軸ベクトル $\hat{t}_{1,k}$ および $\hat{t}_{2,k}$ まわりの回転変位をそれぞれ, θ_{1jk} と θ_{2jk} とする. $\hat{t}_{3,k}$ と \hat{n}_j の大きさはともに 1 であることから, 外積 $\hat{t}_{3,k} \times \hat{n}_j$ の大きさは, 節点 j における, \hat{n}_j に垂直な平面内の局所回転角 ϕ としてみなせる. したがって, $\hat{t}_{1,k}$, $\hat{t}_{2,k}$ まわりの回転変位は次式で求められる [135].

$$\theta_{1jk} = \hat{t}_{1,k} \cdot (\hat{t}_{3,k} \times \hat{n}_j) \quad (4.14)$$

$$\theta_{2jk} = \hat{t}_{2,k} \cdot (\hat{t}_{3,k} \times \hat{n}_j) \quad (4.15)$$

グリッドシェルは, 初期状態では全体座標系 (x, y, z) における xy 平面に存在する. 図 4.4 は, $\hat{n}_j = [n_j^x, n_j^y, n_j^z]^T$ の xy 平面への投影 2 成分 n_j^x , n_j^y を表す. xy 平面上の初期格子状平板に対して, \hat{n}_j の成分は $[0, 0, 1]^T$ である. 4.6 節の DRM の数値例題では, n_j^x , n_j^y の範囲には制約を与えないが, n_j^z は全ての

節点で正となる制約を与える。このようにして、変形状態における $\hat{\mathbf{n}}_j$ の成分は次のように計算される。

$$\hat{\mathbf{n}}_j = \begin{cases} \left[\frac{n_j^x}{\sqrt{n_j^{x^2} + n_j^{y^2}}}, \frac{n_j^y}{\sqrt{n_j^{x^2} + n_j^{y^2}}}, 0 \right]^T & \text{for } n_j^{x^2} + n_j^{y^2} > 1 \\ \left[n_j^x, n_j^y, \sqrt{1 - (n_j^{x^2} + n_j^{y^2})} \right]^T & \text{for } n_j^{x^2} + n_j^{y^2} \leq 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

n_j^R を $\hat{\mathbf{n}}_j$ まわりの回転変位とすると、 $\theta_{3jk} = n_j^R$ が残りの独立変数、すなわち回転変位の第3成分として定義される。

4.3.2 要素間の接合部における回転の連続性

図 4.5(a) に示すように、複数の梁要素が節点 j に剛接合するとき、節点 j における単位法線ベクトルまわりの回転変位は一つだけ独立変数として選ばれる。ここで、要素 k の回転変位 n_j^R を独立変数として選び、要素 k と $k+1$ が節点 j に接続する場合について考える。 α を節点 j における要素 k と $k+1$ 間の角度の初期平面への投影成分とおく。従属変数 $\theta_{3j(k+1)}$ は、以下のアルゴリズムによって n_j^R から計算される。

Step 1: $\hat{\mathbf{t}}_{1,k}$ を $\hat{\mathbf{n}}_j$ に垂直な平面に投影し、そのベクトルを \mathbf{f}_1 とする。

Step 2: $\hat{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{f}_1 / \|\mathbf{f}_1\|$ として \mathbf{f}_1 を正規化する。

Step 3: $\hat{\mathbf{n}}_j$ まわりに角度 $n_j^R + \alpha$ だけ $\hat{\mathbf{f}}_1$ を回転させて $\hat{\mathbf{f}}_2$ を求める。

Step 4: 外積 $\mathbf{f}_3 = \hat{\mathbf{t}}_{1,k+1} \times \hat{\mathbf{f}}_2$ を計算し、 $\hat{\mathbf{n}}_j$ の方向に対する \mathbf{f}_3 の投影成分として $\theta_{3j(k+1)}$ を得る。

アルゴリズムの詳細を以下に記す。

まず、図 4.5(a) のように、節点 j における接平面に対する局所軸ベクトル $\hat{\mathbf{t}}_{1,k}$ の投影として \mathbf{f}_1 を定義する。

$$\mathbf{f}_1 = \hat{\mathbf{t}}_{1,k} - (\hat{\mathbf{t}}_{1,k} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j) \hat{\mathbf{n}}_j \quad (4.17)$$

次に、 $\hat{\mathbf{n}}_j$ まわりに正規化ベクトル $\hat{\mathbf{f}}_1 = \mathbf{f}_1 / \|\mathbf{f}_1\|$ を回転させる。Step 3 では、角度 $n_j^R + \alpha$ は、要素 k の変形から得られる節点回転変位 $n_j^R = \theta_{3jk}$ と要素間の初期状態の角度 α の和を表している。すなわち、節点 j における要素 k の軸方向は、角度 θ_{3jk} による回転で決定し、要素 $k+1$ の軸方向は角度 α だけ追加で回転させた方向として定まる。図 4.5(b) におけるベクトル $\hat{\mathbf{f}}_2$ は、節点 j における要素 $k+1$ の変形形状の接平面への投影曲線の接線方向を表す。このようにして、 $\hat{\mathbf{f}}_2$ は、 $\hat{\mathbf{n}}_j$ まわりに $\hat{\mathbf{f}}_1$ を回転させることで得られる。この過程は以下のように定式化できる。

$$\hat{\mathbf{f}}_2 = \hat{\mathbf{f}}_1 \cos(n_j^R + \alpha) + (\hat{\mathbf{n}}_j \times \hat{\mathbf{f}}_1) \sin(n_j^R + \alpha) \quad (4.18)$$

Step 4 の過程を図 4.5(c) に示す。 $\hat{\mathbf{n}}_j$ に投影された外積 $\mathbf{f}_3 = \hat{\mathbf{t}}_{1,k+1} \times \hat{\mathbf{f}}_2$ は、節点 j における要素 $k+1$ の $\hat{\mathbf{n}}_j$ まわりの回転角 $\theta_{3j(k+1)}$ に相当し、次式が成立する。

$$\theta_{3j(k+1)} = \mathbf{f}_3 \cdot \hat{\mathbf{n}}_j \quad (4.19)$$

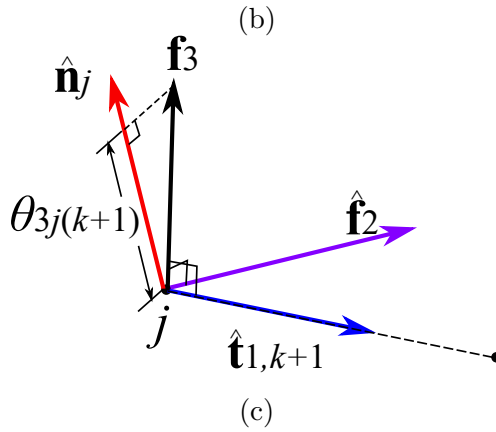
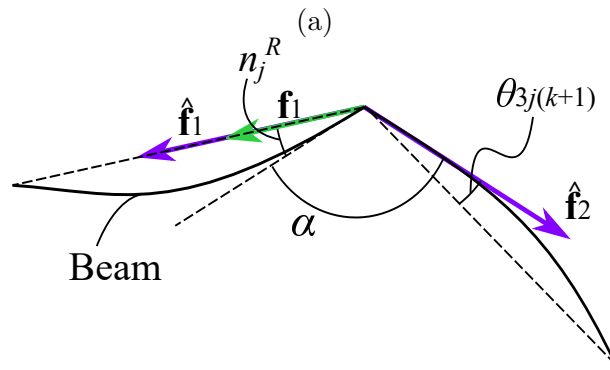
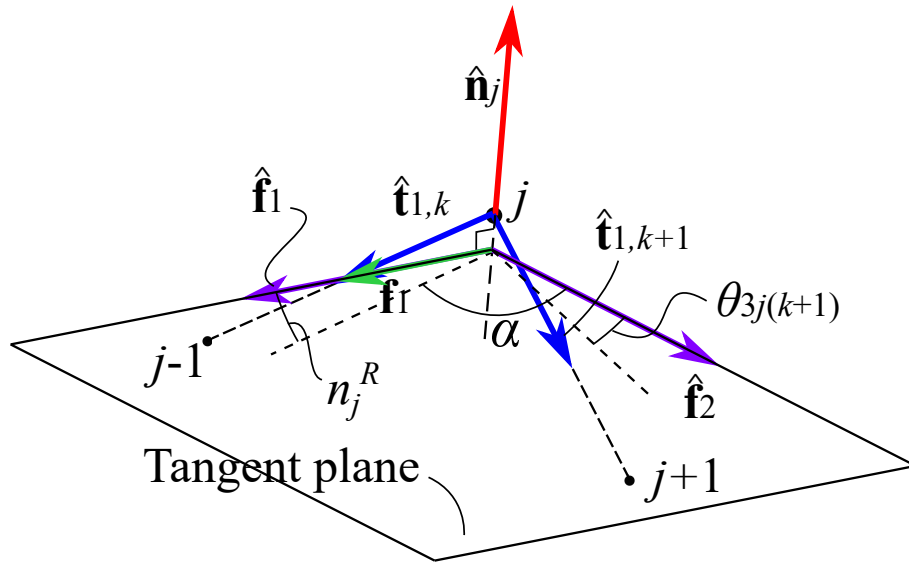


図 4.5: 節点 j における単位法線ベクトルまわりの従属な回転変位の連続性; (a) Step 1-3 (アイソメトリック), (b) Step 1-3 (接平面), (c) Step 4.

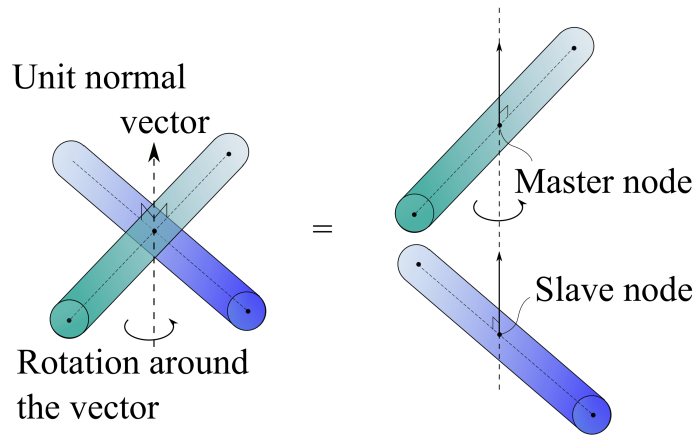


図 4.6: 単位法線ベクトルを利用した 2 節点間のヒンジ接合のモデル化.

4.3.3 剛な支持条件とヒンジ接合のモデル化

固定支持における回転境界条件の実装について説明する. いま, 固定支持 j と自由節点 $j + 1$ を結ぶ要素 k を考える. 部材軸方向に平行な局所軸ベクトルを, 変形前の状態について $\hat{\mathbf{t}}_{1,k}^*$ と表し, 変形後の状態について $\hat{\mathbf{t}}_{1,k}$ と表す. これらのベクトルについて外積を計算する.

$$\mathbf{g}_1 = \hat{\mathbf{t}}_{1,k} \times \hat{\mathbf{t}}_{1,k}^* \quad (4.20)$$

外積 \mathbf{g}_1 は節点 j における局所的な回転変位のベクトルを表現している. 最終的に, 単位法線ベクトル $\hat{\mathbf{n}}_j$ まわりの部材 k の回転変位は次のように計算される.

$$\theta_{3jk} = \mathbf{g}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_j \quad (4.21)$$

固定節点における回転変位 n_j^R は以下の制約を受ける.

$$n_j^R = \theta_{3jk} \quad (4.22)$$

グリッドシェル部材は一般に, 一軸回転のヒンジ接合で接続される. 2 本の対応する梁は, ヒンジ接合の軸を中心として, それぞれ独立に回転することができる. 図 4.6 に示すように, ヒンジ接合の軸は曲面の単位法線ベクトルと平行である. 提案モデルでは, ヒンジ接合の位置に重複して存在する 2 節点を, 主節点と従節点に分類する. 主節点には 6 自由度を与え, 従節点の並進変位と回転変位については, 曲面の単位法線ベクトルまわりの回転を除く全ての自由度を主節点と同一とする. これにより, 従節点の自由度は 1 となり, 3 方向の力とヒンジまわりの曲げを除く 2 軸まわりのモーメントは, ヒンジ接合によって伝達される.

4.3.4 全ポテンシャル・エネルギーの定式化

本節では, 全ポテンシャル・エネルギーの定式化を行う. 以下では, E と G をそれぞれ, 梁のヤング係数とせん断係数とし, 断面積を A , ねじれ定数を J とする.

簡単のため、ここでは、2軸に関して対称な断面の梁を考える。単位法線ベクトル \hat{n}_j は、節点に結合する各要素の断面主軸の1つと同一の向きを持つ。 $\hat{t}_{2,k}$ と $\hat{t}_{3,k}$ は、断面二次モーメントを I_{2k} と I_{3k} とした要素 k の2つの主軸に沿った方向とする。

節点荷重 \mathbf{P}_j を受ける節点 j の変形前後の位置をそれぞれ、 $(\bar{X}_j^x, \bar{X}_j^y, \bar{X}_j^z)^T$ と $(X_j^x, X_j^y, X_j^z)^T$ とする。節点 j の並進変位は、 $(U_j^x, U_j^y, U_j^z)^T = (X_j^x, X_j^y, X_j^z)^T - (\bar{X}_j^x, \bar{X}_j^y, \bar{X}_j^z)^T$ とする。要素 k の伸び e_k は、変形後の要素長 L_k と初期長 \bar{L}_k から計算できる。そのとき、 m 本の部材と s 個の自由節点をもつグリッドシェル全体の全ポテンシャル・エネルギー Π_{total} は、内力エネルギーと外力仕事から、以下のように定式化できる。

$$\Pi_{\text{total}} = \sum_{k=1}^m \Pi_{\text{int}}^k - \sum_{j=1}^s \Pi_{\text{ext}}^j \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}}^k &= \frac{EA}{2\bar{L}_k} e_k^2 + \frac{GJ}{2\bar{L}_k} (\theta_{1(j+1)k} - \theta_{1jk})^2 \\ &+ \frac{EI_{2k}}{2\bar{L}_k} \left[4(\theta_{2jk})^2 + 4\theta_{2jk}\theta_{2(j+1)k} + 4(\theta_{2(j+1)k})^2 \right] \\ &+ \frac{EI_{3k}}{2\bar{L}_k} \left[4(\theta_{3jk})^2 + 4\theta_{3jk}\theta_{3(j+1)k} + 4(\theta_{3(j+1)k})^2 \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\Pi_{\text{ext}}^j = \mathbf{P}_j \cdot \begin{bmatrix} X_j^x - \bar{X}_j^x \\ X_j^y - \bar{X}_j^y \\ X_j^z - \bar{X}_j^z \end{bmatrix} = \mathbf{P}_j \cdot \begin{bmatrix} U_j^x \\ U_j^y \\ U_j^z \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

ここで、 Π_{int}^k は節点 j と $j+1$ を結ぶ要素 k の内部ひずみエネルギーであり、 Π_{ext}^j は節点 j における外力仕事である。式 (4.23), (4.24) の内部ひずみエネルギー式は、部材端の局所回転に対応する微小ひずみに基づいている [135]。さらに、曲げひずみエネルギーの項は、曲げ剛性行列を用いた、部材端の曲げモーメント B_1, B_2 に関する以下の表現より導かれる。

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \frac{EI_{ik}}{\bar{L}_k} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{ijk} \\ \theta_{i(j+1)k} \end{bmatrix}, \quad i = \{2, 3\} \quad (4.26)$$

4.4 残差力の定式化

残差力は、内力と外力の差分として式 (4.2) で定義される。 b_i はベクトル \mathbf{b} の第 i 成分とする。 i 番目の自由度に対応する残差力は、内部ひずみエネルギーと外力仕事を変位ベクトル \mathbf{u} の第 i 成分 u_i について微分することで次のように得られる。

$$\begin{aligned} R_i^t &= -r_i^t + p_i \\ &= -\sum_{k=1}^m \frac{\partial \Pi_{\text{int}}^k}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \Pi_{\text{ext}}^j}{\partial u_i} \end{aligned} \quad (4.27)$$

さらに、数値例題では、最適化問題を解いて釣合い形状を探索するために感度解析を用いている。それゆえ、次に、独立変数に関する内部ひずみエネルギーと外力仕事の微分係数を導出する。

独立変数 $U_j^x, U_j^y, U_j^z, n_j^x, n_j^y, n_j^R$ を代表する一般化変位 u_i について式 (4.24), (4.25) の偏微分を計算

して、以下の偏微分係数を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{\text{int}}^k}{\partial u_i} &= \frac{EA}{\bar{L}_k} e_k \frac{\partial e_k}{\partial u_i} + \frac{GJ}{\bar{L}_k} (\theta_{1(j+1)k} - \theta_{1jk}) \frac{\partial (\theta_{1(j+1)k} - \theta_{1jk})}{\partial u_i} \\ &+ \frac{2EI_{2k}}{\bar{L}_k} \left(\frac{2\partial\theta_{2jk}}{\partial u_i} \theta_{2jk} + \frac{\partial\theta_{2(j+1)k}}{\partial u_i} \theta_{2jk} + \frac{\partial\theta_{2jk}}{\partial u_i} \theta_{2(j+1)k} + \frac{2\partial\theta_{2(j+1)k}}{\partial u_i} \theta_{2(j+1)k} \right) \\ &+ \frac{2EI_{3k}}{\bar{L}_k} \left(\frac{2\partial\theta_{3jk}}{\partial u_i} \theta_{3jk} + \frac{\partial\theta_{3(j+1)k}}{\partial u_i} \theta_{3jk} + \frac{\partial\theta_{3jk}}{\partial u_i} \theta_{3(j+1)k} + \frac{2\partial\theta_{3(j+1)k}}{\partial u_i} \theta_{3(j+1)k} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \Pi_{\text{ext}}^j}{\partial u_i} = \mathbf{P}_j \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial U_j^x}{\partial u_i} \\ \frac{\partial U_j^y}{\partial u_i} \\ \frac{\partial U_j^z}{\partial u_i} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

軸方向変形の感度係数は、変形後の要素長の感度に等しい.

$$\frac{\partial e_k}{\partial u_i} = \frac{\partial (L_k - \bar{L}_k)}{\partial u_i} = \frac{\partial L_k}{\partial u_i} \quad (4.30)$$

さらに、これは次のように書ける.

$$\frac{\partial L_k}{\partial u_i} = \frac{1}{L_k} [X_{j+1}^x - X_j^x, X_{j+1}^y - X_j^y, X_{j+1}^z - X_j^z] \begin{bmatrix} \frac{\partial (U_{j+1}^x - U_j^x)}{\partial u_i} \\ \frac{\partial (U_{j+1}^y - U_j^y)}{\partial u_i} \\ \frac{\partial (U_{j+1}^z - U_j^z)}{\partial u_i} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

u_i について式 (4.14), (4.15) を偏微分して回転変位の感度係数を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{1jk}}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i} [\hat{\mathbf{t}}_{1,k} \cdot (\hat{\mathbf{t}}_{3,k} \times \hat{\mathbf{n}}_j)] \\ &= \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{1,k}}{\partial u_i} \cdot (\hat{\mathbf{t}}_{3,k} \times \hat{\mathbf{n}}_j) + \hat{\mathbf{t}}_{1,k} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{3,k}}{\partial u_i} \times \hat{\mathbf{n}}_j + \hat{\mathbf{t}}_{3,k} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_j}{\partial u_i} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{2jk}}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i} [\hat{\mathbf{t}}_{2,k} \cdot (\hat{\mathbf{t}}_{3,k} \times \hat{\mathbf{n}}_j)] \\ &= \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{2,k}}{\partial u_i} \cdot (\hat{\mathbf{t}}_{3,k} \times \hat{\mathbf{n}}_j) + \hat{\mathbf{t}}_{2,k} \cdot \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{3,k}}{\partial u_i} \times \hat{\mathbf{n}}_j + \hat{\mathbf{t}}_{3,k} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_j}{\partial u_i} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$\hat{\mathbf{n}}_j$ の感度係数は式 (4.16) から次のように求められる.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_j}{\partial u_i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{\partial n_j^x}{\partial u_i} \frac{1}{\sqrt{n_j^{x2} + n_j^{y2}}} - \frac{n_j^x}{(n_j^{x2} + n_j^{y2})^{3/2}} \left(\frac{\partial n_j^x}{\partial u_i} n_j^x + \frac{\partial n_j^y}{\partial u_i} n_j^y \right) \\ \frac{\partial n_j^y}{\partial u_i} \frac{1}{\sqrt{n_j^{x2} + n_j^{y2}}} - \frac{n_j^y}{(n_j^{x2} + n_j^{y2})^{3/2}} \left(\frac{\partial n_j^x}{\partial u_i} n_j^x + \frac{\partial n_j^y}{\partial u_i} n_j^y \right) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{for } n_j^{x2} + n_j^{y2} > 1 \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial n_j^x}{\partial u_i} \\ \frac{\partial n_j^y}{\partial u_i} \\ -\frac{\frac{\partial n_j^x}{\partial u_i} n_j^x + \frac{\partial n_j^y}{\partial u_i} n_j^y}{\sqrt{1 - (n_j^{x2} + n_j^{y2})}} \end{bmatrix} & \text{for } n_j^{x2} + n_j^{y2} \leq 1 \end{cases} \quad (4.34)$$

$\hat{\mathbf{t}}_{1,k}, \hat{\mathbf{t}}_{2,k}, \hat{\mathbf{t}}_{3,k}$ の感度係数は $L_k = \|\mathbf{X}_{j+1} - \mathbf{X}_j\|$ を用いて次のように表される.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{1,k}}{\partial u_i} = -\frac{1}{L_k^2} \frac{\partial L_k}{\partial u_i} \begin{bmatrix} X_{j+1}^x - X_j^x \\ X_{j+1}^y - X_j^y \\ X_{j+1}^z - X_j^z \end{bmatrix} + \frac{1}{L_k} \begin{bmatrix} \frac{\partial(U_{j+1}^x - U_j^x)}{\partial u_i} \\ \frac{\partial(U_{j+1}^y - U_j^y)}{\partial u_i} \\ \frac{\partial(U_{j+1}^z - U_j^z)}{\partial u_i} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{2,k}}{\partial u_i} = -\frac{\hat{\mathbf{r}}_k \times \hat{\mathbf{t}}_{1,k}}{\|\hat{\mathbf{r}}_k \times \hat{\mathbf{t}}_{1,k}\|^2} \frac{\partial \|\hat{\mathbf{r}}_k \times \hat{\mathbf{t}}_{1,k}\|}{\partial u_i} + \frac{1}{\|\hat{\mathbf{r}}_k \times \hat{\mathbf{t}}_{1,k}\|} \frac{\partial (\hat{\mathbf{r}}_k \times \hat{\mathbf{t}}_{1,k})}{\partial u_i} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{3,k}}{\partial u_i} = -\frac{\hat{\mathbf{t}}_{1,k} \times \hat{\mathbf{t}}_{2,k}}{\|\hat{\mathbf{t}}_{1,k} \times \hat{\mathbf{t}}_{2,k}\|^2} \frac{\partial \|\hat{\mathbf{t}}_{1,k} \times \hat{\mathbf{t}}_{2,k}\|}{\partial u_i} + \frac{1}{\|\hat{\mathbf{t}}_{1,k} \times \hat{\mathbf{t}}_{2,k}\|} \frac{\partial (\hat{\mathbf{t}}_{1,k} \times \hat{\mathbf{t}}_{2,k})}{\partial u_i} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_k}{\partial u_i} = -\frac{\hat{\mathbf{n}}_j + \hat{\mathbf{n}}_{j+1}}{\|\hat{\mathbf{n}}_j + \hat{\mathbf{n}}_{j+1}\|^2} \frac{\partial \|\hat{\mathbf{n}}_j + \hat{\mathbf{n}}_{j+1}\|}{\partial u_i} + \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}_j + \hat{\mathbf{n}}_{j+1}\|} \frac{\partial (\hat{\mathbf{n}}_j + \hat{\mathbf{n}}_{j+1})}{\partial u_i} \quad (4.38)$$

$\hat{\mathbf{t}}_{1,k}, \hat{\mathbf{t}}_{2,k}$ まわりの独立な回転変位の感度係数はそれぞれ, 式 (4.32) と (4.33) に式 (4.34)–(4.38) を代入することで導かれる.

回転変位は独立変数と従属変数に分類される. いま, 節点 j に要素 k と $k+1$ が接続する場合を考える. 以下の式では, 要素 k に関する節点回転角 n_j^R は独立変数であり, 要素 $k+1$ に関する節点回転角 $\theta_{3j(k+1)}$ は従属変数である. 独立変数 $\theta_{3j(k+1)}$ の感度係数は, 要素 k と要素 $k+1$ の回転変位 n_j^R と初期角度 α を用いて, 式 (4.17)–(4.19) の偏微分により, 以下のように計算できる.

$$\frac{\partial \theta_{3j(k+1)}}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial u_i} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j + \mathbf{f}_3 \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_j}{\partial u_i}, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial u_i} = \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{1,k+1}}{\partial u_i} \times \hat{\mathbf{f}}_2 + \hat{\mathbf{t}}_{1,k+1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_2}{\partial u_i} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_2}{\partial u_i} &= \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_1}{\partial u_i} \cos(n_j^R + \alpha) + \hat{\mathbf{f}}_1 \left(-\sin(n_j^R + \alpha) \frac{\partial n_j^R}{\partial u_i} \right) \\ &+ \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_j}{\partial u_i} \times \hat{\mathbf{f}}_1 + \hat{\mathbf{n}}_j \times \frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_1}{\partial u_i} \right) \sin(n_j^R + \alpha) + (\hat{\mathbf{n}}_j \times \hat{\mathbf{f}}_1) \cos(n_j^R + \alpha) \frac{\partial n_j^R}{\partial u_i} \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{f}}_1}{\partial u_i} = -\frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|^2} \frac{\partial \|\mathbf{f}_1\|}{\partial u_i} + \frac{1}{\|\mathbf{f}_1\|} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u_i} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u_i} = \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{1,k}}{\partial u_i} - \left[\left(\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{1,k}}{\partial u_i} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j + \hat{\mathbf{t}}_{1,k} \cdot \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_j}{\partial u_i} \right) \hat{\mathbf{n}}_j + (\hat{\mathbf{t}}_{1,k} \cdot \hat{\mathbf{n}}_j) \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_j}{\partial u_i} \right] \quad (4.43)$$

節点 j を剛な支点とした場合, 単位法線ベクトルまわりの回転変位の感度係数は次のように計算できる.

$$\frac{\partial \theta_{3jk}}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial u_i} \hat{\mathbf{n}}_j + \mathbf{g}_1 \frac{\partial \hat{\mathbf{n}}_j}{\partial u_i} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial u_i} = \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{1,k}}{\partial u_i} \times \hat{\mathbf{t}}_{1,k}^* + \hat{\mathbf{t}}_{1,k} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}_{1,k}^*}{\partial u_i} \quad (4.45)$$

4.5 人工質量，人工慣性モーメント，人工減衰の設定

DRM では，人工質量および人工慣性モーメントを与え，式 (4.1) を用いて動的な応答を計算する．一般化剛性 S_k は，並進に対しては EA/L_k とし，回転に対しては EI/L_k^3 として定義される．節点 j に対して， $q (\geq 1)$ 本の要素が接続しているとする．節点 j における人工質量および人工慣性モーメントを計算するために，Lefevre [28] が提案した手法を用いる．これは，重み係数 γ を用いて以下のように定式化される．

$$M_j = \gamma \Delta t_{\text{ini}}^2 \sum_{k=1}^q 2^n S_k \quad (4.46)$$

ここで， n はパラメータであり， S_k が並進に関する剛性を表す場合は $n = 1$ となり，回転に関する剛性を表す場合は $n = 3$ となる．

要素長が小さくなる場合は，人工質量および人工慣性モーメントは大きくなり，DRM の収束性は悪化する．つまり，短い要素があれば，計算終了までに多くの反復を要することになる．それゆえ，陽的解法の時間増分を決定するための Courant-Friedrichs-Lewy 条件を満足する人工質量，人工慣性モーメントの適切な値に対応する重み係数 γ の値を探索する必要がある．節点 j の人工質量，人工慣性モーメント，および節点 j に接続する要素の一般化剛性 S_k の和を用いて，Courant-Friedrichs-Lewy 条件は次のように定式化できる．

$$\frac{\Delta t_{\text{ini}}^2 \sum_{k=1}^q S_k}{M_j} < 2 \quad (4.47)$$

DRM は，一般的な振動問題と同様に，減衰がなければ静的釣合い状態に到達できない．したがって，DRM では通常，人工減衰が与えられる．人工減衰には，粘性減衰と運動減衰の 2 種類がある [1]．前者は，粘性減衰行列を利用して速度ベクトルを直接的に減少させるために用いられる [140]．本研究では後者を用いる．運動減衰は，DRM アルゴリズムの Step 6 で述べたように，運動エネルギーが局所的なピークに達した後にその値を 0 にリセットする減衰方法である．運動減衰を用いる場合，減衰行列は存在せず，加速度ベクトルが式 (4.5) から求められる．また，速度ベクトルも次のようにリセットされる．

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} = \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}^t \quad (4.48)$$

4.6 グリッドシェルの大変形解析

本章で提案した DRM を，グリッドシェルの形状生成に対する大変形解析に適用する．残差力は全ポテンシャル・エネルギー Π_{total} を最小化することを目的とした最適化問題の微分情報としても使用し，無制約最適化問題の解法には SNOPT Ver.7 [141] のライブラリ内の準ニュートン法を適用する．DRM アルゴリズムにおいて，運動エネルギーのピーク後の時間増分 Δt を $0.9969\Delta t$ として更新する．収束基準を満たすために必要なステップ数が最小となるよう，予備的な解析を行って $\xi = 0.9969$ という値を選択している．式 (4.46) の重み係数 γ は 0.8 とする．くわえて，Abaqus Ver. 2018 [15] を用いた FEM を，提

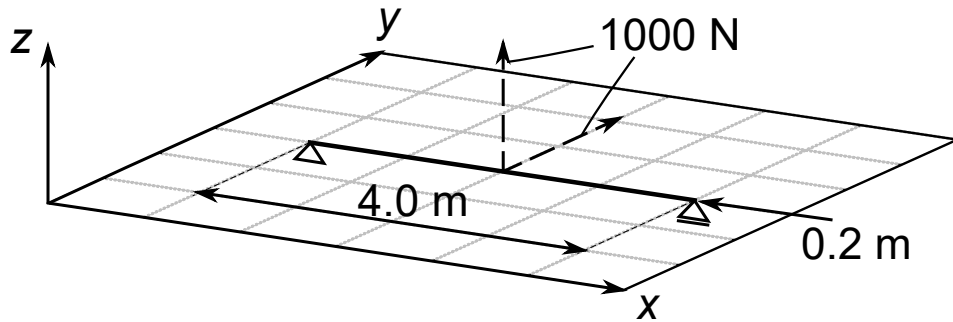


図 4.7: 単純梁モデルの初期形状と境界条件（実線矢印：強制変位方向，点線矢印： y の正方向と z の正方向への集中荷重）。

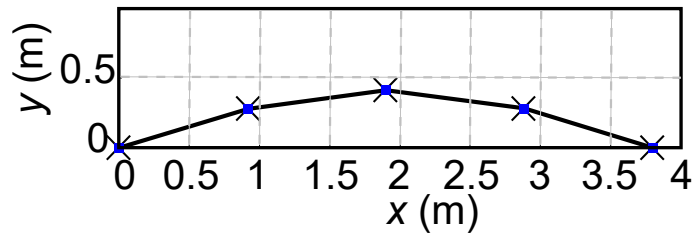
案手法によって得られる形状の検証のために実行する。FEM の実行には，2.5 節で説明した準静的増分解析を適用する。FEM の最大時間増分は 5.0×10^{-4} とする。

以下の例題では，ヤング係数 200 GPa とポアソン比 0.3 の材料を用いる。梁は，直径 $d_d = 0.030$ m と厚み $d_t = 0.002$ m のパイプ断面とする。各梁要素の初期長を $l = 1.00$ m とする。これにより，各要素の細長比は $100.76 (= 4l / \sqrt{d_d^2 + (d_d - 2d_t)^2})$ となる。計算機には，2.6 節で用いたものと同じものを使用する。

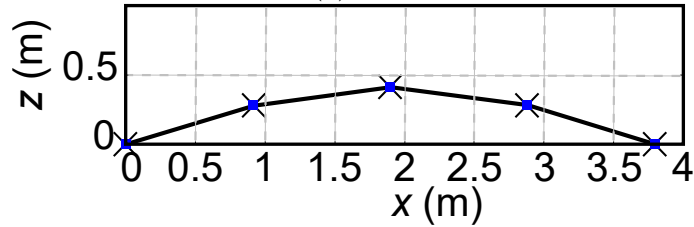
4.6.1 1 部材 4 要素の単純梁モデル

初期状態において無応力かつ真直な単純梁を x 軸に沿って配置する。この梁モデルを 5 節点 4 要素で構成し，一端はピン支点，残りの一端は x 方向に並進変位可能なローラー支点とする。また，FEM では x 軸まわりの回転を両端の支点で拘束する。最適化問題では， $U_j^x, U_j^y, U_j^z, n_j^x, n_j^y, n_j^R$ などの変数の範囲を $[-1.0, 1.0]$ としている。

本例題では，ローラー支点に対して， x 方向に沿って 0.20 m の強制変位を作用させて曲線形状を生成し，部材の中央の節点に対して， y 方向および z 方向に 1000 N の外力を作用させる。図 4.7 は，単純梁モデルの初期形状と境界条件を示している。図 4.8(a), (b) はそれぞれ， xy 平面および xz 平面への単純梁の釣合い形状の投影図である。図 4.8 より，DRM，最適化，FEM の結果は良好に近似できることがわかる。DRM と最適化から得られた全ポテンシャル・エネルギーの値はそれぞれ -367.933 Nm, -367.931 Nm であり，概ね一致する。DRM と最適化の全ステップ数はそれぞれ，1720 と 860 であった。DRM と最適化の両者の各ステップでは，4.4 節で示した感度計算を行う。しかし，最適化では全ポテンシャル・エネルギーのヘッセ行列の近似計算を行うため，DRM に比べてより多くの計算負荷を要する。

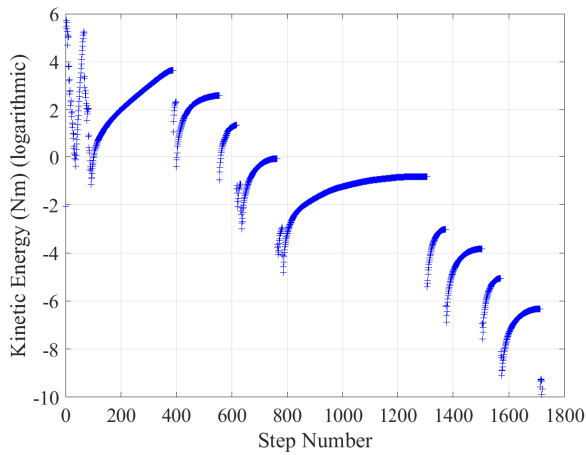


(a)

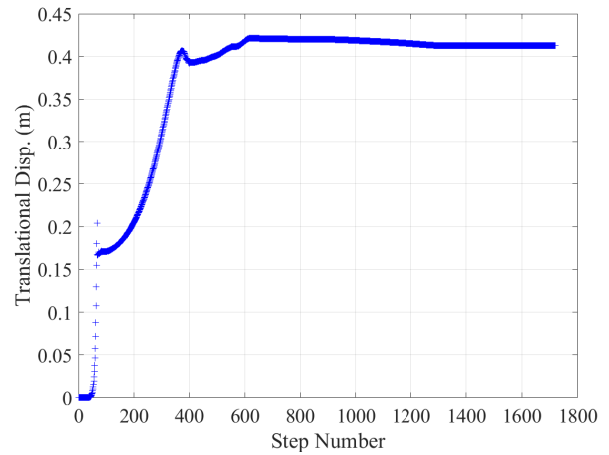


(b)

図 4.8: 単純梁モデルの釣合い形状; (a) xy 平面, (b) xz 平面 (×: FEM, 実線: DRM, ■: 最適化).



(a)



(b)

図 4.9: 全節点の運動エネルギーの総和と部材中央の節点の z 方向への並進変位の推移履歴; (a) 運動エネルギー, (b) 並進変位.

図 4.9(a), (b) はそれぞれ, DRM の結果として得られた, 全節点の運動エネルギーの総和の推移履歴, および部材の中央節点における z 方向変位の推移履歴を示している. 全ステップ数は 1720 と大きい, 全ステップ数の約半分のステップ数でおおよその近似解が得られている.

表 4.1 は, x, y, z 方向に対する節点座標について, DRM と FEM の結果の差を示したものであり, その最大値と平均値を掲載している. z 方向の差の最大値は, 5.265×10^{-4} m であり, モデルの全長と比較すると十分に小さな値であると判断できる.

表 4.1: 3つのモデルに対する DRM と FEM 間の全節点座標に関する差の最大値と平均値.

		x (m)	y (m)	z (m)
Simple beam model	Maximum	2.110×10^{-4}	4.013×10^{-4}	5.265×10^{-4}
	Average	8.441×10^{-5}	2.318×10^{-4}	2.208×10^{-4}
Short span gridshell	Maximum	2.567×10^{-3}	2.568×10^{-3}	2.141×10^{-3}
	Average	3.878×10^{-4}	3.878×10^{-4}	7.013×10^{-4}
Long span gridshell	Maximum	1.255×10^{-4}	1.255×10^{-4}	9.916×10^{-4}
	Average	3.644×10^{-5}	3.644×10^{-5}	2.974×10^{-4}

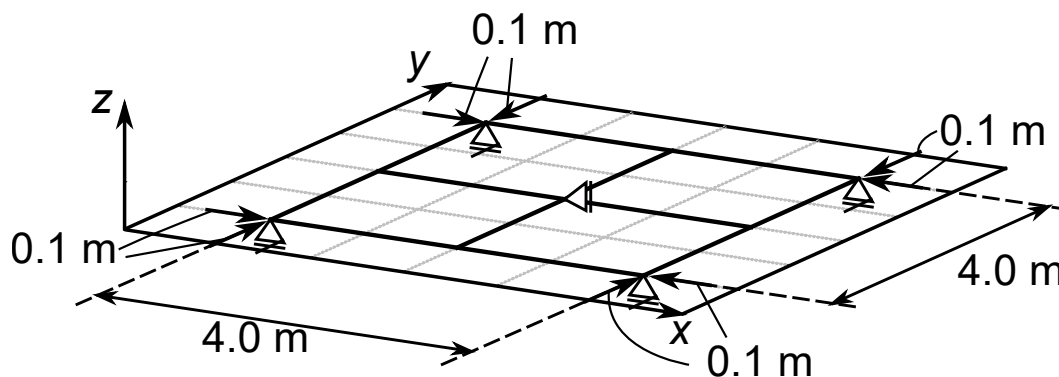
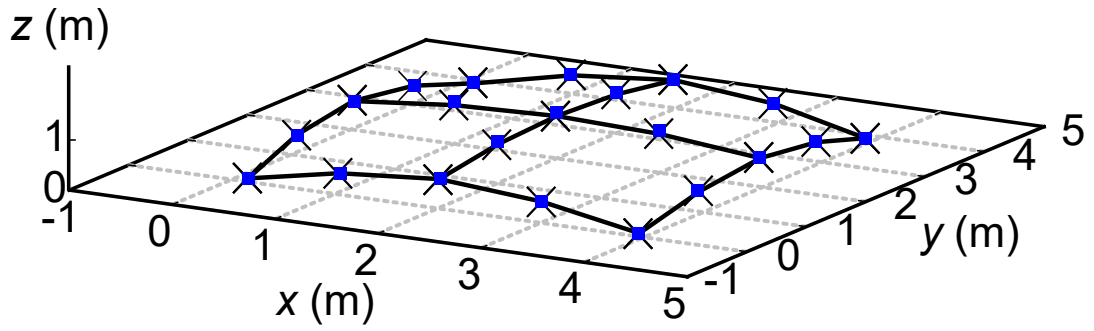


図 4.10: 小スパンのグリッドシェル・モデルの初期形状と境界条件 (4 隅の矢印: 強制変位).

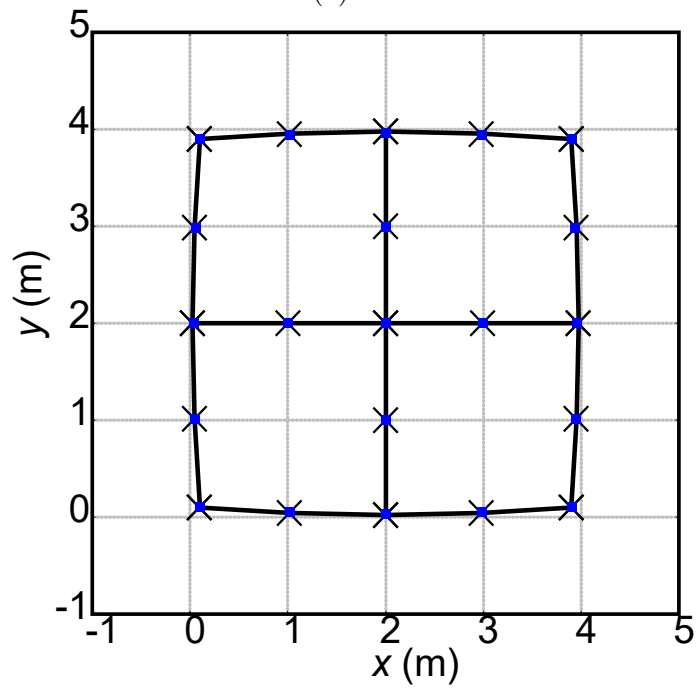
4.6.2 小スパンのグリッドシェル・モデル

4×4 (m) の正方形境界と中央で交差する 2 本の内部部材を有するグリッドシェルのモデルを考える。モデルは、4 要素で分割された 6 本の梁で構成される。 $(x, y, z) = (0, 0, 0), (4, 0, 0), (0, 4, 0), (4, 4, 0)$ に位置する節点を x, y の 2 方向に可動なローラー支点とし、 $(2, 2, 0)$ の中央節点を z 方向に可動なローラー支点とする。変形の対称性を確保するため、中央節点では 3 軸まわりの回転を拘束する。

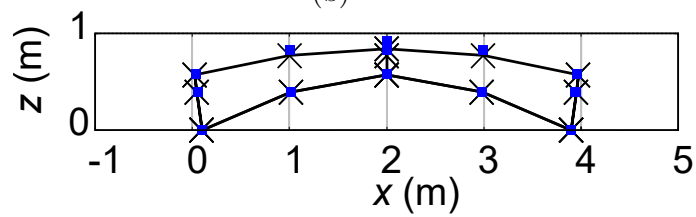
四隅の支点には、 $\sqrt{2}/10$ m の大きさの強制変位を $(2, 2, 0)$ の中央節点に向けて作用させる。図 4.10 は、小スパンのグリッドシェルの初期形状と境界条件を示している。図 4.11 に示すように、DRM, 最適化, FEM で得られたそれぞれのグリッドシェルの釣合い形状が概ね一致することが確認できる。DRM と最適化の結果として得られた全ポテンシャル・エネルギーの値はそれぞれ、2.214 kNm と 2.320 kNm である。DRM と最適化が要した全ステップ数はそれぞれ、3410 と 1845 であった。最適化手法において、変数 U_j^x, U_j^y, U_j^z の範囲は $[-1.5, 1.5]$ とし、変数 n_j^x, n_j^y, n_j^R の範囲は $[-1.0, 1.0]$ とする。表 4.1 は、 x, y, z 方向に対する節点座標について、DRM と FEM の結果を示したものであり、差の最大値と平均値を掲載している。 z 方向の差の最大値は、 2.568×10^{-3} m であり、本モデルの要素長の $1/300$ 以下に留まっており、実用において問題ないといえる。



(a)



(b)



(c)

図 4.11: 小スパンのグリッドシェル; (a) 釣合い形状, (b) xy 平面図, (c) xz 平面図 (\times : FEM, 実線: DRM, \blacksquare : 最適化).

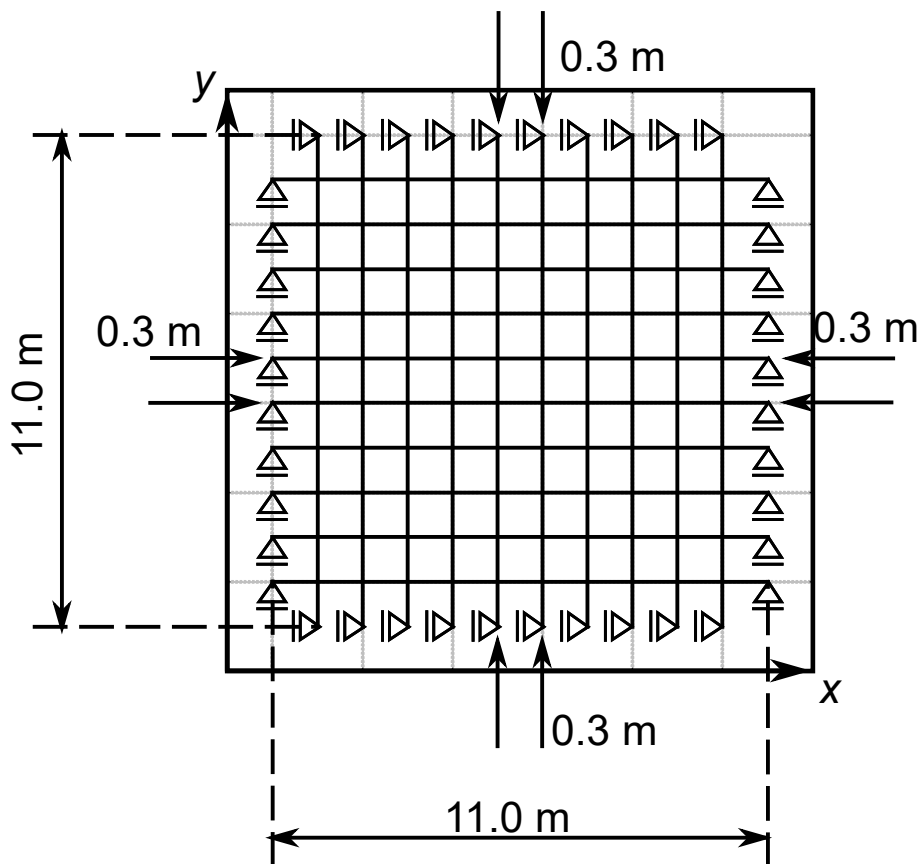


図 4.12: 大スパンのグリッドシェル初期形状と境界条件 (矢印: 強制変位).

4.6.3 大スパンのグリッドシェル・モデル

全長 11.00 m の部材 20 本で構成される大スパンのグリッドシェルを考える．部材の半数は x 方向に平行に配置し，残りの半数は y 方向に平行に配置する．全部材の両端は軸方向に沿って可動なローラー支点とする．最適化において，変数 U_j^x, U_j^y, U_j^z の範囲を $[-2.0, 2.0]$ とし，変数 n_j^x, n_j^y, n_j^R の範囲を $[-1.0, 1.0]$ とする．図 4.12 は，大スパンのグリッドシェルの初期形状と境界条件を示している．図内の矢印の位置の支点に 0.30 m の大きさの強制変位を作用させて，曲面を生成する．

図 4.13 に示すように，DRM，最適化，FEM で得られたそれぞれのグリッドシェルの釣合い形状は良好に近似できる．DRM と最適化の結果として得られた全ポテンシャル・エネルギーの値はそれぞれ，2.763 kNm と 3.870 kNm である．他の例題に比べて全ポテンシャル・エネルギーの差が大きい理由は，要素数が増加したことや，スパンが大きいこと等の問題の規模によるものと考えられる．DRM と最適化が要した全ステップ数はそれぞれ，8449 と 6375 であった．ステップ数の差が 4.6.1 節，4.6.2 節の例題の順に増加していることも，問題の規模が大きくなったことに起因する．表 4.1 は， x, y, z 方向に対する節点座標について，DRM と FEM の結果を示したものであり，差の最大値と平均値を掲載している． z 方向の差の最大値は， 9.916×10^{-4} m であり，モデルの全長と比較すると十分に小さな値であると判断できる．

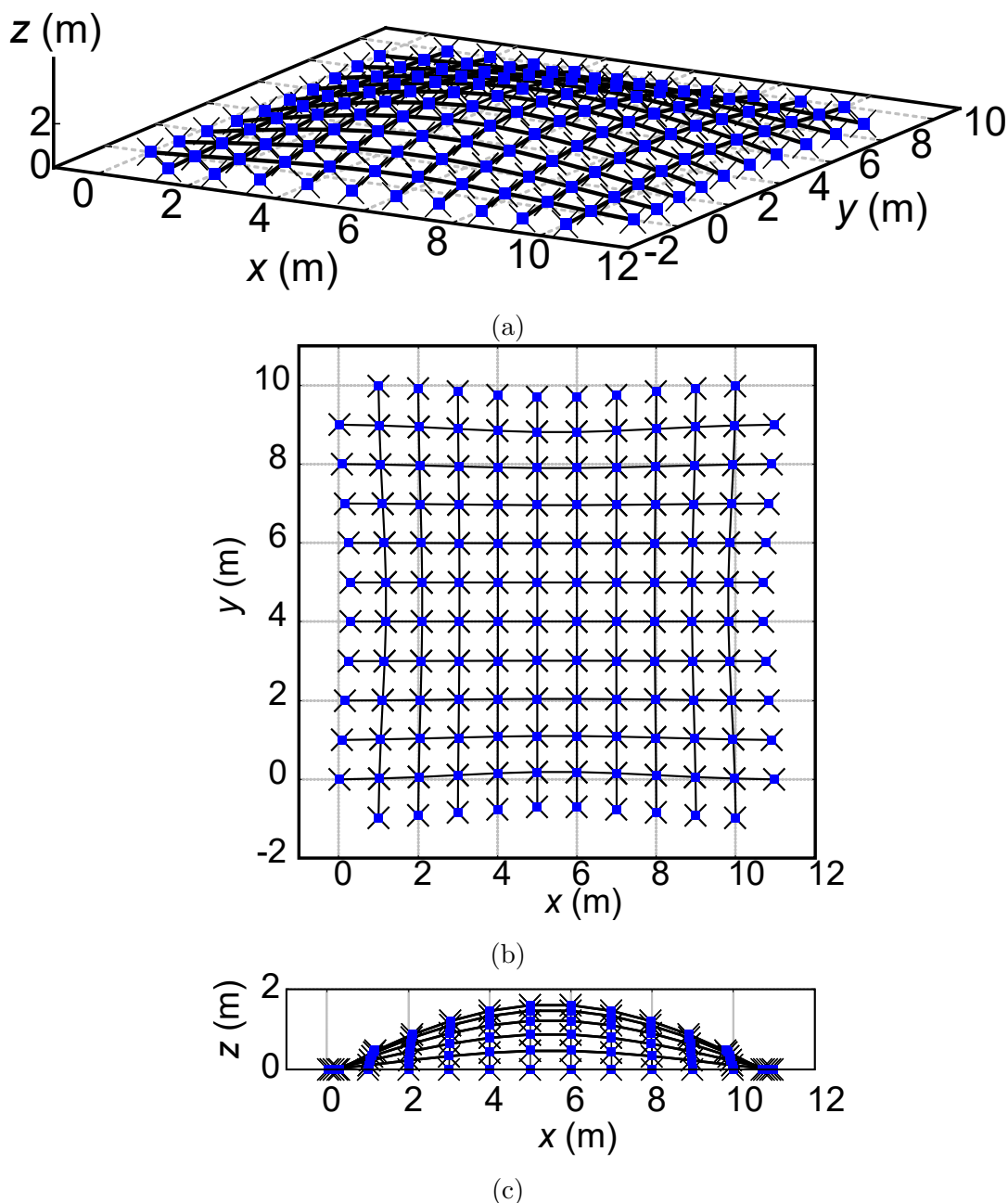


図 4.13: 大スパンのグリッドシェル; (a) 釣合い形状, (b) xy 平面図, (c) xz 平面図 (×: FEM, 実線: DRM, ■: 最適化).

4.7 リエントラント・ハニカムで構成された ABAG の大変形解析

本章で提案した手法を用いて、第 2 章で提案したリエントラント・ハニカムを格子形状に持つ ABAG の大変形解析を実行する。リエントラント・ハニカムの接合部のモデル化に際して、ABAG では接合部にヒンジを与えず、梁間の初期角度 α が 0 でないことを考慮し、4.3.2 節で示した接合部における回転の連続性を適用する。DRM と FEM により、リエントラント・ハニカムの面内変形と面外変形の解析を実行

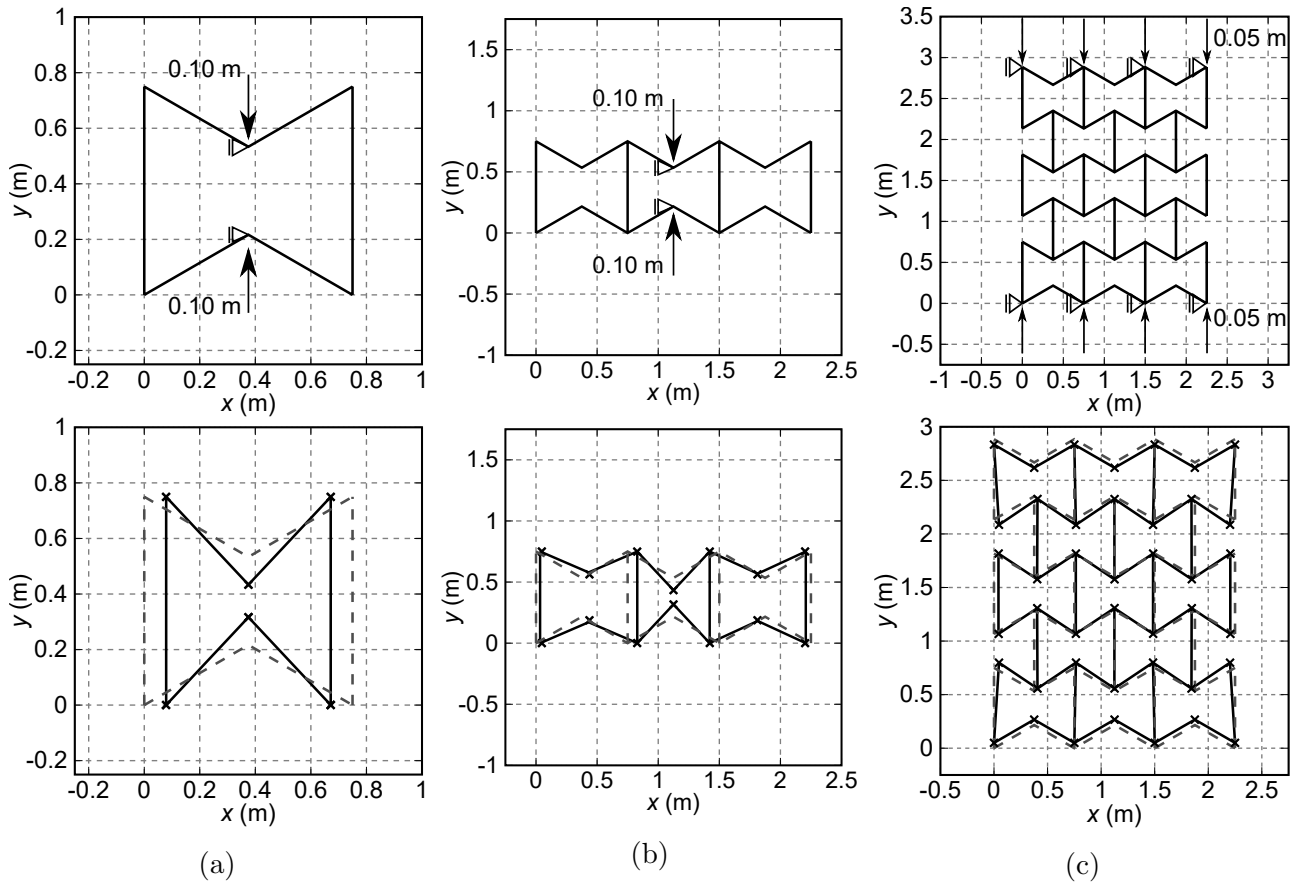


図 4.14: 面内変形形状 (×: FEM, 実線: DRM, 点線: 初期形状) ; (a) ユニット数 1, (b) ユニット数 3, (c) ユニット数 13.

する。

以下の例題では、4.6 節と同じ材料定数、および断面形状を部材に与える。各梁要素の初期長を $l = 0.75$ m とする。シェブロン・ロッドと x 軸のなす角度を $\pi/6$ と設定する。DRM および FEM の解析に関するパラメータは、4.6 節と同じ設定を用いる。

4.7.1 面内変形

面内変形に用いるモデルとして、ユニット数 1, 3, 13 の 3 種類のリエントラント・ハニカムを考える。1 部材を 1 要素でモデル化し、ユニットの接合部上の全ての節点を z 方向に固定する。図 4.14 の上段は各モデルの支持条件および強制変位を示し、下段は変形形状を示している。下段の図内では、構造の初期形状を点線とし、変形後の形状を、DRM の結果については実線、FEM の結果については×のマーカーで表す。図 4.14(a), (b), (c) はそれぞれ、ユニット数 1, 3, 13 のモデルに対応する。表 4.2 は、DRM と FEM で得られた節点座標の差の絶対値について、最大値と平均値を記している。

表 4.2: 面内変形および面外変形解析の結果に関する DRM と FEM 間の全節点座標の差の最大値と平均値.

		Number of units	x (m)	y (m)	z (m)
Inplane	1	Maximum	3.1138×10^{-4}	1.0270×10^{-4}	–
		Average	1.3944×10^{-4}	6.8348×10^{-5}	–
	3	Maximum	1.4165×10^{-2}	1.6039×10^{-2}	–
		Average	4.1778×10^{-3}	3.1699×10^{-3}	–
	13	Maximum	1.4215×10^{-3}	3.9636×10^{-4}	–
		Average	6.2271×10^{-4}	8.4231×10^{-5}	–
Out of plane	13	Maximum	5.4339×10^{-4}	3.5235×10^{-4}	3.1816×10^{-3}
		Average	1.0116×10^{-4}	8.2238×10^{-5}	6.5060×10^{-4}
	46	Maximum	2.6876×10^{-3}	3.2486×10^{-3}	1.3577×10^{-2}
		Average	7.5283×10^{-4}	3.4163×10^{-4}	2.1070×10^{-3}

ユニット数 1

ユニット数 1 のリエントラント・ハニカムは、2 要素を持つシェブロン・ロッド 2 本とタイ・ロッド 2 本の全 6 部材で構成される。ユニットの中央の 2 節点を y 軸方向に沿って可動なローラーで支持し、図 4.14(a) の上段の矢印の向きに 0.10 m の強制変位を与える。図 4.14(a) の下段から、DRM と FEM の両者の結果がほぼ一致していることがわかる。表 4.2 から、 x 方向の差の最大値は 3.1138×10^{-4} m であり、微小な値であると判断できる。

ユニット数 3

ユニット数 3 のリエントラント・ハニカムは、6 要素からなるシェブロン・ロッド 2 本とタイ・ロッド 4 本の全 16 部材で構成される。中央のユニットの中央 2 節点を y 軸方向に沿って可動なローラーで支持し、図 4.14(b) の上段の矢印の向きに 0.10 m の強制変位を与える。図 4.14(b) の下段について、DRM と FEM の両者の結果は概ね一致している。表 4.2 から、 y 方向の差の最大値は 1.6039×10^{-2} m であり、端の 2 つのユニットの中央の節点で生じている。ユニット数 1 のモデルに比べると、DRM と FEM の変形形状の差が大きい。しかし、モデルのサイズと比較すると、差の最大値は十分に小さいと判断できる。

ユニット数 13

ユニット数 13 のリエントラント・ハニカムは、6 要素からなるシェブロン・ロッド 6 本とタイ・ロッド 18 本の全 54 部材で構成される。平板の端に位置するシェブロン・ロッドについて、シェブロン・ロッドとタイ・ロッド間の接合部を y 軸方向に沿って可動なローラーで支持する。図 4.14(c) の上段の矢印の向きに 0.05 m の強制変位を与える。図 4.14(c) の下段から、DRM と FEM の両者の結果が良好に一致していることがわかる。表 4.2 から、 y 方向の差の最大値は 3.9636×10^{-4} m であり、微小な値であると判断できる。

以上の結果から、DRM と FEM で得られた面内変形解析の結果は良好な精度で一致している。また、全ての例においてオーゼティック構造の力学特性である、一方向に圧縮されると直交方向に収縮するという変形性状が確認できた。DRM に基づく提案手法の適用限界として、ユニット数 13 のモデルに与える強制変位の大きさを、上の例で示した 0.10 m から増加させていくと、FEM の結果とは異なる変形モードとなってしまう。これは、数値誤差が累積して形状の対称性が崩れたことが原因であると考えられる。そのため現状では、提案手法の適用範囲は、ユニット数が少ない小規模なモデルの解析、あるいは、ユニット数を多くした大規模なモデルに小さな量の強制変位を作用させる解析に限定される。

4.7.2 面外変形

面外変形の解析に用いるモデルとして、ユニット数が 13 と 46 のリエントラント・ハニカムを考える。図 4.15 および 4.16 は、ユニット数 13 のモデルと 46 のモデルの境界条件等と結果である。表 4.2 には、DRM と FEM で得られた節点座標の差の絶対値について、最大値と平均値を記している。

ユニット数 13

ユニット数 13 のリエントラント・ハニカムは、面内変形の例で示したのと同じ初期格子状平板を用いる。図 4.15(a) は、モデルの境界条件と強制変位を示している。平板の端に位置するシェブロン・ロッドについて、シェブロン・ロッドとタイ・ロッド間の接合部を y 軸方向に沿って可動なローラーで支持する。モデルを面外変形させるために、実線の矢印の向きに 0.05 m の強制変位を与え、点線の矢印が位置する節点に 100 N の外力を z 方向の正の向きに作用させる。

図 4.15(b), (c), (d), (e) はそれぞれ、曲面の釣合い形状、 xy 平面投影図、 xz 平面投影図、 yz 平面投影図を示す。図 4.15(c) の点線は、モデルの初期形状を表す。これらの図から、DRM と FEM の両者の結果が良好に一致していることがわかる。表 4.2 から、このモデルの面外変形形状において z 方向の差の最大値は 3.1816×10^{-3} m であり、微小であると判断できる。

ユニット数 46

ユニット数 46 のリエントラント・ハニカムは、14 要素のシェブロン・ロッド 8 本とタイ・ロッド 53 本の計 165 本の部材で構成される。図 4.16(a) は、モデルの境界条件と強制変位を示している。平板の端に位置するシェブロン・ロッドについて、シェブロン・ロッドとタイ・ロッド間の接合部を y 軸方向に沿って可動なローラーで支持する。加えて、上記以外のシェブロン・ロッドの両端を xy 平面で可動なローラーで支持する。モデルを面外変形させるため、実線の矢印の向きに 0.05 m の強制変位を与え、点線の矢印が位置する節点に 100 N の外力を z 方向の正の向きに作用させる。

図 4.16(b), (c), (d), (e) はそれぞれ、曲面の釣合い形状、 xy 平面投影図、 xz 平面投影図、 yz 平面投影図を示す。図 4.16(c) の点線は、モデルの初期形状を表す。これらの図から、DRM と FEM の両者の結果が良好に一致していることがわかる。表 4.2 から、このモデルの面外変形形状において z 方向の差の最大値は 1.3577×10^{-2} m である。モデルの z 方向の最大変形量と比較すると、差は 4% 以内に収まるため、実用上許容できる誤差といえる。

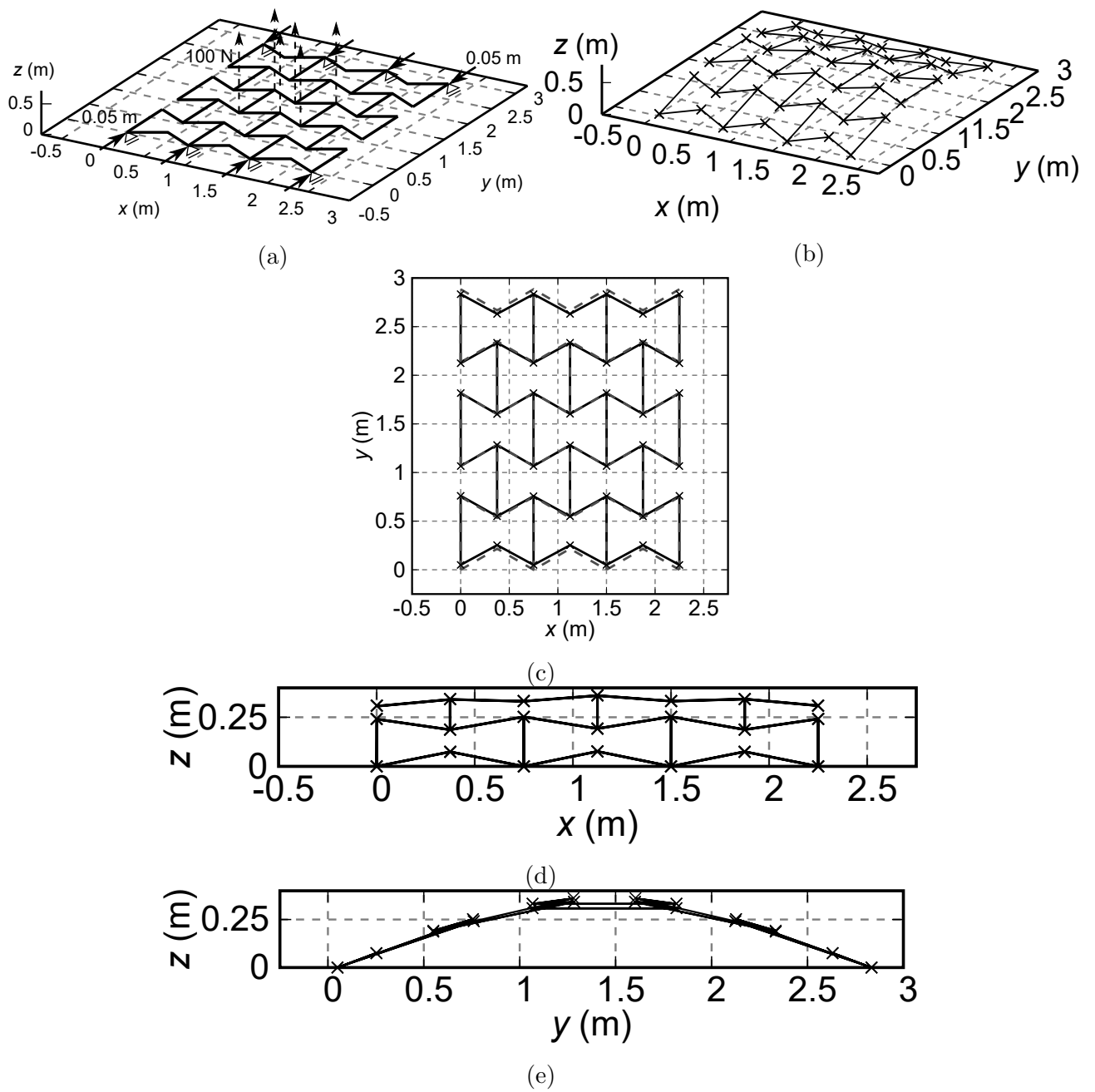


図 4.15: ユニット数 13 のモデルの面外変形形状 (×: FEM, 実線: DRM, 点線: 初期形状); (a) 支持条件, 強制変位, 外力の設定, (b) 曲面形状, (c) xy 平面投影図, (d) xz 平面投影図, (e) yz 平面投影図.

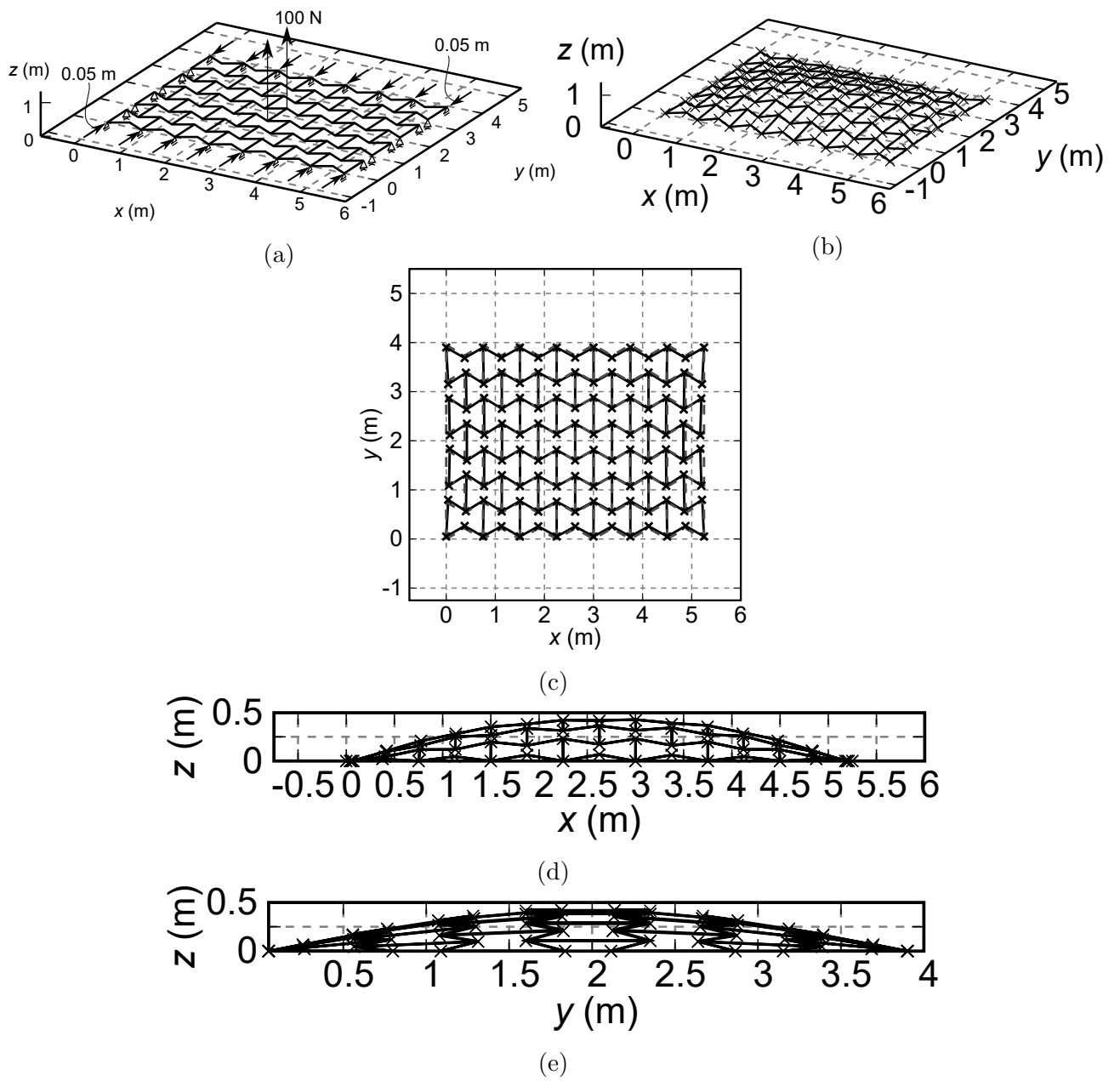


図 4.16: ユニット数 46 のモデルの面外変形形状 (×: FEM, 実線: DRM, 点線: 初期形状) ; (a) 支持条件, 強制変位, 外力の設定, (b) 曲面形状, (c) xy 平面投影図, (d) xz 平面投影図, (e) yz 平面投影図.

4.8 第4章の結論

本章では、グリッドシェルや ABAG をはじめとする柔な骨組構造を対象とした 3次元弾性梁の大変形解析モデルの開発を行った。本手法の特色は、各節点において 6 自由度を与えた梁モデルの回転変位についてグリッドシェルの曲面に対する単位法線ベクトルの初期平面に対する傾きの成分を利用すること、一軸回転のヒンジの自由度を単位法線ベクトルまわりの回転自由度を用いて表現すること、エネルギーに基づく定式化を行うことである。また、数値例題でグリッドシェルのモデルとリエントラント・ハニカムからなる ABAG のモデルの大変形解析を実行し、FEM の結果と良好な精度で一致することを確認した。

4.2 節では、DRM のアルゴリズムについて説明した。本章では、人工減衰に運動減衰を用いる。4.3 節では、提案手法の核となる 3次元弾性梁モデルを定式化した。単位法線ベクトルを用いた回転変位の導出法について述べ、全ポテンシャル・エネルギーの式を示した。4.4 節では、内力ベクトルと外力ベクトルの差として定義される残差力ベクトルの定式化を行い、一般化変位に関する感度係数を導出した。4.5 節では、DRM に関する人工質量、人工慣性モーメント、人工減衰の設定法について説明した。4.6 節および 4.7 節では、それぞれグリッドシェルと ABAG の大変形解析を実行し、他の解析法との結果を比較した。

本章で得られた知見を以下にまとめる。

1. 全ポテンシャル・エネルギーに基づく定式化を行っているため、接線剛性行列を用いた釣合い式を直接解くことなく、変形後の釣合い状態を求めることができる。
2. DRM の陽的解法に基づくアルゴリズムにより、解の更新に関する実装が容易となる。
3. 全ポテンシャル・エネルギーを目的関数として最小化することを目的とした無制約最適化問題を解くことで、最適解において梁の釣合い形状を得ることができる。また、DRM における残差力ベクトルは、最適化問題では目的関数の勾配に相当する。
4. DRM アルゴリズムの収束について Courant-Friedrichs-Lewy 条件を満たすように各種パラメータを設定する必要がある。
5. DRM において人工減衰に運動減衰を選択することで、エネルギーがピークに達する度に時間増分を小さくする設定が容易に行える。これにより、釣合い解付近における解の振動を回避しやすくなる。
6. ABAG のように梁部材間の接合部が一軸回転のヒンジではなく剛な骨組の場合、要素間の接合部における回転の連続性を考慮したモデル化により良好な精度で解が得られる。しかし、提案モデルではパイプ断面のような 2 軸対称な梁の適用を想定した定式化を行っており、長方形断面の梁を用いた解析に使用するには更なる改良を要する。

第 5 章

本論文の結論

5.1 結論

本論文では、軽量で施工性に優れた、柔軟に変形する格子状曲面の設計法の提示を目的として、ABAG の形状設計法の構築、離散円筒機構の形状設計法の構築および力学特性の検証、ならびに 3 次元弾性梁に対する簡易な大変形解析ツールの開発を行った。本研究で得られた成果を、第 2 章から第 5 章に分けて以下に示す。

第 2 章では、負のポアソン比を有する格子状平板から生成される ABAG 曲面の形状設計法を提案した。ABAG は、オーゼティック構造であるため、生成された曲面には主に正のガウス曲率が分布する。そのため、ABAG は、微小な初期たわみを与えた格子状平板に、面内方向へ強制変位を作用させてドーム型の曲面を生成できる、施工性に優れた空間構造といえる。一方で、格子形状に由来する面内剛性の小ささゆえ、設計者が直感的に格子状平板や境界条件等を決定して所望の曲面を生成することは困難であった。この問題に対して、本研究では、離散微分幾何学で定義される離散ガウス曲率と離散平均曲率ベクトルを曲面形状の定量的な評価に使用した最適化手法による形状設計法を導入した。

ABAG の初期格子状平板は、2 種類の部材、シェブロン・ロッドとタイ・ロッドで構成されるリエントラント・ハニカムあるいはリエントラント四辺形で構成される。シェブロン・ロッドは線分切片で構成された折れ線形状の部材であり、大変形過程で生じる曲げとねじれによって曲面形状の生成に寄与する。一方で、タイ・ロッドは、隣り合うシェブロン・ロッドどうしを接続する部材である。

離散曲率の計算には、ABAG 曲面上に形成した三角形メッシュを用いる。ABAG 上での三角形メッシュの生成には、部材間の接合部に位置する節点を利用する。角度欠損として定義される離散ガウス曲率は、曲面の局所的な凹凸の大きさを定量評価する。Cotangent formula として知られる離散平均曲率ベクトルは、各節点における凸方向をベクトルとして表す。

最適化問題は、特定領域内で上に凸な形状を持つ ABAG 曲面を設計する問題として定式化した。具体的には、特定領域内における目標節点上の最小の離散ガウス曲率を目的関数として最大化し、かつ、凸方向が鉛直上向きになるように、離散平均曲率ベクトルの鉛直成分に関する制約条件を設定した。設計変数には、 x 軸とシェブロン・ロッドの左端がなす角度 θ 、シェブロン・ロッドの断面せい分布に関する係数 β_0, β_1 を与えた。係数 β_0, β_1 は、断面せい分布の決定に用いた 3 次のバーンスタイン多項式に基づく。また、上記の設定は、シェブロン・ロッドを構成する線分切片の断面せいを曲線状に分布させ、かつ、

最適化問題の設計変数の数を低減できる。最適化問題の解法にはメタヒューリスティクスの一つである PSO を使用した。PSO は、関数の勾配が不要であり、非線形性の強い問題の解法として有効である。また、最適化の結果について、PSO に関するパラメータへの依存性を検証した。さらに、PSO を用いた最適化の結果を、GA および SA を用いた最適化の結果と比較した。3 種のメタヒューリスティクスの最適解は概ね一致しており、さらに、PSO を適用した場合は実用に対して合理的な計算時間で解を得ることがわかった。

数値例題において、上記の最適化を用いた ABAG 曲面の形状設計例を示した。提案手法により、ABAG 上に異なる特定領域を指定することで、境界条件と強制変位を変更することなく異なる形状の曲面を生成できることがわかった。最適解での目標節点の離散ガウス曲率の大きさは、特定領域の分布に依存することがわかった。

また、最適解でのシェブロン・ロッドの断面せい t_{ik} の分布は複雑で規則性がみられなかった。しかし、直感とは異なる力学特性を有する ABAG 曲面の形状設計に対し、設計者が不規則な最適解を発見するのは困難であると予想される。そのため、この結果は、ABAG の形状設計問題に対して最適化を適用する有効性を示唆している。

加えて、非均一なリエントラント・パターンで構成された格子状平板の設計法として、非周期型、ハイブリッド型、複合型 ABAG を提案した。これらの提案手法で設計した格子状平板を用いることで、均一なリエントラント・パターンで構成された格子状平板から生成される ABAG 曲面よりも複雑な形状の曲面を容易に生成できる。数値例題として、任意のパラメータを与えて設計した非周期型 ABAG、ハイブリッド型 ABAG、複合型 ABAG の曲面の例を示した。非周期型 ABAG の設計では、 y 方向に沿って分割した複数のサブ領域の x 方向のサイズを形状パラメータ γ_D で調整する。生成された非周期型 ABAG の曲面は y 方向に沿った平面に関して形状が非対称になる。結果として、比較的小さな値の γ_D を与えた狭小なサブ領域において、離散ガウス曲率が増加しやすいことがわかった。一方で、ハイブリッド型 ABAG は、2 つの異なるリエントラント・パターンで構成されており、これらのパターンの配置に応じてさまざまな曲面が生成される。ハイブリッド型 ABAG では、 y 方向について対称な形状の曲面が得られる。また、2 種類のリエントラント・パターンを交互に配置すると、平板全体が幾何的な対称性を持つようになり、 x 方向、 y 方向に沿った 2 つの平面について対称な曲面が得られる。また、非周期型とハイブリッド型を組合わせた複合型 ABAG として格子状平板を設計すれば、複雑で非対称な形状の曲面が生成できることを確認した。非周期型 ABAG と同様、複合型 ABAG についても、 γ_D が周囲より小さな値のサブ領域において離散ガウス曲率が比較的大きくなることがわかった。

非周期型、ハイブリッド型、複合型の ABAG の形状設計に対して、上記の最適化を用いて生成される曲面を例示した。設計変数には、上の問題で導入した変数以外に、非周期型と複合型に与える形状パラメータ γ を追加した。

非周期型 ABAG の最適解として、目標節点を持つシェブロン・ロッドに関する角度 θ_8 および θ_9 は、それに隣接する角度に比して小さな値であった。これは、2.5 節の例題で得た最適解の解傾向に一致する。また、設計変数 γ について、目標節点が存在するサブ領域には、そうでないサブ領域に比べて小さな値が最適解として得られた。すなわち、ABAG 曲面において離散ガウス曲率が大きい箇所はサブ領域が狭くなり、そうでない箇所では広がる。これは、上で論じた非周期型 ABAG の解傾向に一致している。

ハイブリッド型 ABAG の最適解においても、目標節点を有するシェブロン・ロッドに関する角度 θ_8 と

θ_9 が比較的小さな値として得られた。この結果は、他のモデルと同様の傾向を示している。最適解のリエントラント・パターンの配置は、シェブロン・ロッドの断面せいの分布と同様にして、不規則であった。ハイブリッド型 ABAG にはサブ領域を設定しないため、 y 方向に沿った平面に関して離散ガウス曲率の分布は対称であり、 x 方向に沿った平面に関しては非対称であった。この非対称性は、リエントラント・パターンの不規則な配置に起因する。

複合型 ABAG の最適解では、目標節点を持つシェブロン・ロッドに関する角度 θ_8 は他のシェブロン・ロッドの角度 θ_i に比べて小さい。しかし、同じくして目標節点をもつシェブロン・ロッドの角度 θ_9 は θ_8 と同程度に減少しなかった。この結果は、リエントラント・パターンの配置が非周期型 ABAG とは異なり不規則なことに起因すると考えられる。また、サブ領域に対する設計変数 γ の分布について、目標節点が含まれる箇所では比較的小さな値が、そうでない箇所は大きな値が最適解で得られた。この結果は、他のモデルと同じ解傾向を示している。さらに、得られた曲面の離散ガウス曲率の平均値は、非均一ユニットを有する ABAG の最適化問題に関する例題として扱った 3 つの曲面の中で最大であった。このことから、より多様で複雑な形状の曲面の設計に対する複合型 ABAG の有効性が示された。

第 2 章で提案した最適化手法および非均一なユニットを持つ格子状平板の設計法は、未だ数少ない研究例に留まっている ABAG の形状設計法の一つとして提示される。とくに、最適化を用いることで設計者の勘と経験に依存しない形状設計法を提案した点、数値例題を通じて格子状平板の設計パラメータの決定方針を導いた点で貢献するといえる。

第 3 章では、均一な 2 回回転対称な六角形ユニットで構成される離散円筒機構の形状設計法の提案、および提案手法で生成した機構の力学特性の検証を行った。本章で得た成果を以下にまとめる。

円筒形を離散的に表現する頂点と辺からなる基本構造は、離散幾何学で定式化される CNT の幾何形状の式の拡張形式を用いて生成できる。これにより、均一な 2 回回転対称の六角形ユニットで構成される離散円筒機構の形状を導出できる。提案手法の利点は、少ないパラメータで多様な形状を生成できること、加えて、平面を円筒形に変換する上で困難な、継目における格子の周期性の維持が容易であることが挙げられる。

次に、四辺形の板材で構成される離散円筒機構の形状設計について、四辺形を平面的に設計するための頂点オフセットを考案した。提案した頂点オフセットを適用した機構では、中心方向オフセットで設計した板材からなる機構に比べ、ねじれ量およびねじれた四辺形数が減少することが確認できた。ただし、提案頂点オフセットで平面化されるのは、全てのタイ・エッジと一部のシェブロン・エッジに対応する四辺形に限定される。すなわち、機構を構成する全ての四辺形を平面的に設計することはできない。

基本構造の幾何的な情報から梁部材で構成される離散円筒機構をモデル化し、中心軸に沿って圧縮方向に強制変位を作用させたときの機構の変形状を調べた。形状パラメータの選定によって、機構の形状と柔軟性を多様に設計できることがわかった。さらに、螺旋モデルでは、圧縮変形と同時に、機構全体にねじれ変形が生じることがわかった。物理的な対称性の観点から論じると、伸縮とねじれのカップリング変形は、カイラル・メタマテリアルに分類される機構とみなせる。第 3 章で提案した離散円筒機構のうち、リエントラント・ハニカムで構成され、かつ、伸縮とねじれのカップリング変形が生じる構造は、2 つの異なるメタマテリアルの特性を併せ持つ。

第 4 章では、グリッドシェルの大変形解析に適用する、3 次元弾性梁モデルを提案した。DRM では動

的な釣合い式を陽に解くため、釣合い式の増分形式および接線剛性行列が不要な点で実装が容易である。

提案した一連の式において、グリッドシェルの上の各節点における単位法線ベクトルは、梁の局所的な変形を得るために使用される。本手法では、1つの節点につき6つの独立変数を与えており、そのうちの3つの変数は3方向に対する並進変位である。残りの3つの成分のうち2つは、変形状態における単位法線ベクトルの初期平面に対する投影成分であり、これらは部材軸に関する局所座標系からの単位法線ベクトルの傾きを表す。最後の1つの独立変数は、変形状態における単位法線ベクトルまわりの節点の回転変位である。梁要素の2つの端点における曲げとねじれは、各節点の単位法線ベクトルと梁要素の局所軸との幾何学的関係により計算される。全ポテンシャル・エネルギーは変形状態について定式化され、残差力は全ポテンシャル・エネルギーの一般化変位に関する偏微分として求まる。それゆえ、提案式は大回転の増分形式を必要とせず、さらに、共回転梁要素に関する複雑な計算も不要である。

全ポテンシャル・エネルギーを目的関数とした最適化問題において、残差力は感度係数に相当するため、最適化手法によっても変形後の釣合い状態を求められる。数値例題では、グリッドシェルのモデルとリエントラント・ハニカムからなる ABAG のモデルについて、DRM と FEM の結果を比較した。グリッドシェルのモデルについては DRM の妥当性を確認するため、全ポテンシャル・エネルギーの最小化を目的とした最適化の結果も比較した。全ての例題において、各手法で得られた結果が互いに良好に一致することがわかった。

一般の設計者は、高度な最適化ライブラリや FEM ソフトウェアパッケージの使用権限を持たないため、設計者が簡単に利用できる DRM の手法を開発することは重要な課題である。第4章では、その課題に対する解決策の一つを提供した。全てのモデルにおいて、DRM を用いて得られたグリッドシェルと ABAG の変形形状は、FEM ソフトウェアパッケージによって得られた形状に概ね等しい。この結果は、単位法線ベクトルによって記述される3次元弾性梁モデルがグリッドシェルや ABAG の形状探索ツールとして有効に適用できることを示唆している。

5.2 今後の展望

本研究で取り組んだ課題に関する今後の展望を以下に示す。

本論文では、ABAG の格子形状に、リエントラント・ハニカムとリエントラント四辺形の2つを適用した。負のポアソン比を持つ格子形状は、上記以外にも数多く存在する。より多様な形状の ABAG 曲面を生成するには、さまざまな種類の負のポアソン比を持つ格子状平板を用いた検証が必要であり、新たな格子形状を生成するにはトポロジー最適化手法の適用が有効であると考えられる。また、本論文では、全ての例題で格子をオーゼティック構造として機能する幾何形状で設計したが、オーゼティック構造でない格子形状を平板内に混在させることも、多様な曲面を生成する上で検討すべき事項である。格子形状の検討は、離散円筒機構の設計においても重要な課題である。また、第2章では、局所的に上に凸な形状を有する ABAG 曲面を生成することを目的として、最適化問題を定式化した。本論文で提案した最適化問題は、ABAG によって設計者の所望する曲面形状を自在に設計するという目標の達成に向けた最初の足掛かりに過ぎない。上記の大目標の実現には、ABAG 曲面上の離散ガウス曲率の分布や凸方向を自在に、かつ、容易に指定できるような形状設計法を開発する必要がある。さらに、ABAG の形状生成後には、剛性を向上させるためにブレースやパネルを用いた補強が必要となる。多目的最適化等を利用し、形状設計と剛性

の増大を目的とした設計法の構築を行うことは、ABAGによる空間構造設計の実用化に対して必須の課題といえる。

板材で構成される離散円筒機構の形状設計法では、提案した頂点オフセットでは、全ての板材を平面化することができない点が課題として残っている。梁部材で構成された離散円筒機構の静的構造解析について、本論文では圧縮変形のみを検討・考察した。今後は、対称曲げや反対称曲げを与えて変形性状を確認する。また、有限要素解析におけるモデル作成の省略や計算負荷の低減化を目的として、離散円筒機構の変形応答に基づくサロゲートモデルを開発することが、当該機構の実用化に対して重要である。

第4章で提案した3次元弾性梁モデルは、2軸対称な断面を持つ梁部材を用いることを仮定している。したがって、長方形のような2軸対称でない断面を持つ部材で構成された平板の面外変形では、提案手法とFEMの結果に大きな差が生じる。面内変形の結果は良好に一致しているため、面外変形の解析精度を向上させるには、ねじれ変形の計算に改良が必要である。また、提案した梁モデルは、単位法線ベクトルの初期平面に対する傾きによって局所的な回転変位を表現している。しかし、離散円筒機構のように初期平面を唯一に指定できない構造への適用は難しいため、実装には工夫を要する。

付録

粒子群最適化

粒子群最適化 (particle swarm optimization: PSO) は、メタヒューリスティックスの一つであり、そのアルゴリズムは鳥や魚のような群をなす生物の集団採餌行動の模倣に基づく [121]。PSO では、粒子と呼ばれる多数の解 \mathbf{x} が高次元空間を大域的に探索する多点探索によって最適解を発見する。解の更新には、目的関数 $F(\mathbf{x})$ の勾配を用いない。そのため、PSO は目的関数 $F(\mathbf{x})$ の微分演算が困難である問題に対して有効である。各粒子には位置情報と速度情報が与えられている。粒子はこれらの情報を相互に交換し合い、位置ベクトルと速度ベクトルの和として更新される新たな速度ベクトルに基づき、探索方向を決定する。第 2 章の問題に対する PSO のアルゴリズムを以下にまとめる。

PSO のアルゴリズム:

- Step 1: 設計変数の上下限值に基づき、位置ベクトル $\mathbf{x}_J^0 = \{x_{J_1}^0, \dots, x_{J_D}^0\}$ および速度ベクトル $\mathbf{v}_J^0 = \{v_{J_1}^0, \dots, v_{J_D}^0\}$ ($J = 1, \dots, M; D = 1, \dots, 3m$) をランダムな値に初期化する。ここで、 $3m$ は、第 2 章 2.4.3 節において θ, β_0, β_1 で表される設計変数の全数であり、 M は解 (または粒子) の数である。
- Step 2: $\mathbf{x}_{p,J}^\gamma$ と \mathbf{x}_g^γ をそれぞれ、イテレーション γ における、 J 番目の粒子が記憶している最良の位置情報 (局所的な最良解) と全粒子が個別に有する最良の位置情報の中でも最良の情報 (大域的な最良解) とする。 $J = 1, \dots, M$ に対し、 $\gamma = 0$ および $\mathbf{x}_{p,J}^0 = \mathbf{x}_J^0$ として初期化する。 \mathbf{x}_g^0 を、全粒子の中で最大の目的関数を持つ粒子の位置情報として、粒子番号を $J = 1$ として設定する。
- Step 3: イテレーション γ における J 番目の粒子の速度ベクトルと位置ベクトルは次のように更新される。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_J^{\gamma+1} &= \omega \mathbf{v}_J^\gamma + c_1 r_1 (\mathbf{x}_g^\gamma - \mathbf{x}_J^\gamma) + c_2 r_2 (\mathbf{x}_{p,J}^\gamma - \mathbf{x}_J^\gamma) \\ \mathbf{x}_J^{\gamma+1} &= \mathbf{x}_J^\gamma + \mathbf{v}_J^{\gamma+1} \end{aligned}$$

慣性重み ω は、速度 \mathbf{v}_J^γ の大きさを調整する。パラメータ c_1, c_2 をそれぞれ、大域的な最良解および局所的な最良解の方向に移動しない粒子の割合とする。また、パラメータ r_1, r_2 をそれぞれ、 $0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1$ の範囲の値の乱数とする。

Step 4: 目的関数 $F(\mathbf{x}_J^{\gamma+1})$ を計算する。

Step 5: 条件 $F(\mathbf{x}_J^{\gamma+1}) > F(\mathbf{x}_{p,J}^\gamma)$ を満たす場合、 $\mathbf{x}_{p,J}^\gamma \leftarrow \mathbf{x}_J^{\gamma+1}$ として更新し、Step 6 へ行く。この

表 5.1: PSO パラメータと RH1 の目的関数.

ω	c_1	c_2	objective function F	ω	c_1	c_2	objective function F
		0.25	0.0073			0.25	0.0117
	0.25	0.50	0.0066		0.25	0.50	0.0130
		0.75	0.0063			0.75	0.0114
		0.25	0.0093			0.25	0.0139
0.25	0.50	0.50	0.0077	0.75	0.50	0.50	0.0146
		0.75	0.0068			0.75	0.0137
		0.25	0.0083			0.25	0.0151
	0.75	0.50	0.0089	0.75	0.50		0.0151
		0.75	infeasible			0.75	0.0139
		0.25	0.0082			0.25	0.0114
	0.25	0.50	0.0086		0.25	0.50	0.0099
		0.75	0.0080			0.75	0.0109
		0.25	0.0093			0.25	0.0141
0.50	0.50	0.50	0.0102	1.00	0.50	0.50	0.0125
		0.75	0.0106			0.75	0.0109
		0.25	0.0137			0.25	0.0114
	0.75	0.50	0.0124	0.75	0.50		0.0123
		0.75	0.0130			0.75	0.0132

条件を満たさない場合, $J \leftarrow J + 1$ の更新を行い, Step 3 へ戻る.

Step 6: $F(\mathbf{x}_{p,J}^{\gamma+1}) > F(\mathbf{x}_g^\gamma)$ の場合, $\mathbf{x}_g^\gamma \leftarrow \mathbf{x}_{p,J}^{\gamma+1}$ として更新する. $J < M$ のとき, $J \leftarrow J + 1$ として更新し, Step 3 へ行く. 収束条件を満足するか, あるいは γ が最大イテレーションに達したら Step 7 へ. $J \geq M$ なら, $J = 1$ として Step 3 へ戻る.

Step 7: アルゴリズムを終了させ, $\mathbf{x}_g^{\gamma+1}$ を最適解として出力する.

続いて, 第 2 章 2.5 節で例題として扱った曲面 RH1 の最適化に用いた PSO パラメータの設定についての検討結果を示す. 表 5.1 は, 36 組の PSO パラメータのセットと, それを用いた最適化で得られた RH1 の目的関数を示している. 慣性重み ω は, 1.00 よりも大きい値の設定が可能だが, $\omega \geq 1.25$ では実行可能解は得られなかった. そのため, パラメータ $\omega \in \{0.25, 0.50, 0.75, 1.00\}$, $c_i \in \{0.25, 0.50, 0.75\}$ ($i = 1, 2$) で得られた, それぞれの目的関数の値を比較した. 結果として, $\omega = 0.75, c_1 = 0.75, c_2 = 0.50$ というパラメータの組が目的関数の最大値を導くことがわかった.

参考文献

- [1] Adriaenssens S, Block P, Veenendaal D, Williams C. (Eds.), *Shell Structures for Architecture*. Routledge, London 2004.
- [2] 大崎 純, 竹内 徹, 山下哲郎. シェル・空間構造の基礎理論とデザイン. 京大出版会 2019.
- [3] 坪井義昭, 川口 衛, 佐々木睦朗, 大崎 純, 植木隆司, 竹内 徹, 川端昌也, 川口健一, 金箱温春. 力学・素材・構造デザイン. 建築技術 2012.
- [4] 大嶋泰介. 建築討論 10 月号 メタマテリアルから考える今後 10 年後の設計のゆくえ. 日本建築学会 2021.
- [5] Kappraff J. *Connections: the geometric bridge between art and science* (2nd Eds). World Scientific, Singapore 2001.
- [6] Leyral M, Ebode S, Guerold P, Berthou C. *Elastica project: dynamic relaxation for post-formed elastic gridshells*. Proc IASS Symposium 2020/2021. Guilford, UK. *Int Assoc Shell and Spatial Struct* 2021:618.
- [7] Harris R, Romer J, Kelly O, Johnson S. *Design and construction of the Downland Gridshell*. *Build Res Inf* 2003;31(6):427-454.
- [8] Yu X, Zhou J, Liang H, Jiang Z, Wu L. *Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility: A brief review*. *Progress in Materials Science* 2018;94:114-173.
- [9] Jiao P, Alavi AH. *Artificial intelligence-enabled smart mechanical metamaterials: advent and future trends*. *International Materials Reviews* 2021;66(6):365-393.
- [10] Lienhard J, Alpermann H, Gengnagel C, Knippers J. *Active bending, a review on structures where bending is used as a self-formation process*. *Int J Space Struct* 2013;28:187-196.
- [11] Adriaenssens S, Barnes M, Harris R, Williams C. *Dynamic relaxation: design of a strained timber gridshell*, in: Adriaenssens, S., Block, P., Veenendaal, D., Williams, C. (Eds.), *Shell Structures for Architecture*. Routledge London 2004;89-102.
- [12] Happold E, Liddell WI. *Timber Lattice Roof for the Mannheim Bundesgartenschau*. *Struct Eng* 1975;53(3):99-135.
- [13] Sakai Y, Ohsaki M. *Discrete elastica for shape design of gridshells*. *Eng Struct* 2018;169:55-67.
- [14] Bessini J, Lázaro C, Monleón S. *A form-finding method based on the geometrically exact rod model for bending-active structures*. *Eng Struct* 2017;152(1):549-558.
- [15] Dassault Systèmes. *Abaqus User's Manual Ver 2016*; 2016.
- [16] Kuijvenhoven M, Hoogenboom PCJ. *Particle-spring method for form finding grid shell structures*

consisting of flexible members. *Journal of the international association for shell and spatial structures* 2012;53(171):31-38.

- [17] Linkwitz K, Scheck HJ Einige bemerkungen zur berechnung von vorgespannten seilnetzkonstruktionen. *Ingenieur-Archiv* 1971;40:145-158.
- [18] Scheck HJ. The force density method for form finding and computation of general networks. *Compt Methods Appl Mech Eng* 1974;3:115-134.
- [19] Bergou M, Wardetzky M, Robinson S, Audoly B and Grinspun E, Discrete elastic rods, *ACM Trans Graph* 2008;27:63.
- [20] Baek C, Sageman-Furnas AO, Jawed MK, Reis PM. Form finding in elastic gridshells. *Proc Natl Acad Sci Unit States Am* 2018;115:75-80.
- [21] Baek C, Reis PM. Rigidity of hemispherical elastic gridshells under point load indentation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2019;124:411-426.
- [22] Qin L, Huang W, Du Y, Zheng L, Jawed MK. Genetic algorithm-based inverse design of elastic gridshells. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 2020;62:2691-2707.
- [23] D'Amico B, Zhang H, Kermani A. A finite-difference formulation of elastic rod for the design of actively bent structures. *Eng Struct* 2016;117:518-527.
- [24] Day AS. An introduction to dynamic relaxation. *The Engineer* 1965;219:218-221.
- [25] Lázaro C, Bessini J, Monleón S. Mechanical models in computational form finding of bending-active structures. *Int J Sp Struct* 2018;33:86-97.
- [26] Barnes M, Adriaenssens S, Krupka M. A novel torsion/bending element for dynamic relaxation modeling. *Eng Struct* 2013;119:60-67.
- [27] Adriaenssens, SML, Barnes MR. Tensegrity spline beam and grid shell structures. *Eng Struct* 2001;23(1):29-36.
- [28] Lefevre B, Tayeb F, du Peloux L, Caron JF. A 4-degree-of-freedom Kirchhoff beam model for the modeling of bending-torsion couplings in active-bending structures. *Int J Sp Struct* 2017;32:69-83.
- [29] Belytschko T, Hsieh BJ. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. *Int J Numer Meth Engng* 1973;7:255-271.
- [30] Crisfield MA. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Comput Method Appl M*, 1990;81:131-150.
- [31] Li ZX, Vu-Quoc L. A mixed co-rotational 3D beam element formulation for arbitrarily large rotations. *Adv Steel Constr* 2010;6(2):767-787.
- [32] Hsiao KM. Co-rotational total Lagrangian formulation for three-dimensional beam element. *AIAA J* 1992;30(3):797-804.
- [33] Simo JC, Vu-Quoc L. A geometrically exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation. *Int J Solids Struct* 1991;27(3):371-393.
- [34] D'Amico B, Kermani A, Zhang H. Form finding and structural analysis of actively bent timber grid shells. *Eng Struct* 2014;81:195-207.

- [35] D'Amico B, Kermani A, Zhang H, Shepherd P, Williams CJK. Optimization of cross-section of actively bent grid shells with strength and geometric compatibility constraints. *Comput Struct* 2015;154:163-176.
- [36] Li JM, Knippers J. Rotational Formulations for Dynamic Relaxation - with Application in 3D Framed Structures with Large Displacements and Rotations. *Proc IASS-APCS 2012, Seoul, Korea, 2012;Paper No. FF-157.*
- [37] Senatore G, Piker D. Interactive real-time physics: An intuitive approach to form-finding and structural analysis for design and education. *CAD Comput Aided Des* 2015;61:32-41.
- [38] Reissner E. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem. *J Appl Math Phys* 1972;23(5):795-804.
- [39] Simo J. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. *Comput Meth Appl Mech Eng* 1985;49(1):55-70.
- [40] Simo JC, Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model, Part II: Computational aspects. *Comput Methods Appl Mech Engng* 1986;58:79-116.
- [41] Cardona A, G eradin M. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *Int J Numer Meth Engng* 1988;26:2403-2438.
- [42] Ibrahimbegovi c A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. *Comput Meth Appl Mech Engng* 1995;122:11-26.
- [43] Sonnevile V, Cardona A, Bruls O. Geometrically exact beam finite element formulated on the special euclidean group SE(3). *Comput Meth Appl Mech Engng* 2014;268:451-474.
- [44] Rombouts J, Lombaert G, De Laet L, Schevenels M. A novel shape optimization approach for strained gridshells: Design and construction of a simply supported gridshell. *Eng Struct* 2019;192(1):166-180.
- [45] Rombouts J, Lombaert G, De Laet L, Schevenels M. On the equivalence of dynamic relaxation and the Newton-Raphson method. *Int J Numer Meth Engng* 2018;113:1531-539.
- [46] Surajadi JU, Gao L, Du H, Li X, Xiong X, Fang NX, Lu Y. Mechanical metamaterials and their engineering applications. *Adv Eng Mater* 2019;21:1-37.
- [47] Qamar IPS, Groh R, Holman D, Roudaut A. HCI meets material science: a literature review of morphing materials for the design of shape-changing interfaces. *CHI 2018, April 21-26, Montr al, QC, Canada.*
- [48] Lim TC. A 2D auxetikos system based on interconnected shurikens. *SN Applied Sciences* 2019;1:1383.
- [49] Lakes R. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science* 1987;235(4792):1038-1040.
- [50] Love A. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 1892;1.
- [51] Evans KE. Auxetic polymers: A new range of materials. *Endeavour* 1991;15(4):170-174.
- [52] Evans KE, Nkansah MA, Hutchinson IJ, Rogers SC. Molecular network design. *Nature* 1991;353:124-124.

- [53] Saxena KK, Das R, Calius EP. Three decades of auxetics research - Materials with negative Poisson's ratio: A review. *Adv Eng Mater* 2016;18(11):1847-1870.
- [54] Liu Y, Hu H. A review on auxetic structures and polymeric materials. *Scientific Research and Essays* 2010;5(10):1052-1063.
- [55] Ren X, Shen J, Ghaedizadeh A, Tian H, Xie YM. A simple auxetic tubular structure tuneable mechanical properties. *Smart Mater Struct* 2016;25:065012.
- [56] Ju J, Summers JD. Compliant hexagonal periodic lattice structures having both high shear strength and high shear strain. *Material Design* 2011;32(2):512-524.
- [57] Grima JN, Caruana-Gauci R, Attard D, Gatt R. Three-dimensional cellular structures with negative Poisson's ratio and negative compressibility properties. *Physical and Engineering Science* 2012;468:3121-3138.
- [58] Gibson LJ, Ashby MF. *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge: Cambridge University Press; 1999.
- [59] Argatov II, Guinovart-Díaz R, Sabina FJ. On local indentation and impact compliance of isotropic auxetic materials from the continuum mechanics viewpoint. *Int J Eng Sci* 2012;54:42-57.
- [60] Coenen VL, Alderson KL. Mechanisms of failure in the static indentation resistance of auxetic carbon fibre laminates. *Phys Status Solidi b* 2011;248:66-72.
- [61] Alderson A, Alderson KL. Auxetic materials. *Proc Inst Mech Eng G* 2007;221:565-575.
- [62] Hou Y, Tai YH, Lira C, Scarpa F, Yates JR, Gu B. The bending and failure of sandwich structures with auxetic gradient cellular cores. *Composites: Part A* 2013;49:119-131.
- [63] Hou S, Liu T, Zhang Z, Han X, Li Q. How does negative Poisson's ratio of foam filler affect crashworthiness? *Mater Des* 2015;82:247-259.
- [64] Mohsenizadeh S, Alipour R, Shokri Rad M, Farokhi Nejad A, Ahmad Z. Crashworthiness assessment of auxetic foam-filled tube under quasi-static axial loading. *Mater Des* 2015;88:258-268.
- [65] Choi JB, Lakes RS. Fracture toughness of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio: experiment and analysis. *Int J Fract* 1996;80:73-83.
- [66] Chen CP, Lakes RS. Micromechanical analysis of dynamic behavior of conventional and negative Poisson's ratio foams. *J Eng Mater Technol* 1996;118:285-288.
- [67] Pozniak AA, Kaminski H, Kedziora P, Maruszewski B, Strek T, Wojciechowski KW. Anomalous deformation of constrained auxetic square. *Rev Adv Mater Sci* 2010;23:169-174.
- [68] Xie YM, Yang X, Shen J, Yang X, Ghaedizadeh A, Rong J, Huang X, Zhou S. Designing orthotropic materials for negative or zero compressibility. *Int J Solids Struct* 2014;51:4038-4051.
- [69] Evans KE, Alderson A. Auxetic materials: Functional materials and structures from lateral thinking!. *Adv Mater* 2000;12(9):617-628.
- [70] Anurag C, Anvesh CK, Harsha AS. Auxetic materials. *International Journal for Trends in Engineering & Technology* 2015;5(2):156-160.
- [71] Larsen UD, Sigmund O, Bouwstra S. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative Poisson's ratio. *Journal of Micro electromechanical Systems*

1997;6(2):99-106.

- [72] Bendsøe MP, Sigmund O. *Topology optimization* 2nd edn. Berlin: Springer; 2003.
- [73] Schwerdtfeger J, Wein F, Leugering G, Singer RF, Koner CK. Design of auxetic structures via mathematical optimization. *Adv Mater* 2011;23:2650-2654.
- [74] Kureta R, Kanno Y. A mixed integer programming approach to designing periodic frame structures with negative Poisson's ratio. *Material Design* 2014;15(3):773-800.
- [75] Ou J, Ma Zhao, Peters J, Dai S, Vlavianos N, Ishii H. KinetiX - designing auxetic-inspired deformable material structures. *Computers & Graphics* 2018;75:72-81.
- [76] Konaković M, Crane K, Deng B, Bouaziz S, Piker D, Pauly M. Beyond developable: Computational design and fabrication with auxetic materials. *SIGGRAPH'16 Technical Paper*; 2016.
- [77] Chen T, Panetta J, Schnaubelt M, Pauly M. Bistable auxetic surface structures. *ACM Trans Graph* 2021;40(4):1-9.
- [78] Konaković-Luković M, Panetta J, Crane K, Pauly M. Rapid deployment of curved surfaces via programmable auxetics. *ACM Trans Graph* 2018;37(4):1-13.
- [79] Naboni R, Mirante L. Computational design and simulation of bending-active auxetic structures. *Gestão e Tecnologia de Projectos* 2016;11(2):59-71.
- [80] Naboni R, Pezzi SS. Embedding auxetic properties in designing active-bending gridshells. *SiGraDi*; 2016, pp. 720-726.
- [81] Naboni R, Sartori S, Mirante L. Adaptive-curvature structures with auxetic materials. *Advanced Materials Research* 2018;1149:53-63.
- [82] La Magna R, Knippers J. Tailoring the bending behaviour of material patterns for the induction of double curvature. *Humanizing Digital Reality*; 2018, pp. 441-452.
- [83] Howell LL. *Compliant Mechanisms*. New York: Wiley; 2001.
- [84] Zingoni A. *Shell structures in civil and mechanical engineering: theory and analysis* 2nd Ed. ICE Publishing 2017.
- [85] 加藤史郎, 仁保裕, 金鐘敏. 等分布鉛直荷重を受ける円筒ラチス屋根の部材断面算定法. *日本建築学会構造系論文集* 2005;588:119-126.
- [86] Guo Y, Zhang J, Chen L, Du B, Liu H, Chen L, Li W, Liu Y. Deformation behaviors and energy absorption of auxetic lattice cylindrical structures under axial crushing load. *Aerospace Science and Technology* 2020;98:105662.
- [87] Wang Y, Zhao W, Zhou G, Wang C, Gao Q. Parametric design strategy of a novel cylindrical negative Poisson's ratio jounce bumper for ideal uniaxial compression load-displacement curve. *Science China Technological Science* 2018;61:1611-1620.
- [88] Karnesis N, Burriesi G. Uniaxial and buckling mechanical response of auxetic cellular tubes. *Smart Materials and Structures* 2013;22(8).
- [89] Ishida S. Design of cylindrical honeycomb cores - Geometric consideration -. *Mechanical Engineering Journal* 2018;5(4):1-9.
- [90] Ishida S, Ahmad NA, Oka K. Numerical analysis on rigidity of cylindrical honeycomb cores under

- radial loads. *Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering* 2020;7(1):189-200.
- [91] Scarpa F, Smith CW, Ruzzene M, Wade MK. Mechanical properties of auxetic tubular truss-like structures. *Physical Status Solidi (b)* 2008;245(3):584-590.
- [92] Lee W, Jeong Y, Jesung Y, Huh H, Park SJ, Park SH, Yoon J. Effect of auxetic structures on crash behavior of cylindrical tube. *Composite Structures* 2019;208:836-846.
- [93] Pan C, Han Y, Lu J. Structural design of vascular stents: a review. *micromechines* 2021;12(770):1-26.
- [94] Wu W, Geng L, Niu Y, Qi D, Cui X, Fang D. Compression twist deformation of novel tetra-chiral architected cylindrical tube inspired by towel gourd tendrils. *Extreme Mechanics Letters* 2018;20:104-111.
- [95] Hou W, Yang X, Zhang W, Xia Y. Design of energy-dissipating structure with functionally graded auxetic cellular material. *International Journal of Crashworthiness* 2018;23(4):366-376.
- [96] Luo C, Han CZ, Zhang XY, Zhang XG, Ren X, Xie YM. Design, manufacturing and applications of auxetic tubular structures: A review. *Thin-Walled Structures* 2021;163:107682.
- [97] Spadoni A, Ruzzene M. Elasto-static micropolar behavior of a chiral auxetic lattice. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 2012;60:156-171.
- [98] Geng LC, Ruan XL, Wu WW, Xia R, Fang DN. Mechanical properties of selective laser sintering SLS additive manufactured chiral auxetic cylindrical stent. *Experimental Mechanics* 2019;59:913-925.
- [99] Smith CW, Grima JN, Evans KE. A novel mechanism for generating auxetic behaviour in reticulated foams: missing rib foam model. *Acta mater* 2000;48:4349-4356.
- [100] Lee JW, Soman P, Park JH, Chen S, Cho D-W. A tubular biomaterial construct exhibiting a negative Poisson's ratio. *PLoS ONE* 2016;11(5):1-14.
- [101] Dolla WJS, Fricke BA, Becker BR. Structural and drug diffusion models of conventional and auxetic drug-eluting stents. *J Medical Devices* 2007;1:47-55.
- [102] Theocaris PS, Stravroulakis GE, Panagiotopoulos PD. Negative Poisson's ration in materials with a star-shaped microstructure. A numerical homogenization approach. *Arch Appl Mech* 1997;67:274-286.
- [103] Logakannan KP, Ramachandran V, Rengaswamy J, Ruan D. Stiffened star-shaped auxetic structure with tri-directional symmetry. *Composite Structures* 2022;279:114773.
- [104] Gatt R, Caruana-Gauci R, Attard D, Casha AR, Wolak W, Dudek K, Mizzi L, Grima JN. On the properties of real finite-sized planar and tubular stent-like auzetic structures. *Phys Status Solidi B* 2014;251(2):321-327.
- [105] Zhang XY, Ren X, Wang XY, Zhang Y, Xie YM. A novel combined auxetic tubular structure with enhanced tunable stiffness. *Composite Part B* 2021;226:109303.
- [106] Wu W, Hu W, Qjan G, Liao H, Xu X, Berto F. Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: A review. *Materials and Design* 2019;180:107950.
- [107] Frenzel T, Kadic M, Wegener M. Three-dimensional mechanical metamaterials with a twist.

Science 2017;358(6366):1072-1074.

- [108] Frenzel T, Hahn V, Ziemke P, Schneider JLG, Chen Y, Kiefer P, Gumbsch P, Wegener M. Large characteristic lengths in 3D chiral elastic metamaterials. *Communications Materials* 2021;2(4).
- [109] Ma C, Lei H, Hua J, Bai Y, Liang J, Fang D. Experimental and simulation investigation of the reversible bi-directional twisting response of tetra-chiral cylindrical shells. *Composite Structures* 2018;203:142-152.
- [110] Farrell DT, McGinn C, Bennett GJ. Extraction twist deformation response of an auxetic cylindrical structure inspired by deformed cell ligaments. *Composite Structures* 2020;238:111901.
- [111] Lipton JI, MacCurdy R, Manchester Z, Chin L, Cellucci D, Rus D. Handedness in shearing auxetics creates rigid and compliant structures. *Science* 2018;360:632-635.
- [112] Meng L, Shi J, Yang C, Gao T, Hou Y, Song L, Gu D, Zhu J, Breitkopf P, Zhang W. An emerging class of hyperbolic lattice exhibiting tunable elastic properties and impact absorption through chiral twisting. *Extreme Mechanics Letters* 2020;40:100869.
- [113] D'amico B, Kermani A, Zhang H. Form finding and structural analysis of actively bent timber grid shells. *Eng Struct* 2014;81:195-207.
- [114] Fujita S, Ohsaki M. Shape optimization of free-form shells using invariants of parametric surface. *Int J Space Struct* 2010;25(3):143-157.
- [115] Meyer M, Desbrun M, Schöder P, Barr AH. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In: Hege HC, Polthier K, (eds). *Visualization and Mathematics III*. Berlin: Springer 2003; pp. 35-57.
- [116] Pinkall U, Polthier K. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experimental Mathematics* 1993;2(1):15-36.
- [117] Sullivan JM. Curvature measures for discrete surfaces. *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*; 2005.
- [118] Hasançebi O, Çarbas S, Doğan E, Erdal F, Saka MP. Comparison of nondeterministic search techniques in the optimum design of real size steel frames. *Comput Struct* 2010;88(17-18):1033-48.
- [119] Saka MP, Hasançebi O, Geem ZW. Metaheuristics in structural optimization and discussions on harmony search algorithm. *Swarm Evol Comput* 2016;28:88-97.
- [120] Kaveh A, Javadi SM. Chaos-based firefly algorithms for optimization of cyclically large-size braced steel domes with multiple frequency constraints. *Comput Struct* 2019;214:28-39.
- [121] Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization, *Proc ICNN'95 – Int Conf on Neural Networks (ICNN95)* 1995;4:1942-1948.
- [122] Fortin FA, De Rainville FM, Parizeau M, Gagné C. DEAP: Evolutionary algorithm made easy, *Journal of Machine Learning Research* 2012;13:2171-2175.
- [123] https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.dual_annealing.html
- [124] Gibson LJ, Ashby MF, Schajer GS, Robertson CI. The mechanics of two-dimensional cellular materials. *Proc R Soc London A: Math Phys Eng Sci* 1982;382(1782):25-42.

- [125] Masters IG, Evans KE. Models for the elastic deformation of honeycombs. *Compos Struct* 1996;35(4):403-422.
- [126] Lakes RS. Design considerations for materials with negative Poisson's ratios. *Journals of Mechanical Design ASME* 1993;115:696-700.
- [127] Evans KE. The design of doubly curved sandwich panels with honeycomb cores. *Composite Structures* 1993;17(2):95-111.
- [128] Nealen A, Igarashi T, Sorkine O, Alexa M. Laplacian mesh optimization. *Proc 4th Int Conf on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australasia and Southeast Asia (GRAPHITE 06)*; 2006, pp. 381-389.
- [129] Douthe C, Caron JF, Baverel O. Gridshell structures in glass fibre reinforced polymers. *Construction and Building Materials* 2010;24:1580-1589.
- [130] pyswarm 0.6. Web Site. <https://pythonhosted.org/pyswarm/>
- [131] Iijima S. Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature* 1991;354:56-58.
- [132] Kotani M, Naito H, Omori E. A discrete surface theory. *Computer Geometric Design* 2017;58:24-54.
- [133] 数理科学編集部. 数理科学 2021 年 3 月号 特集カイラリティとは何か. サイエンス社 2021.
- [134] Barron LD. From cosmic chirality to protein structure: Lord Kelvin's legacy. *CHIRALITY* 2012;24:879-893.
- [135] Krenk S. *Nonlinear modeling and analysis of solids and structures*. Cambridge University Press, Cambridge 2009.
- [136] Nielsen MB, Krenk S. Explicit free-floating beam element. *Int J Numer Meth Engng* 2014;98:59-78.
- [137] 柏宗孝, 小野田淳次. 動的緩和法による膜構造物のしわ解析. 膜構造研究論文集 2006.
- [138] Ali NBH, Sychterz AC, Smith IFC. A dynamic-relaxation formulation for analysis of cable structures with sliding-induced friction. *Int J Solids Struct* 2017;126-127: 240-251.
- [139] Ali NBH, Rhode-Barbarigos L, Smith IFC. Analysis of clustered tensegrity structures using a modified dynamic relaxation algorithm. *Int J Solids Struct* 2011;48: 637-647.
- [140] Zhang J, Ohsaki M. Form-finding of complex tensegrity structures by dynamic relaxation method. *J Struct Constr Eng AIJ* 2016;81(719):71-77.
- [141] Gill PE, Murray W, Saunders MA. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM J Opt.* 2002;12:979-1006.

発表論文リスト

本論文に関する発表論文

■全文査読論文（3編）

- 1) [Sakai Y](#), Ohsaki M. Optimization method for shape design of auxetic bending-active gridshells using discrete differential geometry. Structures 2021;34:1589-1602.
- 2) [Sakai Y](#), Ohsaki M. Parametric study of non-periodic and hybrid auxetic bending-active gridshells. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures 2020;61(4):275-284.
- 3) [Sakai Y](#), Ohsaki M, Adriaenssens S. A 3-dimensional elastic beam model for form-finding of bending-active gridshells. International Journal of Solids and Structures 2020;193-194:328-337.

■口頭発表（7編）

- 1) [Sakai Y](#), Ohsaki M. Shape optimization of auxetic bending-active gridshells with non-uniform reentrant patterns. World Congress of Structural Multidisciplinary Optimization 14 June 2021.
- 2) [Sakai Y](#), Ohsaki M, Adriaenssens S. 3-dimensional elastic beam model for large-deformation analysis of bending-active gridshells. Proc IASS Symposium 2019. Barcelona, Spain. Int Assoc Shell and Spatial Struct 2019.
- 3) [堺 雄亮](#), [大崎 純](#), 均一な六角形ユニットを有する円筒機構の静的構造解析, 日本応用数理学会予稿集 pp. 113-114, 2021.
- 4) [堺 雄亮](#), [大崎 純](#), 周期的な六角形格子で構成されるオーゼティック円筒機構の形状設計法, 日本建築学会大会学術講演梗概集（東海）, B1, No. 20374, pp. 747-748, 2021.
- 5) [堺 雄亮](#), [大崎 純](#), 粒子群最適化法を用いた Auxetic Bending-Active Gridshell の形状設計法, 第43回 情報・システム・利用・技術シンポジウム, 日本建築学会・情報システム技術委員会, No. H09, pp. 96-99, 2020.
- 6) [堺 雄亮](#), [大崎 純](#), 離散微分幾何学を用いたオーゼティック・ベンディングアクティブ・グリッドシェル の最適設計法, 日本建築学会近畿支部研究報告集, Vol. 60, 構造系, pp. 269-272, 2020.
- 7) [堺 雄亮](#), [大崎 純](#), 3次元弾性梁モデルの開発と動的緩和法によるグリッドシェルの大変形解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集（北陸）, B1, No. 20448, pp. 895-896, 2019.

その他の発表論文

■全文査読論文（2編）

- 1) 堺 雄亮, 大崎 純. 膜応力の平面投影成分を用いた自由曲面シェルのノンパラメトリック形状設計法. 日本建築学会技術報告集 2021;27(66):1099-1103.
- 2) Sakai Y, Ohsaki M. Discrete elastica for shape design of gridshells. Eng Struct 2018;169:55-67.

■国際会議プロシーディングス（2編）

- 1) Sakai Y, Ohsaki M. Approximate shape design of gridshells using spatial elastica. Proc IASS Symposium 2018. Boston, USA. Int Assoc Shell and Spatial Struct 2018:143.
- 2) Sakai Y, Ohsaki M. Discrete elastica model for shape design of grid shells. Proc IASS Symposium 2017. Hamburg, Germany. Int Assoc Shell and Spatial Struct 2017: 9557.

■国内会議論文（10編）

- 1) 竹岡里玲英, 大崎 純, 堺 雄亮, 水平方向反力を指定した曲線境界を持つ自由曲面シェルの形状設計と構造解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集（東海）, B1, No. 20373, pp. 745-746, 2021.
- 2) 堺 雄亮, 大崎 純, 有限差分法による水平面投影応力成分を用いた連続体シェルの釣合い形状設計法, 日本建築学会大会学術講演梗概集（関東）, B1, No. 20450, pp. 927-928, 2020.
- 3) 竹岡里玲英, 大崎 純, 堺 雄亮, 連続体置換を用いたグリッドシェルの形状設計法, 日本建築学会大会学術講演梗概集（関東）, B1, No. 20456, pp. 939-940, 2020.
- 4) 堺 雄亮, 大崎 純, グラフ曲面による形状表現を用いた連続体シェルの釣合い形状設計法, 日本応用数理学会講演予稿集, pp. 121-122, 2020.
- 5) 竹岡里玲英, 大崎 純, 堺 雄亮, 直交異方性平板モデルの大変形解析によるグリッドシェルの部材方向設計法, 第15回コロキウム構造形態の解析と創生講演梗概集, pp. 131-136, 2020.
- 6) 堺 雄亮, 大崎 純, 接合部座標を制約した空間離散的エラスティカによるグリッドシェルの形状設計法, 日本建築学会近畿支部研究報告集, Vol. 59, 構造系, pp. 401-404, 2019.
- 7) 堺 雄亮, 大崎 純, 3次元離散的エラスティカを用いたグリッドシェルの近似釣合い形状設計, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 日本建築学会大会講演梗概集（東北）, B1, No. 20463, pp. 925-926, 2018.
- 8) 堺 雄亮, 大崎 純, 離散的エラスティカを用いたグリッドシェルの静的構造特性, 第12回コロキウム構造形態の解析と創生講演梗概集, pp. 76-81, 2017.
- 9) 堺 雄亮, 大崎 純, 離散的エラスティカモデルの立体的配置によるグリッドシェルの形状設計法, 日本建築学会大会学術講演梗概集（中国）, B1, No. 20515, pp. 1029-1030, 2017.
- 10) 堺 雄亮, 大崎 純, 離散的エラスティカモデルを用いたグリッドシェルの形状設計法, 日本建築学会近畿支部研究報告集, Vol. 57, 構造系, pp. 429-432, 2017.

■その他（2編）

- 1) Sakai Y, Ohsaki M. Discrete elastica for shape design of gridshells. Japan-China Workshop on Analysis and Optimization of Large-scale Structures. Structural Engineering of Buildings Laboratory, Department of Architecture and Architectural Engineering, Kyoto University 2018;A15:37. <http://hdl.handle.net/2433/231248>
- 2) traverse 編集委員会 編, traverse18 新建築学研究, 「INTERVIEW 折りなすかたちの美しさ」, 全 112 頁, 担当 : 28-37 頁, 2017. (編集, 分担)

謝辞

本論文は、私が博士後期課程の3年間で取り組んだ研究成果を纏めたものです。本論文の執筆にあたり、多くの方々の懇切丁寧なご協力、ご助言を頂きました。私一人の力では本研究を遂行することはできませんでした。お世話になった方々に感謝の意を込めてここに謝辞を表します。

はじめに、恩師である京都大学教授 大崎純先生に謹んで厚くお礼申し上げます。魅力的な研究成果を途切れることなく世界に発信されている大崎先生のもとで研究したいと思い立ち、研究室を訪問してから6年が経ちました。この間、先生には日々、懇切丁寧にご指導して頂きました。大崎先生は常に、私の考えを尊重して下さり、研究活動や学外での活動等で私がやりたいと主張した多くのことについてご了承頂きました。さらに、さまざまなシンポジウムでの発表や国際的な共同研究グループへの参加等の数多くの機会を賜り、貴重な経験をさせて頂きました。大崎研究室の自由で恵まれた環境でなければ、私のような身勝手な者が博士の学位を取得することは極めて困難であったと思います。思えば、漫然と研究者になりたがっていただけの浅学な私に対し、大崎先生は研究者として生きることの覚悟や厳しさを説いてくださいました。また、凡庸な自分の能力と当時の境遇に悲嘆し、博士後期課程への進学を諦めかけていた頃には、寛大なご助言を頂きました。私がこれから研究者の一人として自信を持って歩み出すことができるのは、大崎先生のおかげです。心から厚くお礼申し上げます。

京都大学教授 竹脇出先生、同教授 西山峰広先生には、本論文審査の過程で貴重なご意見、ご指摘を賜りました。先生方の明快かつ丁寧な講義から、国際的に分野をリードする研究者が後進の者を育成する姿勢とその意義を学びました。深くお礼申し上げます。

京都大学准教授 張景耀先生には、研究室内のゼミにおいて、ご自身の空間構造に関する豊富な研究経験をもとに数多くの貴重なご意見、ご質問を賜りましたこと厚くお礼申し上げます。

名古屋市立大学講師 木村俊明先生には、シェル・空間構造の実務設計に関わる数多くの重要なご指摘、ご助言を賜りました。木村先生とは、日々の研究室生活だけでなくプリンストンや上海等への出張もご一緒させて頂く機会が多く、内容の公私に関わらず様々なことについてフランクにお話させて頂きました。厚くお礼申し上げます。

京都大学助教 林和希先生には、一つ上の学年の先輩として数多くのことについて懇切丁寧にご指導、ご助言頂きました。勤勉で実直な林先生は怠惰な私とは対照的であり、高い向上心を常に維持しておられ、その姿勢は励みになりました。申請書等の書き方や海外滞在時の作法等、きめ細やかな指導を賜りました。厚くお礼申し上げます。

Princeton University 准教授 Sigrid Adriaenssens 先生には、京都大学 Spirits プログラムを通してお世話になり、その後のプリンストン滞在時には空間構造研究の最前線を紹介して頂きました。本論文第4章は、Adriaenssens 先生との共同研究をもとに執筆致しました。共同研究の過程では、プログラムのご提

供や重要なお助言、ご指摘を頂きました。ここに厚くお礼申し上げます。

東京大学教授 川口健一先生、鹿児島大学准教授 横須賀洋平先生にはシェル・空間構造の夏ゼミでお会いし、その後も都度お世話になりました。先生方の研究・教育活動に対する精力的な姿勢からは、災害大国である日本がシェル・空間構造分野をリードして行かなければならないのだという矜持と誇りを持つことの重要性を学びました。深くお礼申し上げます。

東京大学教授 寒野善博先生、北九州市立大学准教授 藤田慎之輔先生、大阪産業大学准教授 和多田遼先生には、本論文の研究や修士課程で行った研究に関する多くの重要なお助言、ご指摘を頂きました。大崎研究室出身の先輩でもある先生方の研究者、教育者として精力的に活動する姿勢は、同門の後輩として非常に心強く、励みになりました。深くお礼申し上げます。

東京大学准教授 舘知宏先生、東京大学助教 三木優彰先生には、舘研究室のゼミに招いて頂き、本研究全般について細部に渡って貴重なご意見を頂きました。国際会議等でも先生方には度々お会いし、広範な知識をご教授頂きました。舘先生には、申請書の作成等でもお世話になりました。厚くお礼申し上げます。

京都工芸繊維大学教授 満田衛資先生には、学部3回生時のインターンにて事務所へ伺って以来、様々な機会でお世話になりました。著名な構造家である先生の豊富な知識や建築に対する熱意は、私の研究活動に対するよい刺激となりました。ここに深くお礼申し上げます。

株式会社 Nature Architects の大嶋泰介氏、須藤海氏、谷道鼓太郎氏には、私の研究に関して重要なお助言、ご指摘を賜りました。Nature Architects の皆様からは、研究成果をPCの中で完結させずに質量を持った構造物として実現させ、社会課題の解決に役立てることの意義をご教授頂きました。大学とは異なる環境における最先端の研究に協力できた経験は、非常に有意義なものでした。深くお礼申し上げます。

ソニーコンピュータサイエンス研究所 京都研究室の暦本純一氏、竹内雄一郎氏、Lana Sinapayen 氏、北森裕見子氏、柏康二郎氏には、本研究の今後の展望、意義、人類の未来にとってどのような貢献ができるか等を真正面から考えるための重要な問いを投じて頂きました。皆様との出会いは、私の研究人生における変革点であったと思います。ここに深くお礼申し上げます。

本論文の執筆にあたり、研究室の皆様のご協力は欠かせないものでした。研究室の同期である沈偉氏には、本論文の研究に関してご助言を頂きました。沈氏が真摯に研究に取り組む姿勢から、私は日常的に刺激を受けていました。早川健太郎氏には、研究や最先端の技術は勿論のこと、雑駁な話題に関しても親切に議論して頂きました。早川氏は研究室の運営を率先して行ってくださいました。竹岡里玲英氏には、私の研究に関係するテーマを引き継いで頂き、ミーティングを通じて研究内容に関する数多くの議論をして頂きました。竹岡氏には、私が着手しきれなかったテーマを大きく進めて頂きました。秘書の齊木彩文氏には、研究活動に関する様々な手続きにご協力頂きました。様々なご面倒をおかけしましたが、親切にご対応頂きました。皆様に厚くお礼申し上げます。

私の6年間の研究生活は多くの方々のご協力の上で成り立っていたことに改めて気づかされました。ここには書き切れなかった多くの方々から、日々、様々な形で激励、ご支援を頂きました。本論文は数多の幸運によって、このような形で完成を迎えることができました。改めてここに感謝の意を表します。

最後に、突出した才能のない私が博士の学位を取得するという挑戦を認めてくれた家族と、学部時代から現在に至るまで心身共に支えてくれた妻に感謝の気持ちを捧げます。

2022年1月

堺 雄亮