

京都大学	博士（工学）	氏名	高倉 龍
論文題目	Convexity and uncertainty in operational quantum foundations (操作論的な量子論基礎における凸性と不確定性)		
(論文内容の要旨)			
<p>古典論と量子論の最も本質的な違いは何か、またなぜ自然は量子論で記述されるのかといった問題を明らかにしようとする試みは、不確定性関係やベルの不等式といった多くの重要な結果を生み出してきた。量子論基礎と呼ばれるこの分野は、基礎的な重要性を持つのみならず、量子暗号の解析など応用面の発展にも大きく貢献しており、現在に至るまで活発な研究が続けられている。本論文では、量子論基礎に関して、特に量子論の凸性と不確定性に注目し、操作論的な立場から量子論の基礎を掘り下げる研究がまとめられている。</p> <p>第二章では、第一章の導入に続き、本論文で解析が行われる一般確率論が導入される。一般確率論は、確率的混合に由来する凸性のみを条件に課した極めて広い理論の枠組みであり、量子論や古典論を含むものである。本章では、系の次元を限定することなく極めて一般的な記述からはじめ、埋め込み定理に至るまでの重要な結果が、数学的厳密性を犠牲にすることなく詳述されている。また、合成系の概念や、近年導入された両立不可能性の定式化も一般的枠組みのもとで紹介されている。更に、第三章以降で扱われる状態空間とエフェクト空間に関する自己双対性を有する理論や、古典論と量子論の中間に位置する正多角形理論などの例も取り上げられている。</p> <p>第三章では、一般確率論の枠組み内で不確定性関係が議論されている。現代的な量子測定理論では、状態準備に関する不確定性関係と同時測定に関する不確定性関係という二つの異なる不確定性関係が区別されている。二つの非可換な物理量に対して、前者はその両者に確定値を与えるような状態は存在しないということに関する定量的表現、後者はそれらが同時に測定はできないということに関する定量的表現となっている。2011年に、一見無関係と思われるこれら二つの不確定性関係が、ある種の等価性をもつことが示された。本章では、この等価性が量子論にとどまらず、自己双対性をもつ一般確率論においても成り立つことを厳密に証明している。そのために、まず量子論における射影作用素値物理量（シャープな物理量）の概念が、一般確率論の枠組みへ拡張される。その後、状態空間の端点が有限個である場合には、理論がある内積（状態空間が埋め込まれている空間で定義されている）について自己双対性を持てば、より自然な内積について自己双対性を持つことが示されている。この準備の下、一般確率論における物理量に対して、全体幅とエラー幅という二つの概念が導入される。その後、これらを用いた不確定性関係の定量化について、二つの不確定性関係の等価性が証明されている。また、エントロピーを用いた定量化についても同様の結果が提示されている。これらの結果の導出には、既存の量子論における証明とは異なり、エンタングルメントを用いない新しい手法が用いられている。</p>			

京都大学	博士 (工 学)	氏名	高倉 龍
------	------------	----	------

第四章は、量子論における両立不可能性に関する研究の説明にあてられている。両立不可能性は前章で説明した同時測定に関する不確定性関係の拡張であり、更に広くコピー不可能性定理といった量子論における種々の不可能性を合わせて表現することができる概念である。本章では状態空間の凸性に基づき、複数の両立不可能な操作の組に対して、両立可能性次元および両立不可能性次元という新たな定量化を導入している。これらの量は両立不可能性の判定に幾つの状態が必要かという操作的な観点から定義されるものであり、整数を値にとる。まず、これらの量に関していくつかの基本的な性質が述べられたのち、上限および下限の導出が行われている。特に、両立不可能性次元の上限については、両立不可能性ウィットネスと呼ばれる概念との関係を明らかにすることで求められており、これは両立不可能性の検証における状態の選択に対しても示唆を与えるものとなっている。その後、最も簡単な量子系である量子ビット系におけるノイズを含んだ物理量の組について、これらの量を具体的に評価している。その結果として、両立可能性次元はノイズによらず一定であるのに対し、両立不可能性次元はノイズの大きさにより、二つの異なる値を取ることが証明されている。

第五章では一般確率論に拡張された熱力学エントロピーに関する研究が述べられている。近年、エントロピーの概念が一般確率論に拡張されその性質が調べられている。しかし、それらの研究では物理的な意味を持つエントロピーの拡張が考えられているというよりむしろ可能な拡張が数学的に議論されているに過ぎず、量子論におけるエントロピー（フォンノイマンエントロピー）を特徴づけるには至っていなかった。これに対し、本章では、操作論的な観点から熱力学における混合のエントロピーが満たすべき関係式が導出され、そのエントロピーの正多角形理論における詳細な振る舞いが論じられている。その結果として、正多角形理論においては古典論（三角形）と量子論（円）でのみ操作的に自然な混合のエントロピーが存在可能であることが証明されている。この結果は正多角形理論に限定されたものであるが、一般確率論の中で量子論のエントロピーがいかに特徴的かを表すものとなっている。また、当研究はマクロなエントロピーの存在という熱力学的な要請からエントロピーが拠って立つミクロな理論を特徴づけようという発想で行われている点においても特徴的である。

第六章は全体のまとめと今後の展望が記されている。

(論文審査の結果の要旨)

量子論基礎の研究においては、量子論の公理を仮定し量子論の限界を探る手法と、量子論を含む一般的な枠組みを導入し量子論の特徴づけを探る手法がある。本論文では、これら両方の手法を用い、特に操作の確率的混合に由来する凸性と不確定性に焦点をあてた研究がおこなわれている。主な内容と成果は以下の通りである。

(1) 量子論や古典論などを含む一般的枠組みである一般確率論において不確定性関係を研究した。現代的な測定理論においては、状態準備に関する不確定性関係と同時測定に関する不確定性関係の二つの異なる不確定性関係が存在する。量子論においては、適切な定量化を用いることにより、これら不確定性関係どうしに密接な関係があることが示されていた。また、この密接な関係は量子論特有のものではないかという予想があった。これに対し、本論文は、量子論以外でも自己双対性をもつ一般確率論においてはこの関係が成り立つことを示している。これは、従来の予想を覆すという点で重要であり、また同時測定に関する不確定性関係の新たな導出方法にも応用されるという点で有用である。

(2) 量子論において、複数の操作の両立不可能性を検証するために必要な状態数を考え、新たな定量化である両立可能性次元と両立不可能性次元を導入した。これらの量の基本的性質を調べたのち、特に両立不可能性ウィットネスとの関連性を用いて、両立不可能性の検証の具体的方法への示唆を与える結果を導いている。また、量子ビット系における X と Z にそれぞれノイズを加えた物理量の組に対して、両次元の評価がなされている。その結果、両立不可能性次元についてはノイズの大きさにより不連続的に値が変化することが示された。この結果は、両立不可能な操作に対して新たなクラス分けを導入するものである。また、両次元は古典的操作によるシミュレーション可能性とも関係しており、量子情報への応用可能性も高いものと思われる。

(3) 一般確率論において、熱力学における混合のエントロピーの満たすべき関係式を導出し、正多角形理論においてその関係式を検証した。その結果、この関係式を満たすエントロピーが定義できるのは、状態空間が三角形(古典論に対応)と円(量子論に対応)である場合のみであることを示した。これは、量子論の特徴づけを熱力学というマクロな領域から考えたという点において、独創的な結果である。

以上のように本論文は凸性と不確定性を軸としながら、いくつかの異なる側面から量子論基礎に関する研究を行ったものである。各章ともに、発想が独創的であり、また結果は数学的厳密性を疎かにせず一般性の高いものとなっており、本論文は、学術上、實際上寄与するところが少なくない。よって本論文は博士(工学)の学位論文として価値あるものと認める。また、令和4年1月26日に論文内容とそれに関する試問を行い、申請者が博士後期課程学位取得基準を満たしていることを確認し、合格と認めた。