

(続紙 1)

京都大学	博士 (人間・環境学)	氏名	中島由人
論文題目	Transversal family of non-autonomous conformal iterated function systems and the connectedness locus in the parameter space (非自励的等角反復関数系の横断的族と連結性パラメータ集合)		
(論文内容の要旨)			
<p>本論文ではフラクタル集合とフラクタル幾何学を扱う。そのなかでも特に様々な自励系および非自励系の反復関数系とその極限集合を扱い、さらにパラメータ空間について論じている。</p> <p>1970年代半ばよりB. Mandelbrot氏によりフラクタル幾何学が創設され、そのような集合の解析の重要性が認識されてから、フラクタル集合は数学の表舞台に登場することとなり、その様々な解析方法が提案され、フラクタル幾何学の理論の飛躍的な発展が続いている。なお、フラクタル集合や自己相似性を持つ構造は純粋数学のみならず自然科学・社会科学の様々な文脈で登場している。この論文では、フラクタル集合の数学的モデルとして扱われ、それ自身が数学のなかでも重要な役割を果たすと考えられる、「反復関数系(複数の縮小写像のなす族)の極限集合」を取り上げ、さらに「反復関数系のパラメータ空間」を考察している。従来の研究では写像の一つの組を固定する「自励系反復関数系」が主に考えられてきたが、近年、時刻に応じて写像の組が変化する、「非自励系反復関数系」の研究が盛んになってきており、本論文においても非自励系反復関数系を取り上げている。なお自然界においては一般にノイズなどにより時刻に応じてシステムが変化することが考えられること、また自励系反復関数系の極限集合の断面が非自励系反復関数系の極限集合として記述されうることなどから、非自励系反復関数系は重要であると認識されている。</p> <p>この論文は4つの章から成り立っている。以下で各章の内容を述べる。</p> <p>第1章では、まずこれまでの反復関数系の研究の概観が与えられ、その後で必要な用語が定義されて横断性的の方法やパラメータ空間における連結性集合の紹介がなされたあと、論文を通じての主結果にあたる主定理A-Fが提示されている。</p> <p>第2章では、横断性条件を満たす非自励系等角反復関数系族が導入され、考察される。ここで、反復関数系の理論でよく仮定される「開集合条件」という都合のよい条件を、この論文では仮定しないところが重要である。このことにより、極限集合のミニチュアたちの重なり具合が大きいような扱いの難しい反復関数系をも論じることが可能になる。横断性条件を満たす非自励系等角反復関数系族に対して、ほとんどすべてのパラメータについて、対応する非自励系反復関数系の極限集合の次元が、Bowen次元と相空間の次元の小さい方と一致するという結果(主定理A)が証明されている。また、開集合条件を満たさないような、横断性条件を満たす非自励系等角反復関数系族の具体例が存在すること(主定理B)が示され、その具体例に関して、ほとんどすべてのパラメータについて非自励系反復関数系の極限集合のハウスドルフ次元が計算されている。</p> <p>第3章では、コンパクト集合を保存しないような、複素平面上の非有界非自励系等角反復関数系の族が考察されている。なお、この族の各系はコンパクト集合を保存しないために、第3章の結果が適用できない。横断性条件の手法を用いることによって、ほとんどすべてのパラメータについて、対応する非自励系等角反復関数系の極限集合</p>			

のハウスドルフ次元がBowen次元と相空間の次元2の小さい方と一致することなど（主定理C）と、例外的なパラメータの集合のハウスドルフ次元の評価についての結果（主定理D）が証明されている。これらの定理の証明においては、扱う非自励系等角反復関数系が非有界であることから生じる様々な困難に打ち勝つための新しいアイデアと手法が導入されている。

第4章では、フラクタル n 角形と呼ばれる複素平面内のある種のフラクタルを極限集合として持つような、複素平面上の等角反復関数系の族が考察されている。2以上の任意の自然数 n について、フラクタル n 角形が連結となるようなパラメータ集合 M_n が連結であること（主定理E）が示されている。それを示すために、ある条件を満たす正則関数族の零点集合が連結であること（主定理F）が示されている。なお、論文中で M_n は上記の条件を満たすある正則関数族の零点集合であると示されており、それによって上記の M_n に主定理Fを適用して M_n が連結であることを示すことができる。

(論文審査の結果の要旨)

既存のフラクタル幾何学、反復関数系の研究においては、コンパクト集合上の縮小写像の一つの組を固定して、その組のなす極限集合を考えることが多かった。本論文では各時刻において縮小写像の組が変化する「非自励系反復関数系」を扱い、さらにコンパクト集合を保存するという仮定を取り除いた非有界反復関数系を組織的に扱っている。いずれも非常に新しい研究対象であり、申請者ならではの視点と斬新なアイデアが多く含まれている。さらに申請者はフラクタル n 角形のパラメータ空間の研究においても画期的な新しいアイデアを導入している。以下に本論文の第2章から第4章に述べられている申請者の結果と手法の重要性、意義および新規性を述べていく。

第2章においては横断性条件を満たす非自励系等角反復関数系族の研究が述べられ、主定理Aにおいて、ほとんどすべてのパラメータについて対応する反復関数系の極限集合のハウスドルフ次元が考察されている。既存の反復関数系の研究では「開集合条件」という、極限集合のミニチュアたちが互いにある程度分離されていることが保証される都合のいい条件を仮定することが多いが、ここではその条件を仮定しないことと、非自励系反復関数系を扱うということにより、既存の研究で扱われてきた反復関数系とフラクタル図形のクラスと比べて非常に広いクラスのものがあるようになっていくところが重要である。また、開集合条件を仮定しないで横断性条件のみを課すこと、非自励系であることの両者からくる困難が数多くあるが、申請者はギブス性を持つ測度の構成を行うことによって横断性条件の方法をうまく拡張することに成功しており、証明手法に非常に注目すべきものがある。さらに開集合条件を満たさないが横断性条件を満たす非自励系反復関数系の例を発見した結果（主定理B）は非常に興味深いものである。なおそのような例の明示は既存の研究においてはほとんど見当たらず、大変貴重である。また、申請者は、本論文では述べていないが、ある論文においてある種の自励系反復関数系の極限集合の断面が非自励系反復関数系の極限集合とみなせることなどを発見しており、非自励系反復関数系の研究が今後重要視されることが予想されている。申請者は第2章の内容を単著論文「Transversal family of non-autonomous conformal iterated function systems」としてまとめ専門誌へ投稿する予定である。

第3章においてはコンパクト集合を保存しない、複素平面上におけるある種の非有界等角反復関数系の族が考察され、ほとんどすべてのパラメータについて対応する反復関数系の極限集合のハウスドルフ次元が計算されている。ここでもやはり横断性条件の方法をうまく発展させている。なお、コンパクト集合を保存しないような非自励系反復関数系の研究は以前に角の研究室に所属した伊藤寛治によって始められたが、そのような反復関数系の極限集合のハウスドルフ次元の研究は申請者のこの学位論文によるものが世界で初めてであり、非常にインパクトのあるものになっている。さらにそこで横断性条件の方法を使ったということで非常に興味深いものになっている。

扱う非自励系反復関数系が非有界であるために様々な技術的な困難が生じるのであるが、申請者は卓越した新しいアイデアによりそれらの困難をうまく乗り越えている。なお非有界非自励系反復関数系は伊縫寛治と申請者の研究以外には何も研究例がない広大な未知の研究分野であるが、興味深い例が多く発見されており、これからの研究の発展がおおいに期待される。第3章の内容は申請者の単著査読有論文

「The Hausdorff dimension of some planar sets with unbounded digits」としてまとめられ学術誌 Osaka Journal of Mathematics に掲載決定となっている。

第4章においては2以上の任意の自然数 n について、フラクタル n 角形が連結となるパラメータの集合 M_n が連結となる、という結果（主定理F, G）が示されている。なお先行研究では、Bouschが $n=2, 3$ の場合に M_n の連結性を詳細な証明付きで示しており、さらにBouschは氏の学位論文において4以上の任意の n についても M_n が連結となる、と主張していたが、4以上の n の場合に関してはその証明方法が氏の学位論文中でごく粗く述べられていただけであり、証明の詳細がよく分からない状態であった。申請者は学位論文において、 M_n をある種の良い正則関数の族の零点集合としてとらえることにより、Bouschの研究におけるものとは異なる手法を用いて、 M_n の連結性の証明を完全にしかも非常に明瞭に与えることに成功した。なお、その証明において提示された、 M_n がある種の良い正則関数の族の零点集合とみなせるという視点や、申請者が導入した新しい構想と技法などはいずれも大変に重要であり、かつ証明法がランダム正則関数などの他分野の話題との関連を持つことも非常に興味深い。申請者は第4章の内容を単著論文「 M_n is connected」としてまとめ現在専門誌に投稿中である。

以上のことから、本論文は博士（人間・環境学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和4年1月17日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日： 令和 年 月 日以降