

# Period matrices of some hyperelliptic Riemann surfaces

静岡大学学 教育学部 四之宮 佳彦

Yoshihiko Shinomiya

Faculty of Education, Shizuoka University

## 1 導入

$X$  をコンパクトリーマン面または  $\mathbb{C}$  上の非特異既約射影代数曲線とする. また,  $X$  の種数を  $g \geq 2$  とする.

**定義 1.1** (Symplectic Basis).  $H_1(X, \mathbb{Z})$  の基底  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  が symplectic であるとは, 任意の  $j, k$  に対して  $i(\alpha_k, \alpha_j) = i(\beta_k, \beta_j) = 0$  および  $i(\alpha_k, \beta_j) = \delta_{k,j}$  を満たすことである. ただし,  $i(\cdot, \cdot)$  は幾何学的交点数関数である.

リーマン面  $X$  上の正則一次微分の空間  $\Omega(X)$  の基底  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$  と  $H_1(X, \mathbb{Z})$  の symplectic basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  をとる. 2つの  $g$  次正方行列  $A, B$  を  $A = \left[ \int_{\alpha_j} \omega_k \right]$ ,  $B = \left[ \int_{\beta_j} \omega_k \right]$  で定義する.

**定義 1.2** (Period Matrix). 行列  $\Pi = A^{-1}B$  を symplectic basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  に関する  $X$  の周期行列という.

周期行列は対称行列であり, その虚部は正定値であることが知られている. 周期行列は symplectic basis の選び方に依存する. もし  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_g, \beta'_1, \dots, \beta'_g$  が  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  と異なる  $H_1(X, \mathbb{Z})$  の symplectic basis ならば,  $[\alpha'_1, \dots, \beta'_g] = [\alpha_1, \dots, \beta_g]T$  を満たす  $T = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$  が存在する. ただし,  $P, Q, R, S$  は  $g$  次正方行列である. 行列  $\Pi$  を  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  に関する  $X$  の周期行列とし, 行列  $\Pi'$  を  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_g, \beta'_1, \dots, \beta'_g$  に関する  $X$  の周期行列とすると,  $\Pi' = (P\Pi + Q)(R\Pi + S)^{-1}$  が成り立つ. したがって,  $H_1(X, \mathbb{Z})$  の 1 つの symplectic basis に関する周期行列が求められれば, 他の symplectic basis に関する周期行列も求めることができる. しかし周期行列の例はどのくらい知られているかという実にはそれほど多くは知られていない. 周期行列を計算する上での難点の 1 つは, symplectic basis を見つけることである.

一般種数の場合, Schindler [Sch93] は代数方程式  $w^2 = z^{2g+2} - 1$ ,  $w^2 = z(z^{2g+1} - 1)$ ,  $w^2 = z(z^{2g} - 1)$  でそれぞれ定義される代数曲線の周期行列を計算した. ただし,  $g \geq 2$  である. Tashiro-Yamazaki-Ito-Higuchi [TYIH96] は  $w^2 = z^{2g+1} - 1$  で定義される代数曲線の周期行列

を計算した．この周期行列の明示的な表示は Tadokoro [Tad08] により与えられている．また，Bujalance-Costa-Gamboá-Riera [BCGR00] は  $w^2 = z^{2g+2} - 1$ ,  $w^{2g+2} = z(z-1)^{g-1}(z+1)^{g+2}$  でそれぞれ定義される代数曲線の周期行列を計算した．これまでに知られている計算例はこれらのみである．

また，低種数の場合の計算例もいくつか存在する．代数方程式  $w^7 = z(1-z)$  で定義される種数 3 の代数曲線の周期行列は Tretkoff-Tretkoff [TT84] や Tadokoro [Tad08] によって計算されている．代数方程式  $XY^3 + YZ^3 + ZX^3 = 0$  で定義される  $\mathbb{C}P^3$  内の種数 3 の代数曲線は Klein quartic curve と呼ばれる．この代数曲線の周期行列は [BN10], [Kam02], [RL70], [RGA97], [Sch91], [Tad08], [Yos99], [Tad08] で計算されている．また，Macbeath's curve の周期行列は Berry-Tretkoff [BT92] によって計算されている．この曲線の種数は 7 である．また，Kuusalo-Näätänen [KN95] は代数方程式  $w^2 = z(z^4 - 1)$ ,  $w^2 = z^5 - 1$ ,  $w^2 = z^6 - 1$  でそれぞれ定義される代数曲線の周期行列の明示的な表示を与えた．

本稿では，代数方程式

$$w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a_1^2)(z^2 - a_2^2) \cdots (z^2 - a_{g-1}^2)$$

で定義される代数曲線の周期行列を計算する．ただし， $g \geq 2$  であり， $a_1, a_2, \dots, a_{g-1}$  は実数で  $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{g-1}$  を満たすものである．

## 2 リーマン面の構成

種数  $g \geq 2$  のリーマン面を平面上の多角形の辺の貼り合わせにより構成し，そのリーマン面に対応する代数方程式を求める．

以下， $g$  は 2 以上の整数とする． $g$  が偶数か奇数かで場合分けをする．まず， $g$  が偶数であるとする．1 つの辺が水平な正方形  $P_0$  を用意し，その右辺に同じ高さの長方形  $P_1$  を貼り合わせる．次に  $P_1$  の上辺に同じ幅の長方形  $P_2$  を貼り合わせる．以下長方形を右辺，上辺に貼り合わせる操作を交互に繰り返し，長方形  $P_{g-1}$  まで貼り合わせる．次に，正方形  $P_0$  の左上と右下の頂点を通る直線を  $l$  とし，直線  $l$  に関する対称移動を  $r_l$  とする．上の多角形に  $Q_j = r_l(P_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, g-1$ ) を貼り合わせてできる多角形を  $P$  とする (図 1)．

次に  $g$  が奇数の場合の多角形  $P$  を構成する．1 つの辺が水平な正方形  $P_0$  を用意し，その上辺に同じ幅の長方形  $P_1$  を貼り合わせる．次に  $P_1$  の右辺に同じ高さの長方形  $P_2$  を貼り合わせる．以下長方形を上辺，右辺に貼り合わせる操作を交互に繰り返し，長方形  $P_{g-1}$  まで貼り合わせる．そして正方形  $P_0$  の左上と右下の頂点を通る直線を  $l$  とし，直線  $l$  に関する対称移動を  $r_l$  とする．上の多角形に  $Q_j = r_l(P_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, g-1$ ) を貼り合わせてできる多角形を  $P$  とする (図 2)．

次に，多角形  $P$  の向かい合う辺同士を平行移動で同一視して曲面  $X$  をつくる．例えば， $g$  が偶数のとき， $P_0$  の左辺と  $P_1$  の右辺を同一視し， $P_1$  の下辺と  $P_2$  の上辺を同一視する．また，多角形  $P$  が  $X$  の一つの局所座標系を与えるように  $X$  に複素構造を与える．このとき， $X$  は種数  $g$  のリーマン面である．多角形の頂点は  $X$  上では 1 点となる．以下の様に，多角形  $P$  およびリーマン

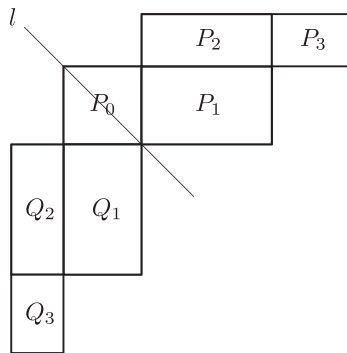


図1  $g$  が偶数の場合の長方形  $P_0, \dots, P_{g-1}, Q_1, \dots, Q_{g-1}$  の貼り合わせ

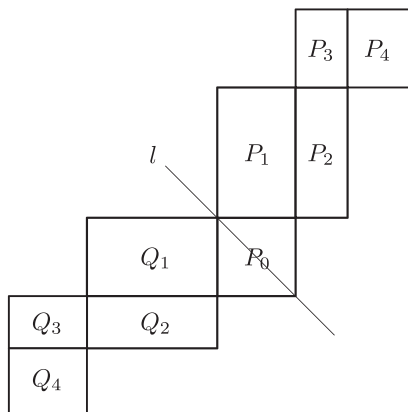


図2  $g$  が奇数の場合の長方形  $P_0, \dots, P_{g-1}, Q_1, \dots, Q_{g-1}$  の貼り合わせ

面  $X$  上の点に名前を付ける (図3).

- 長方形  $P_j$  の中心を  $p_j$  とする ( $j = 0, 1, \dots, g-1$ ).
- 長方形  $Q_j$  の中心を  $q_j$  とする ( $j = 1, 2, \dots, g-1$ ).
- 長方形  $P_{g-1}$  の上辺の中点を  $p_g$  とする.
- 長方形  $Q_{g-1}$  の左辺の中点を  $q_g$  とする.
- 長方形  $P_{g-1}$  の右上の頂点を  $o$ , 長方形  $Q_{g-1}$  の左下の頂点を  $o'$  とする.
- リーマン面  $X$  上の点で上記に対応するものも同じ記号で表す. ただし,  $o, o'$  は  $X$  上で同じ点となるのでこれは  $o$  で表す.

また, 正方形  $P_0$  の中心  $p_0$  に関して多角形  $P$  を  $\frac{\pi}{2}$  だけ回転させる回転移動が導く  $X$  の自己同型写像を  $\tau$  とする. 直線  $l$  に関する対称移動  $r_l$  が導く  $X$  上の自己反正則写像を  $\mu$  とする.

注意.  $\tau^2$  は  $X$  の hyperelliptic involution である.

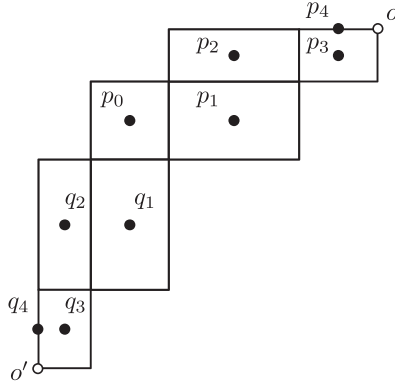


図3 点  $p_0, \dots, p_g, q_1, \dots, q_g, o, o'$

定理 2.1. リーマン面  $X$  は代数方程式

$$w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a_1^2) \cdots (z^2 - a_{g-1}^2)$$

で定義される代数曲線である. ただし,  $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{g-1}$  である. 点  $(0, 0)$  は  $p_0$ ,  $(1, 0)$  は  $p_1$ ,  $(a_j, 0)$  は  $p_{j+1}$ ,  $(-1, 0)$  は  $q_1$ ,  $(-a_j, 0)$  は  $q_{j+1}$  にそれぞれ対応する. 更に, この代数曲線の任意の点  $(z, w)$  に対して,  $\tau(z, w) = (-z, iw)$ ,  $\mu(z, w) = (-\bar{z}, -i\bar{w})$  が成り立つ.

### 3 代数曲線から多角形の構成

第2節では, 代数方程式  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a_1^2) \cdots (z^2 - a_{g-1}^2)$  で定義される代数曲線を多角形から構成した. ここでは逆に代数曲線  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a_1^2) \cdots (z^2 - a_{g-1}^2)$  からそれに対応する多角形を構成できること (定理 3.1) を示す.

定理 3.1. 任意の実数  $a_1, a_2, \dots, a_{g-1}$  ( $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{g-1}$ ) に対して代数方程式  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a_1^2) \cdots (z^2 - a_{g-1}^2)$  で定義される代数曲線  $X$  は図1または図2の形の多角形の向かい合う辺を同一視することで構成できる.

正数  $a_1, a_2, \dots, a_{g-1}$  が  $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{g-1}$  を満たすとし,  $f(z) = z(z^2 - 1)(z^2 - a_1^2) \cdots (z^2 - a_{g-1}^2)$  とおく. 代数方程式  $w^2 = f(z)$  で定義される代数曲線を  $X$  とする. 射影  $\varphi: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}; (z, w) \mapsto z$  によって無限遠点  $\infty$  に写る  $X$  上の点を  $o$  で表す.

補題 3.2. 代数曲線  $X$  は自己等角写像  $\tau: X \rightarrow X; (z, w) \mapsto (-z, iw)$  をもつ. 写像  $\tau$  の位数は4であり,  $\tau^2$  は hyperelliptic involution である. また,  $\tau^2$  の固定点は  $(0, 0), (\pm 1, 0), (\pm a_1, 0), \dots, (\pm a_{g-1}, 0), o$  である.

リーマン球面  $\hat{\mathbb{C}}$  上の区間  $[0, 1], [1, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{g-2}, a_{g-1}]$  の  $\varphi$  による逆像を順に  $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{g-1}$  とする. また,  $\delta_j^* = \tau(\delta_j)$  とおく. これらは  $X$  上の単純閉曲線である.

**命題 3.3.** 以下が成り立つ。ただし、 $i(\cdot, \cdot)$  は交点数関数である。

- (1)  $|j - k| \neq 1$  ならば  $i(\delta_j, \delta_k) = 0$  である。また、 $i(\delta_j, \delta_{j+1}) = 1$  であり、 $\delta_j$  と  $\delta_{j+1}$  の交点は  $(a_j, 0)$  である。
- (2)  $|j - k| \neq 1$  ならば  $i(\delta_j^*, \delta_k^*) = 0$  である。また、 $i(\delta_j^*, \delta_{j+1}^*) = 1$  であり、 $\delta_j^*$  と  $\delta_{j+1}^*$  の交点は  $(-a_j, 0)$  である。
- (3)  $(j, k) \neq (0, 0)$  ならば、 $i(\delta_j, \delta_k^*) = 0$  である。また、 $i(\delta_0, \delta_0^*) = 1$  であり、 $\delta_0$  と  $\delta_0^*$  の交点は  $(0, 0)$  である。

代数曲線  $X$  上の正則 1 次微分  $\omega$  を  $\omega = \frac{dz}{w}$  で定める。このとき  $\omega$  は  $o$  のみを零点としてもつ。定理 3.1 を証明するために並進曲面  $(X, \omega)$  を考える。

**命題 3.4.** 単純閉曲線  $\delta_0, \dots, \delta_{g-1}, \delta_0^*, \dots, \delta_{g-1}^*$  は並進曲面  $(X, \omega)$  の特異点を通らない閉測地線である。更に、 $g$  が偶数であるとき、 $\delta_0, \delta_2, \dots, \delta_{g-2}, \delta_1^*, \delta_3^*, \dots, \delta_{g-1}^*$  は水平であり、 $\delta_1, \delta_3, \dots, \delta_{g-1}, \delta_0^*, \delta_2^*, \dots, \delta_{g-2}^*$  は垂直である。一方、 $g$  が奇数であるとき、 $\delta_0, \delta_2, \dots, \delta_{g-2}, \delta_1^*, \delta_3^*, \dots, \delta_{g-1}^*$  は垂直であり、 $\delta_1, \delta_3, \dots, \delta_{g-1}, \delta_0^*, \delta_2^*, \dots, \delta_{g-2}^*$  は水平である。

並進曲面  $(X, \omega)$  の単純閉測地線  $\delta_j$  に対して、 $\delta_j$  とホモトピックで特異点を通らない  $(X, \omega)$  の単純閉測地線全ての和集合は (境界を含まない) ユークリッド円柱となる。このユークリッド円柱を  $R_j$  とかき、円柱  $R_j$  の 2 つの境界成分を  $\partial_1 R_j, \partial_2 R_j$  と表す。同様に単純閉測地線  $\delta_j^*$  に対して、ユークリッド円柱  $R_j^*$  および境界成分  $\partial_1 R_j^*, \partial_2 R_j^*$  を定義する。 $\partial_1 R_j, \partial_2 R_j, \partial_1 R_j^*, \partial_2 R_j^*$  はそれぞれ特異点を通る (単純とは限らない) 閉曲線である。また、 $X$  の自己等角写像  $\tau: X \rightarrow X; (z, w) \mapsto (-z, iw)$  に対して、 $\tau^* \omega = iw$  が成り立つので、 $\tau$  は  $\frac{\pi}{2}$  回転として  $(X, \omega)$  に作用する。更に、 $X$  の自己反正則写像  $\nu: X \rightarrow X$  を  $\nu(z, w) = (\bar{z}, (-1)^g \bar{w})$  で定義すると以下が成り立つ。

**補題 3.5.** 任意の  $j \in \{0, 1, \dots, g-1\}$  に対して以下が成り立つ。

- (1) 円柱  $R_j$  と  $R_j^*$  は  $\tau$  で互いに写り合う。
- (2) 単純閉測地線  $\delta_j$  および円柱  $R_j$  は  $\tau^2$  で不変であり、円柱  $R_j$  の 2 つの境界成分は  $\tau^2$  で互いに写り合う。単純閉測地線  $\delta_j^*$  および円柱  $R_j^*$  は  $\tau^2$  で不変であり、円柱  $R_j^*$  の 2 つの境界成分は  $\tau^2$  で互いに写り合う。
- (3) 単純閉測地線  $\delta_j, \delta_j^*$  は  $\nu$  で不変である。特に、 $j$  が偶数のときかつそのときに限り  $\delta_j$  は  $\nu$  で各点固定される。偶数  $j$  に対して、 $\delta_j$  の近傍で  $\nu$  は  $\delta_j$  に関する鏡映で表せる。また、 $j$  が奇数のときかつそのときに限り  $\delta_j^*$  は  $\nu$  で各点固定される。奇数  $j$  に対して、 $\delta_j^*$  の近傍で  $\nu$  は  $\delta_j^*$  に関する鏡映で表せる。
- (4) 円柱  $R_j, R_j^*$  はそれぞれ  $\nu$  で不変である。もし  $j$  が偶数ならば、円柱  $R_j$  の 2 つの境界成分は  $\nu$  で互いに写り合い、円柱  $R_j^*$  の 2 つの境界成分はそれぞれ  $\nu$  で不変である。もし  $j$  が奇数ならば、円柱  $R_j$  の 2 つの境界成分はそれぞれ  $\nu$  で不変であり、円柱  $R_j^*$  の 2 つの境界成分は  $\nu$

で互いに写り合う。

**補題 3.6.** 任意の  $j \in \{0, 1, \dots, g-2\}$  に対して, ユークリッド円柱  $R_j$  の各境界成分  $\partial_k R_j$  ( $k = 1, 2$ ) は少なくとも 2 回特異点  $o$  を通る。

**証明.** ここでは, 記号を簡単にするために  $j \geq 2$  の場合を考える.  $j$  が 0 または 1 のときも同様に示される. 円柱  $R_j$  内で  $o$  から  $\delta_j$  に垂線  $s'$  を降ろす. まず  $j$  が偶数のときは,  $s = s' \cup \nu(s')$  とすると,  $s$  は  $o$  を両端点とし,  $\delta_j$  と直交する測地線分である. 次に,  $j$  が奇数のときは,  $s = \tau^{-1}(\tau(s') \cup \nu\tau(s')) = s' \cup \tau^{-1}\nu\tau(s')$  とすると,  $s$  は  $o$  を両端点とし,  $\delta_j$  と直交する測地線分である. この測地線分  $s$  が  $\tau^2$  で不変でないことを示す. もし  $s$  が  $\tau^2$  で不変ならば,  $s$  の中点  $p$  は  $\tau^2$  で固定される. したがって,  $p$  は  $(a_{j-1}, 0)$  または  $(a_j, 0)$  のいずれかである. もし  $p = (a_{j-1}, 0)$  ならば, 閉測地線  $\delta_{j-1}$  は点  $p$  を通る. 命題 3.4 より, 閉測地線  $\delta_{j-1}$  は  $s$  と一致しなければならないが, これは  $\delta_{j-1}$  が特異点  $o$  を通らないことに矛盾する. 点  $p$  が  $(a_j, 0)$  である場合も同様に矛盾する. したがって, 測地線分  $s$  は  $\tau^2$  で不変でない. いま,  $\tau^2(s)$  は  $o$  を両端点とする  $s$  とは異なる  $R_j$  内の測地線分であることから主張を得る.  $\square$

**定理 3.1 の証明.** 円柱  $R_j$  の境界成分  $\partial_1 R_j$  が特異点  $o$  を通る回数を  $c_j$  とする. このとき, 境界成分  $\partial_2 R_j, \partial_1 R_j^*, \partial_2 R_j^*$  もそれぞれ特異点  $o$  を  $c_j$  回通る.

次に,  $R_j$  と  $R_{j+1}$  の共通部分を  $L_j$  とすると,  $L_j$  は長方形である. 補題 3.5 より,  $R_j, R_{j+1}$  は  $\tau^2$  および  $\nu$  で不変なので,  $L_j$  も  $\tau^2$  および  $\nu$  で不変である. したがって,  $L_j$  の頂点の内少なくとも 1 つが特異点  $o$  ならば, 他の頂点も特異点  $o$  である. 同じことが長方形  $L = R_0 \cap R_0^*$  や  $L_j^* = R_j^* \cap R_{j+1}^*$  についても成り立つ. そこで,  $L, L_0, \dots, L_{g-2}, L_0^*, \dots, L_{g-2}^*$  の内, その頂点が特異点である様なものの個数を  $d$  とする. 特異点  $o$  の周りの角度は  $(4g-2)\pi$  であるから, 不等式

$$2 \sum_{j=0}^{g-1} 2\pi c_j - 2\pi d \leq (4g-2)\pi$$

が成り立つ. 補題 3.6 より, 任意の  $j \in \{0, 1, \dots, g-2\}$  に対して,  $c_j \geq 2$  であるから,

$$4(g-1) + 2c_{g-1} - d \leq 2g-1$$

となる, これを整理すると,

$$2g-3 + 2c_{g-1} \leq d$$

となるが,  $d \leq 2g-1$  なので,  $c_{g-1} = 1$  でなければならない. 更に,  $d = 2g-1$  であり, 任意の  $j \in \{0, 1, \dots, g-2\}$  に対して,  $c_j = 2$  となる. 以上から円柱  $R_j, R_j^*$  の境界成分はそれぞれ特異点を 2 回通り, 長方形  $L, L_0, \dots, L_{g-2}, L_0^*, \dots, L_{g-2}^*$  は全て特異点  $o$  を頂点としている. 更に,  $L$  は  $\tau$  で不変であることから正方形である. したがって,

$$X = \bar{L} \cup \bigcup_{j=0}^{g-2} \bar{L}_j \cup \bigcup_{j=0}^{g-2} \bar{L}_j^*$$

であり, 代数方程式  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a_1^2) \cdots (z^2 - a_{g-1}^2)$  で定まる代数曲線  $X$  は図 1 または図 2 の形の多角形の向かい合う辺を同一視することで構成できる.  $\square$

定理 3.1 の系として以下が得られる.

系 3.7.  $g \geq 2$  とする. 任意の実数  $a_1, a_2, \dots, a_{g-1}$  ( $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{g-1}$ ) をとり,  $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - a_1^2) \cdots (x^2 - a_{g-1}^2)$  とおく. 更に,  $a_{-1} = 0, a_0 = 1$  とし,

$$I_j = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{dx}{\sqrt{|f(x)|}}, I_g = \int_{a_{g-1}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|f(x)|}},$$

( $j = 0, 1, \dots, g-1$ ) とおく. このとき, 等式

$$\sum_{j=0}^g (-1)^{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor} I_j = 0$$

が成り立つ.

証明.  $g$  が偶数の場合を示す. 定理 3.1 の証明で定義された正方形  $L$  の水平な辺の長さは,

$$2 \left( I_0 - I_2 + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor} I_{g-2} + (-1)^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} I_g \right)$$

と表せる. 一方,  $L$  の垂直な辺の長さは,

$$2 \left( I_1 - I_3 + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{g-4}{2} \rfloor} I_{g-3} + (-1)^{\lfloor \frac{g-2}{2} \rfloor} I_{g-1} \right)$$

と表せる. いま  $L$  は正方形だから, 等式

$$I_0 - I_2 + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{g-1}{2} \rfloor} I_{g-2} + (-1)^{\lfloor \frac{g+1}{2} \rfloor} I_g = I_1 - I_3 + \cdots + (-1)^{\lfloor \frac{g-4}{2} \rfloor} I_{g-3} + (-1)^{\lfloor \frac{g-2}{2} \rfloor} I_{g-1}$$

が成り立つ. これを整理することで主張を得る.  $\square$

## 4 canonical homology basis の構成

リーマン面  $X$  の symplectic basis を構成する. 簡単のために, 多角形  $P$  を構成する長方形  $P_1, \dots, P_g, Q_2, \dots, Q_g$  は全て正方形で表す. リーマン面  $X$  上の向きづけられた単純閉曲線  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  を図 4 の様に定める.

命題 4.1. リーマン面  $X$  上の単純閉曲線  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  で以下を満たすものが存在する. ただし,  $i(\cdot, \cdot)$  は交点数関数である.

(1)  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  は  $H_1(X, \mathbb{Z})$  の基底である,

(2)  $i(\alpha_j, \gamma_k) = \delta_{jk}, i(\gamma_j, \gamma_k) = 0,$

(3)  $\gamma_j = \sum_{k=j}^g (-1)^{k-j} \beta_k$  in  $H_1(X, \mathbb{Z})$ .

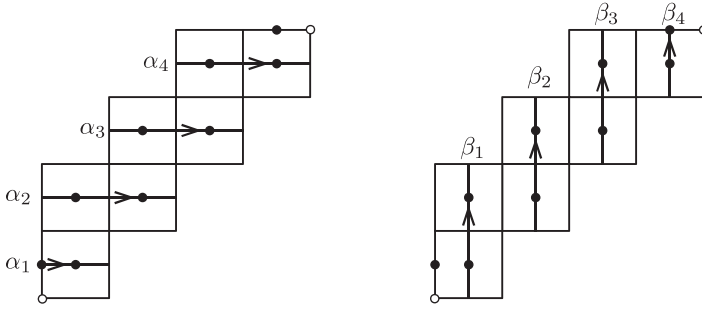


図4 単純閉曲線  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$

証明. まず,  $g = 2$  のとき, 図5の様に単純閉曲線を  $\gamma_1, \gamma_2$  をとれば, これらは上の条件を満たす.  $g = 3$  のときは図6の様に  $g = 2$  の場合の多角形に長方形を貼り合わせ,  $\gamma_1, \gamma_2$  を長方形内

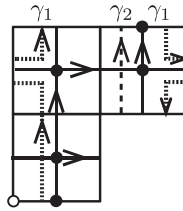


図5  $g = 2$  の場合の単純閉曲線  $\gamma_1, \gamma_2$

の折れ線と接続したのものとす. 更に図の様に単純閉曲線  $\gamma_3$  をとれば  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  は上の条件を満たす. 同様に  $g = 4$  の場合も  $g = 3$  の場合の多角形に長方形を貼り合わせ,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  を長方形

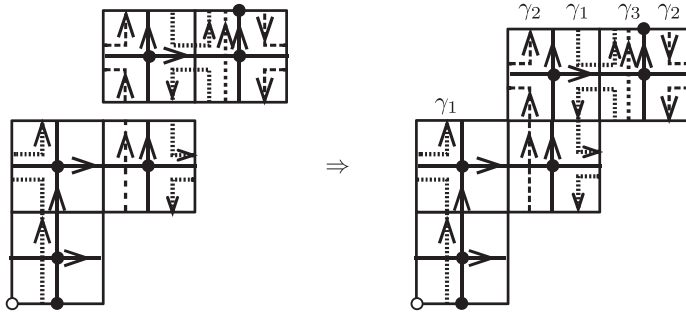


図6  $g = 3$  の場合の単純閉曲線  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

内の折れ線と接続したのものとす, 図の様に単純閉曲線  $\gamma_4$  をとれば,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  は上の条件を満たす. 以下同じ操作を繰り返すことで, 任意の  $g \geq 2$  に対して, 上の条件を満たす単純閉曲線  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  を構成できる. このとき,  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  は  $H_1(X, \mathbb{Z})$  の symplectic basis である. □



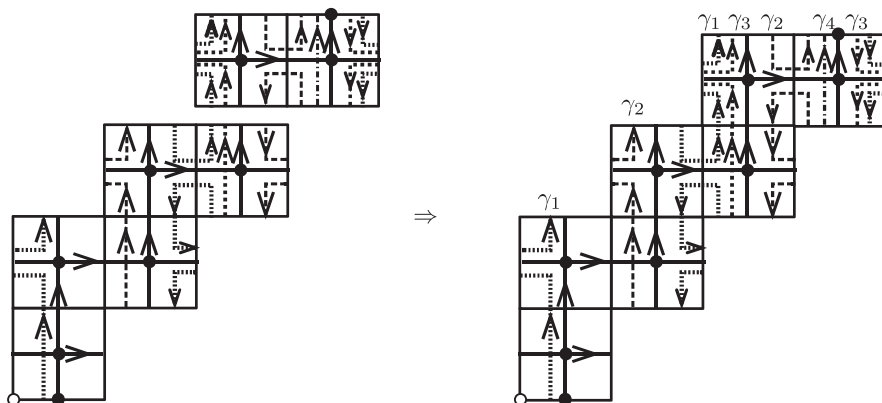


図7  $g = 4$  の場合の単純閉曲線  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

## 5 周期行列の計算

第4節で求めた canonical homology basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  に関するリーマン面  $X$  の周期行列を計算しよう. 以下,  $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_{g-1}$  と仮定する. また,  $f(z) = z(z^2 - 1)(z^2 - a_1^2) \dots (z^2 - a_{g-1}^2)$  とおく. リーマン面  $X$  は代数方程式  $w^2 = f(z)$  で定義される代数曲線である. 定理 2.1, 定理 3.1 より, この代数曲線は 2 節で与えた多角形  $P$  から構成できる. 零点  $(0, 0)$  は  $p_0$ ,  $(1, 0)$  は  $p_1$ ,  $(a_j, 0)$  は  $p_{j+1}$ ,  $(-1, 0)$  は  $q_1$ ,  $(-a_j, 0)$  は  $q_{j+1}$  にそれぞれ対応していた. また,  $X$  上の正則 1 次微分  $\omega_j$  ( $j = 1, \dots, g$ ) を,

$$\omega_j = \frac{z^{j-1} dz}{w}$$

と定義すると,  $\omega_1, \dots, \omega_g$  は  $X$  上の正則 1 次微分全体のなすベクトル空間の基底である. そこで,

$$A = \left[ \int_{\alpha_k} \frac{z^{j-1} dz}{w} \right], B = \left[ \int_{\beta_k} \frac{z^{j-1} dz}{w} \right], C = \left[ \int_{\gamma_k} \frac{z^{j-1} dz}{w} \right]$$

とおく. 更に,  $g$  が偶数のとき,

$$I_{j,k} = \begin{cases} (-1)^{j-1} \int_{a_{g-2k}}^{a_{g-2k+1}} \frac{z^{j-1} dz}{\sqrt{|f(z)|}} & (1 \leq k \leq \frac{g}{2} - 1) \\ (-1)^{j-1} \int_1^{a_1} \frac{z^{j-1} dz}{\sqrt{|f(z)|}} & (k = \frac{g}{2}) \\ \int_0^1 \frac{z^{j-1} dz}{\sqrt{|f(z)|}} & (k = \frac{g}{2} + 1) \\ \int_{a_{2k-g-3}}^{a_{2k-g-2}} \frac{z^{j-1} dz}{\sqrt{|f(z)|}} & (\frac{g}{2} + 2 \leq k \leq g) \end{cases}$$

とおき,  $g$  が奇数のとき,

$$I_{j,k} = \begin{cases} (-1)^{j-1} \int_{a_{g-2k}}^{a_{g-2k+1}} \frac{z^{j-1} dz}{\sqrt{|f(z)|}} & (1 \leq k \leq \frac{g-1}{2}) \\ (-1)^{j-1} \int_0^1 \frac{z^{j-1} dz}{\sqrt{|f(z)|}} & (k = \frac{g+1}{2}) \\ \int_1^{a_1} \frac{z^{j-1} dz}{\sqrt{|f(z)|}} & (k = \frac{g+3}{2}) \\ \int_{a_{2k-g-3}}^{a_{2k-g-2}} \frac{z^{j-1} dz}{\sqrt{|f(z)|}} & (\frac{g+5}{2} \leq k \leq g) \end{cases}$$

とおく ( $j = 1, 2, \dots, g$ ). いずれの場合も  $\Pi_0 = [I_{j,k}]$  とおく.

注意. 上記の様に積分範囲を定めたのは, 射影  $\varphi: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}: (z, w) \rightarrow z$  による単純閉曲線  $\alpha_k$  の像  $\varphi(\alpha_k)$  が閉区間であり,  $g$  が偶数のとき,

$$\varphi(\alpha_k) = \begin{cases} [-a_{g-2k+1}, -a_{g-2k}] & (1 \leq k \leq \frac{g}{2} - 1) \\ [-a_1, -1] & (k = \frac{g}{2}) \\ [0, 1] & (k = \frac{g}{2} + 1) \\ [a_{2k-g-3}, a_{2k-g-2}] & (\frac{g}{2} + 2 \leq k \leq g) \end{cases}$$

となり,  $g$  が奇数のとき,

$$\varphi(\alpha_k) = \begin{cases} [-a_{g-2k+1}, -a_{g-2k}] & (1 \leq k \leq \frac{g-1}{2}) \\ [-1, 0] & (k = \frac{g+1}{2}) \\ [1, a_1] & (k = \frac{g+3}{2}) \\ [a_{2k-g-3}, a_{2k-g-2}] & (\frac{g+5}{2} \leq k \leq g) \end{cases}$$

となることによる.

簡単な計算により以下の 2 つの補題が得られる.

**補題 5.1.** 任意の  $j, k \in \{1, 2, \dots, g\}$  に対し,

$$\int_{\alpha_k} \omega_j = 2I_{j,k}$$

が成り立つ. 更に  $A = 2\Pi_0$  である.

**補題 5.2.** 任意の  $j, k \in \{1, 2, \dots, g\}$  に対し,

$$\int_{\beta_k} \omega_j = 2i(-1)^{j-1}I_{j,g+1-k}$$

が成り立つ. 更に,  $B = 2i [(-1)^{j-1}\delta_{j,k}] \Pi_0 [\delta_{j+k,g+1}]$  である.

更に命題 4.1 から以下が成り立つ.

**補題 5.3.** 任意の  $j, k \in \{1, 2, \dots, g\}$  に対し,  $C = 2iM\Pi_0N$  が成り立つ. ここで,  $M = [(-1)^{j-1}\delta_{j,k}]$ ,

$$N = \begin{bmatrix} (-1)^{g-1} & (-1)^g & (-1)^{g-1} & \dots & -1 & 1 \\ (-1)^g & (-1)^{g-1} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (-1)^{g-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ -1 & 1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

である.

これらから以下が得られる.

**定理 5.4.** リーマン面  $X$  の  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  に関する周期行列  $\Pi$  は

$$\Pi = i\Pi_0^{-1}M\Pi_0N$$

と表される. ここで,  $M, N$  は補題 5.3 で定義されたものである. 特に,  $\text{Re}(\Pi) = O$  and  $\det(\Pi) = i^g$  が成り立つ.

## 6 具体例

代数方程式  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a_1^2) \cdots (z^2 - a_{g-1}^2)$  で定義される代数曲線  $X$  の上で与えた canonical homology basis  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  に関する周期行列  $\Pi$  の計算例をいくつか紹介する. 種数 2 の場合には  $\Pi$  のより明示的な表示を与える.

6.1  $g = 2$  のとき

もし  $g = 2$  ならば,  $X$  の方程式は

$$w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a^2)$$

( $1 < a$ ) の形である. いま,  $f(z) = z(z^2 - 1)(z^2 - a^2)$  とおき,

$$p = \int_1^a \frac{dz}{\sqrt{|f(z)|}}, \quad q = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{|f(z)|}},$$

$$r = -\int_1^a \frac{z dz}{\sqrt{|f(z)|}}, \quad s = \int_0^1 \frac{z dz}{\sqrt{|f(z)|}}$$

とする. ここで,

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば,

$$\Pi = i\Pi_0^{-1}M\Pi_0N = \frac{i}{ps - qr} \begin{bmatrix} 2qs - ps - qr & ps + qr \\ 2pr - ps - qr & -2pr \end{bmatrix}$$

は  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  に関する  $X$  の周期行列である. 周期行列  $\Pi$  は対称行列だから,  $\Pi_{1,2} = \Pi_{2,1} = \frac{1}{2}(\Pi_{1,2} + \Pi_{2,1}) = pr$  であり, 更に  $pr - ps - qr = 0$  を得る. これらを用いて  $\Pi$  を書き直すと以下の様になる.

**定理 6.1.**  $a > 1$  とし, 代数方程式  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a^2)$  で定義される代数曲線を  $X$  とする. 更に,  $f(z), p, q, r, s$  を上で定義されたものとする. このとき,  $X$  の  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  に関する周期行列  $\Pi$  は

$$\Pi = \frac{i}{ps - qr} \begin{bmatrix} 2qs - pr & pr \\ pr & -2pr \end{bmatrix}$$

と表される.

例. 以下は Mathematica で周期行列  $\Pi$  を計算した結果である.

(1)  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - 2)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \cong i \begin{bmatrix} 1.42594 & -0.409423 \\ -0.409423 & 0.818846 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

(2)  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - 4)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \cong i \begin{bmatrix} 1.25352 & -0.497668 \\ -0.497668 & 0.995336 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

(3)  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - 1.0001^2)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \cong i \begin{bmatrix} 3.87984 & -0.131086 \\ -0.131086 & 0.262171 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

## 6.2 $g = 3$ のとき

もし  $g = 3$  ならば,  $X$  の方程式は

$$w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)$$

( $1 < a < b$ ) の形である. いま,  $f(z) = z(z^2 - 1)(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)$  とおき,

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{1,2} &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{1,3} &= \int_1^a \frac{dz}{\sqrt{|f(z)|}}, \\ I_{2,1} &= -\int_a^b \frac{zdz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{2,2} &= -\int_0^1 \frac{zdz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{2,3} &= \int_1^a \frac{zdz}{\sqrt{|f(z)|}}, \\ I_{3,1} &= \int_a^b \frac{z^2 dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{3,2} &= \int_0^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{3,3} &= \int_1^a \frac{z^2 dz}{\sqrt{|f(z)|}} \end{aligned}$$

とする. ここで,

$$\Pi_0 = [I_{j,k}], M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば,  $\Pi = i\Pi_0^{-1}M\Pi_0N$  は  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  に関する  $X$  の周期行列である.

例. 以下は Mathematica で  $\Pi$  を計算した結果である.

(1)  $w^2 = x(z^2 - 1)(z^2 - 4)(z^2 - 9)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \cong i \begin{bmatrix} 1.39658 & -0.687212 & 0.371981 \\ -0.687212 & 1.2467 & -0.495331 \\ 0.371981 & -0.495331 & 0.994534 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

(2)  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - 4)(z^2 - 10000)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \cong i \begin{bmatrix} 1.0086 & -0.915883 & 0.869095 \\ -0.915883 & 1.82283 & -1.28051 \\ 0.869095 & -1.28051 & 1.99277 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

(3)  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - 1.00001^2)(z^2 - 1.0001^2)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \equiv i \begin{bmatrix} 1.61889 & -0.996731 & 0.0052455 \\ -0.996731 & 1.00002 & -0.00525414 \\ 0.00524596 & -0.00525459 & 1.59888 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

### 6.3 $g = 4$ のとき

もし  $g = 4$  ならば,  $X$  の方程式は

$$w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)(z^2 - c^2)$$

( $1 < a < b < c$ ) の形である. いま,  $f(z) = z(z^2 - 1)(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)(z^2 - c^2)$  とおき,

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= \int_b^c \frac{dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{1,2} &= \int_1^a \frac{dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{1,3} &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{1,4} &= \int_a^b \frac{dz}{\sqrt{|f(z)|}}, \\ I_{2,1} &= -\int_b^c \frac{zdz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{2,2} &= -\int_1^a \frac{zdz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{2,3} &= \int_0^1 \frac{zdz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{2,4} &= \int_a^b \frac{zdz}{\sqrt{|f(z)|}}, \\ I_{3,1} &= \int_b^c \frac{z^2 dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{3,2} &= \int_1^a \frac{z^2 dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{3,3} &= \int_0^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{3,4} &= \int_a^b \frac{z^2 dz}{\sqrt{|f(z)|}}, \\ I_{4,1} &= -\int_b^c \frac{z^3 dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{4,2} &= -\int_1^a \frac{z^3 dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{4,3} &= \int_0^1 \frac{z^3 dz}{\sqrt{|f(z)|}}, & I_{4,4} &= \int_a^b \frac{z^3 dz}{\sqrt{|f(z)|}} \end{aligned}$$

とする. ここで,

$$\Pi_0 = [I_{j,k}], M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば,  $\Pi = i\Pi_0^{-1}M\Pi_0N$  は  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma_1, \dots, \gamma_g$  に関する  $X$  の周期行列である.

例. 以下は Mathematica で  $\Pi$  を計算した結果である.

(1)  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - 4)(z^2 - 9)(z^2 - 16)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \equiv i \begin{bmatrix} 1.49592 & -0.805976 & 0.529694 & -0.309252 \\ -0.805976 & 1.3887 & -0.683972 & 0.370541 \\ 0.529694 & -0.683972 & 1.24537 & -0.494738 \\ -0.309252 & 0.370541 & -0.494738 & 0.99427 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

- (2)  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - 1.00001^2)(z^2 - 1.0001^2)(z^2 - 1.001^2)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \doteq i \begin{bmatrix} 3.19594 & -2.99265 & 0.161826 & -0.141682 \\ -2.99265 & 4.42015 & -0.161842 & 0.141696 \\ 0.161828 & -0.161844 & 0.323658 & -0.283311 \\ -0.141685 & 0.141699 & -0.283311 & 0.861195 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

- (3)  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - 1.001^2)(z^2 - 1.01^2)(z^2 - 100^2)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \doteq i \begin{bmatrix} 1.00423 & -0.996561 & 0.912285 & -0.9105 \\ -0.996562 & 2.58767 & -0.957418 & 0.954779 \\ 0.912286 & -0.957419 & 1.82628 & -1.79174 \\ -0.9105 & 0.95478 & -1.79174 & 2.38377 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

- (4)  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 - 1.001^2)(z^2 - 1000^2)(z^2 - 10000000^2)$  で定義される代数曲線  $X$  に対して,

$$\Pi \doteq i \begin{bmatrix} 1.00004 & -0.99103 & 0.990938 & -0.990902 \\ -0.991031 & 5.08919 & -2.10865 & 1.95408 \\ 0.990937 & -2.10865 & 2.29095 & -1.9742 \\ -0.990902 & 1.95408 & -1.9742 & 1.98199 \end{bmatrix}$$

が成り立つ.

## 参考文献

- [BCGR00] E. Bujalance, A. F. Costa, J. M. Gamboa, and G. Riera. Period matrices of Accola-Maclachlan and Kulkarni surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 25(1):161–177, 2000.
- [BN10] H. W. Braden and T. P. Northover. Klein’s curve. *J. Phys. A*, 43(43):434009, 17, 2010.
- [BT92] Kevin Berry and Marvin Tretkoff. The period matrix of Macbeath’s curve of genus seven. In *Curves, Jacobians, and abelian varieties (Amherst, MA, 1990)*, volume 136 of *Contemp. Math.*, pages 31–40. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [Kam02] Yasuo Kamata. A note on Klein curve. *Kumamoto J. Math.*, 15:7–15, 2002.
- [KN95] T. Kuusalo and M. Näätänen. Geometric uniformization in genus 2. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 20(2):401–418, 1995.
- [RGA97] Rubí E. Rodríguez and Víctor González-Aguilera. Fermat’s quartic curve, Klein’s curve and the tetrahedron. In *Extremal Riemann surfaces (San Francisco, CA, 1995)*, volume 201 of *Contemp. Math.*, pages 43–62. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

- [RL70] Harry E. Rauch and J. Lewittes. The Riemann surface of Klein with 168 automorphisms. In *Problems in analysis (papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, pages 297–308. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [Sch91] Bernhard Schindler. Jacobische varietäten hyperelliptischer kurven und einiger spezieller kurven vom geschlecht 3, 1991.
- [Sch93] Bernhard Schindler. Period matrices of hyperelliptic curves. *Manuscripta Math.*, 78(4):369–380, 1993.
- [Tad08] Yuuki Tadokoro. A nontrivial algebraic cycle in the Jacobian variety of the Klein quartic. *Math. Z.*, 260(2):265–275, 2008.
- [TT84] C. L. Tretkoff and M. D. Tretkoff. Combinatorial group theory, Riemann surfaces and differential equations. In *Contributions to group theory*, volume 33 of *Contemp. Math.*, pages 467–519. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [TYIH96] Yoshiaki Tashiro, Seishi Yamazaki, Minoru Ito, and Teiichi Higuchi. On Riemann’s period matrix of  $y^2 = x^{2n+1} - 1$ . *RIMS Kokyuroku*, 963:124–141, 1996.
- [Yos99] Katsuaki Yoshida. Klein’s surface of genus three and associated theta constants. *Tsukuba J. Math.*, 23(2):383–416, 1999.