

# 区分線形ランダム写像に対する 逆正弦法則と Darling-Kac 法則

矢野孝次 (京都大学)

ランダムウォークに対して成立する逆正弦法則と Darling-Kac 法則に類似の結果は力学系に対しても成立することが知られている。本報告では、秦元仁氏の修士論文 [3] を元にした秦氏との共同研究 [4] に基づき、ある区分線形区間写像のランダム切り替えによるランダム力学系に対して逆正弦法則と Darling-Kac 法則が成立することを報告する。

## 1 ランダムウォークに対する逆正弦法則と Darling-Kac 法則

逆正弦分布に従う確率変数を  $\mathcal{A}$  と書く：

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} \in du) = \frac{du}{\pi\sqrt{u(1-u)}} \quad \text{on } (0, 1). \quad (1.1)$$

一次元単純対称ランダムウォーク  $\{Z_n\}$  に対してレヴィの逆正弦法則

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k > 0\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A} \quad \text{on } \mathbb{R} \quad (1.2)$$

が成立する。有限区間の滞在割合がゼロに概収束することに注意すると、この主張は、次のようにも書き換えられる：

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A}\delta_{+\infty} + (1 - \mathcal{A})\delta_{-\infty} \quad \text{on } \mathcal{P}[-\infty, \infty]. \quad (1.3)$$

但し、 $[-\infty, \infty]$  は  $\mathbb{R}$  の二点コンパクト化であり、 $\mathcal{P}S = \mathcal{P}(S)$  は位相空間  $S$  上の確率測度全体に弱収束の位相を入れた空間を表す。同相写像  $\Phi : [-\infty, \infty] \rightarrow [0, 1]$  を用いると、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\Phi(X_k)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A}\delta_1 + (1 - \mathcal{A})\delta_0 \quad \text{on } \mathcal{P}[0, 1]. \quad (1.4)$$

という形に上の主張を書き換えることができる。

ランダムウォークの軌道を、時間  $1/c$  倍、空間を  $1/\sqrt{c}$  倍して極限をとるとブラウン運動に分布収束する (fig. 1) が、例えば  $\Phi(x) = e^{2x}/2$  ( $x < 0$ )、 $= 1 - e^{-2x}/2$  ( $x \geq 0$ ) で定まる同相写像  $\Phi$  で変換したグラフ (fig. 2) を見ると、軌道はほとんどの時間を 0 または 1 の近傍で過ごすことがわかる。

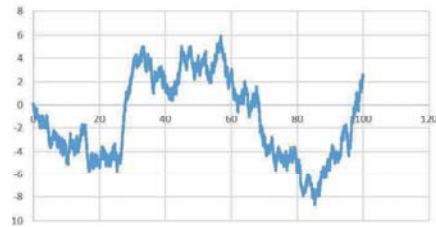


fig 1. ランダムウォーク軌道の線形スケール変換

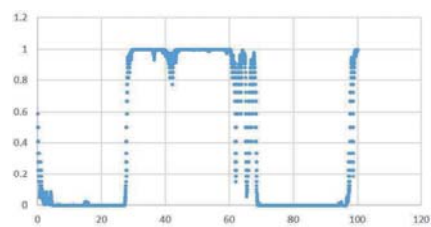


fig 2. ランダムウォーク軌道の  $[0, 1]$  区間への変換

正規分布に従う確率変数を  $\mathcal{N}$  と書く:

$$\mathbb{P}(\mathcal{N} \in du) = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du \quad \text{on } \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

ここで  $\mathcal{M} := |\mathcal{N}|/\sqrt{\pi}$  とおくと、その分布は Mittag-Leffler 分布と呼ばれる分布のクラスの特別な場合になっている。一次元単純対称ランダムウォーク  $\{Z_n\}$  に対して、有限区間の滞在割合はゼロに概収束するが、その揺らぎについて Darling-Kac 法則

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k \in E\}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\#E)\mathcal{M} \quad \text{on } \mathbb{R} \quad (1.6)$$

が成立する。但し、 $E$  は  $\mathbb{Z}$  の任意の有限部分集合であり、 $\#E$  は  $E$  の点の個数を表す。

## 2 力学系に対する逆正弦法則と Darling-Kac 法則

$Sx = x - 1/x$  で定まる変換  $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は プール変換 と呼ばれるが、変数変換  $\Phi: (0, 1) \ni x \mapsto \frac{2x-1}{x(1-x)} \in \mathbb{R}$  によって変形された変換  $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  と同一視する:

$$Tx = \begin{cases} \frac{x(1-x)}{1-x-x^2} & (0 \leq x < 1/2) \\ 1 - T(1-x) & (1/2 < x \leq 1). \end{cases} \quad (2.1)$$

この変換は、不動点  $x = 0, 1$  の近傍を除くと拡大的であるが、不動点  $x = 0, 1$  においては微分が丁度 1 であるために、この点の付近に滞在する時間が支配的となる。一般に、微分が  $\pm 1$  となる不動点は中立 (neutral あるいは indifferent) と呼ばれる。

**定理 2.1** (Thaler [7]). 絶対連続な分布を持つ任意のランダム初期点  $\Theta \in [0, 1]$  に対し、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{T^k \Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A} \delta_1 + (1 - \mathcal{A}) \delta_0 \quad \text{on } \mathcal{P}[0, 1] \quad (2.2)$$

が成り立つ。

この結果が示すように、プール変換の軌道もまた、ランダムウォークと同様に、ほとんどの時間を 0 または 1 の近傍で過ごすことがわかる。

プール変換  $S$  はルベーグ測度を不変に保つことから、その変形  $T$  は

$$\mu(dx) = \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} \right) dx \quad \text{on } (0, 1) \quad (2.3)$$

を不変に保つ。この測度は  $(0, 1)$  において局所有限であり、0 と 1 の近傍では発散測度を持つ。また、絶対連続かつ  $\sigma$ -有限な不変測度はこの定数倍に限られることも知られている。

**定理 2.2** (Aaronson [1]).  $\mu(E) < \infty$  なるボレル集合  $E \subset (0, 1)$  と絶対連続な分布を持つランダム初期点  $\Theta \in [0, 1]$  に対し、

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \delta_{T^k \Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\mu(E))\mathcal{M} \quad \text{on } \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad (2.4)$$

が成り立つ。

これらの結果はより一般的な中立不動点を持つ力学系に対する結果の特別な場合として示されており、他にもさらなる一般化が得られている (関連文献は Sera [6] にまとめられている)。

### 3 ランダム力学系に対する逆正弦法則と Darling–Kac 法則

二つの写像  $\tau_1, \tau_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  と定数  $p \in (0, 1)$  に対し, ランダム写像  $T$  を

$$T = \begin{cases} \tau_1 & (\text{with probability } p), \\ \tau_2 & (\text{with probability } 1 - p) \end{cases} \quad (3.1)$$

で与える. ランダム写像  $T$  の不変測度とは,  $\mathbb{E}\mu \circ T^{-1} = \mu$ , すなわち

$$p\mu \circ \tau_1^{-1} + (1-p)\mu \circ \tau_2^{-1} = \mu \quad (3.2)$$

を満たす0でない測度を言う. ランダム写像  $T$  の反復は次のように与えられる.  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $T$  の独立コピーとして

$$T^{(n)} = T_n \circ T_{n-1} \circ \cdots \circ T_1 \quad (3.3)$$

とおく.  $T^{(n)}$  はランダム写像  $T$  の  $n$  回反復に相当する.

論文 [4] では3つの特徴的なランダム力学系について, 逆正弦法則と Darling–Kac 法則を考察した. その結果を紹介する.

#### 3.1 Hata map

以下の二つの写像を考える:

$$\tau_1(x) = \begin{cases} x/2 & (0 \leq x \leq 1/2) \\ 2x-1 & (1/2 < x \leq 1), \end{cases} \quad \tau_2(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 1/2) \\ (x+1)/2 & (1/2 < x \leq 1). \end{cases} \quad (3.4)$$

これら二つの写像は吸引的不動点を持つ:

$$\tau_1^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \tau_2^n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{for } x \in [0, 1] \text{ except } 0, 1/2, 1. \quad (3.5)$$

このとき, 式 (3.1) で与えられるランダム写像を Hata map と呼ぶ. 等確率  $p = 1/2$  の場合, 不動点  $x = 0, 1$  は次の意味で平均的に中立である:

$$\mathbb{E} \log |T'(0+)| = \mathbb{E} \log |T'(1-)| = 0. \quad (3.6)$$

なお, 等確率  $p = 1/2$  でなければ, 平均的中立性は崩れることに注意する.

以下では等確率  $p = 1/2$  を仮定する.

**定理 3.1** (Hata–Y [4]). 区間  $(0, 1)$  の (零集合を除いた) 分割  $\alpha = \{I_k^-, I_k^+\}_{k=0}^{\infty}$  を

$$I_k^- = \left( \frac{1}{2^{k+2}}, \frac{1}{2^{k+1}} \right), \quad I_k^+ = \left( 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, 1 - \frac{1}{2^{k+2}} \right) \quad (3.7)$$

で定める. このとき,

$$\mu(dx) = \sum_{s \in \alpha} r(s) 1_s(x) dx, \quad r(I_k^-) = r(I_k^+) = 2^{k+1} - 1 \quad (3.8)$$

は  $T$  の不変測度である. 逆に,  $T$  の不変測度で絶対連続かつ  $\sigma$ -有限なものは  $\mu$  の定数倍に限る.

**定理 3.2** (Hata–Y [4]). ランダム写像列  $\{T_n\}$  と独立で絶対連続な分布を持つランダム初期点  $\Theta \in [0, 1]$  に対し,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{T^{(k)}\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{A}\delta_1 + (1 - \mathcal{A})\delta_0 \quad \text{on } \mathcal{P}[0, 1] \quad (3.9)$$

が成り立つ. また,  $\mu(E) < \infty$  なるボレル集合  $E \subset (0, 1)$  に対し

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \delta_{T^{(k)}\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\mu(E))\mathcal{M} \quad \text{on } \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad (3.10)$$

が成り立つ.

証明では,  $\Omega = \{\tau_1, \tau_2\}^{\mathbb{N}}$  とおき, skew-product によって直積空間  $\Omega \times [0, 1]$  上の決定的力学系に帰着し,  $\{\Omega \times I_k^-, \Omega \times I_k^+\}_{k=0}^{\infty}$  がマルコフ分割であることを示してマルコフ連鎖との conjugacy を得て skew-product の conservative ergodicity を示し, Thaler–Zweimüller [8] の定理を適用する.

### 3.2 Pelikan map

以下の二つの写像を考える:

$$\tau_1(x) = 2x \bmod 1, \quad \tau_2(x) = x/2. \quad (3.11)$$

$\tau_1$  は chaotic であるのに対し,  $\tau_2$  は原点を吸引的不動点に持つ. このとき, 式 (3.1) で与えられるランダム写像を Pelikan map と呼ぶ (Pelikan [5] がこのようなランダム写像の不変測度を調べたことからこう呼ぶことにしているが, その論文では等確率  $p = 1/2$  の場合を除外している). 等確率  $p = 1/2$  の場合, 不動点  $x = 0$  は  $\mathbb{E} \log |T'(0+)| = 0$  なる意味で平均的に中立である. なお, 確率の配分が等確率  $p = 1/2$  でなければ, 平均的中立性は崩れる.

以下では等確率  $p = 1/2$  を仮定する.

**定理 3.3** (Hata–Y [4]). 区間  $(0, 1)$  の (零集合を除いた) 分割  $\alpha = \{I_k\}_{k=0}^{\infty}$  を

$$I_k = \left( \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k} \right) \quad (3.12)$$

で定める. このとき,

$$\mu(dx) = \sum_{s \in \alpha} r(s) 1_s(x) dx, \quad r(I_k) = 2^{-2}(2^{k+1} - 1) \quad (3.13)$$

は  $T$  の不変測度である. 逆に,  $T$  の不変測度で絶対連続かつ  $\sigma$ -有限なものは  $\mu$  の定数倍に限る.

**定理 3.4** (Hata–Y [4]). ランダム写像列  $\{T_n\}$  と独立で絶対連続な分布を持つランダム初期点  $\Theta \in [0, 1]$  と,  $\mu(E) < \infty$  なるボレル集合  $E \subset (0, 1)$  に対し

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \delta_{T^{(k)}\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\mu(E))\mathcal{M} \quad \text{on } \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad (3.14)$$

が成り立つ.

証明は Hata map の場合と似ているが,  $\{\Omega \times I_k\}_{k=0}^{\infty}$  がマルコフ分割にならないので工夫が必要である. その代わりに,  $i = 1, 2$  に対して  $\Omega_i = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_1 = \tau_i\}$  として定まる  $\{\Omega_1 \times I_k, \Omega_2 \times I_k\}_{k=0}^{\infty}$  がマルコフ分割となることを示す.

### 3.3 mBGI map

以下の二つの写像を考える:

$$\tau_1(x) = \begin{cases} 2x & (0 < x < 1/4) \\ 1 - 2x & (1/4 < x < 1/2) \\ 2 - 2x & (1/2 < x < 3/2) \\ 2x - 1 & (3/2 < x < 1) \end{cases}, \quad \tau_2(x) = \begin{cases} 1 - x/4 & (0 < x < 1/2) \\ (1 - x)/4 & (1/2 < x < 1) \end{cases}. \quad (3.15)$$

$\tau_1$  は chaotic であるのに対し,  $\tau_2$  は二点集合  $\{0, 1\}$  をアトラクタに持つ. このとき, 式(3.1)で与えられるランダム写像を modified Boyarsky–Góra–Islam map, 略して mBGI map と呼ぶ (Boyarsky–Góra–Islam [2] がこれに類似したランダム写像の不変測度を調べたことからこう呼ぶことにしている). 等確率  $p = 2/3$  の場合, 集合  $\{0, 1\}$  は  $\mathbb{E} \log |T'(0+)| = \mathbb{E} \log |T'(1+)| = 0$  なる意味で平均的に中立なアトラクタである. なお, 確率の配分が  $p = 2/3$  でなければ, 平均的中立性は崩れる.

以下では  $p = 2/3$  を仮定する.

**定理 3.5** (Hata–Y [4]). 区間  $(0, 1)$  の (零集合を除いた) 分割  $\alpha = \{I_k^-, I_k^+\}_{k=0}^\infty$  を

$$I_k^- = \left( \frac{1}{2^{k+2}}, \frac{1}{2^{k+1}} \right), \quad I_k^+ = \left( 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, 1 - \frac{1}{2^{k+2}} \right). \quad (3.16)$$

で定める. このとき,

$$\mu(dx) = \sum_{s \in \alpha} r(s) 1_s(x) dx, \quad r(I_k^-) = r(I_k^+) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \left( \frac{8}{3} \cdot 2^k + \frac{1}{3} \cdot (-1)^k - 1 \right) \quad (3.17)$$

は  $T$  の不変測度である. 逆に,  $T$  の不変測度で絶対連続かつ  $\sigma$ -有限なものは  $\mu$  の定数倍に限る.

**定理 3.6** (Hata–Y [4]). ランダム写像列  $\{T_n\}$  と独立で絶対連続な分布を持つランダム初期点  $\Theta \in [0, 1]$  と,  $\mu(E) < \infty$  なるボレル集合  $E \subset (0, 1)$  に対し

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \delta_{T^{(k)}\Theta} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} (\mu(E)) \mathcal{M} \quad \text{on } \mathcal{P}(\mathbb{R}) \quad (3.18)$$

が成り立つ.

証明はやはり Hata map の場合と似ているが, 確率の配分が等確率でないので工夫が必要である. 単純ランダムウォークの代わりに, 確率  $1/3$  で  $+2$  進み, 確率  $2/3$  で  $-1$  進むランダムウォークの性質を用いる.

## References

- [1] J. Aaronson. The asymptotic distributional behaviour of transformations preserving infinite measures. *J. Analyse Math.*, 39:203–234, 1981.
- [2] A. Boyarsky, P. Góra, and M. S. Islam. Randomly chosen chaotic maps can give rise to nearly ordered behavior. *Phys. D*, 210(3-4):284–294, 2005.

- [3] G. Hata. Arcsine law for a piecewise linear random map. *Master Thesis, Kyoto University*, 2019.
- [4] G. Hata and K. Yano. Arcsine and darling–kac laws for piecewise linear random interval maps. 2021. Preprint, arXiv:2108.01332.
- [5] S. Pelikan. Invariant densities for random maps of the interval. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 281(2):813–825, 1984.
- [6] T. Sera. Functional limit theorem for occupation time processes of intermittent maps. *Nonlinearity*, 33(3):1183–1217, 2020.
- [7] M. Thaler. A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(4):1289–1312, 2002.
- [8] M. Thaler and R. Zweimüller. Distributional limit theorems in infinite ergodic theory. *Probab. Theory Related Fields*, 135(1):15–52, 2006.