

# The hyperbolic structures on some link complements and their volumes

キャノン株式会社 甲斐 涼哉  
Ryoya Kai  
Canon

## 1 イントロダクション

本稿では、絡み目  $6_2^2$  の補空間、およびそれに関連する絡み目の補空間の族の双曲構造の研究について述べる。カスプ付き 3 次元完備双曲多様体の興味深い例の 1 つは 8 の字結び目  $4_1$  の補空間である (図 1)。

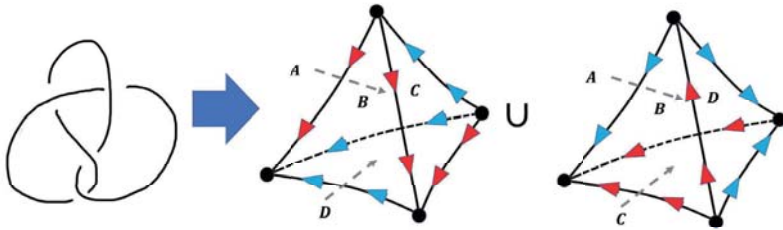


図 1 8 の字結び目  $4_1$  の補空間. 左はその理想四面体分割.

Hilden, Lozano, Montesinos [3] は錐特異点集合が錐角  $2\pi/3$  の 8 の字結び目であるようなユークリッド軌道体を以下のように構成した (図 2 参照). ユークリッド空間の立方体を各面の赤線を軸とする  $\pi$ -回転で貼り合わせることで、錐特異点集合が錐角  $\pi$  のボロミアン環  $6_2^3$  となるユークリッド軌道体が得られる. さらに、立方体の対角線 (ボロミアン環の図では青色の成分) を軸とする  $2\pi/3$ -回転の作用の商空間を考えると、錐特異点集合が各成分が錐角  $2\pi/3$ ,  $\pi$  の  $6_2^3$  となるユークリッド軌道体が得られる. 最後に、錐角  $\pi$  の錐特異点集合に沿った 2 重分岐被覆を取ると、錐特異点集合が錐角  $2\pi/3$  の 8 の字結び目であるようなユークリッド軌道体が得られる. この例から、絡み目  $6_2^2$  を錐特異点集合とする錐多様体は、8 の字結び目 (あるいはボロミアン環) を錐特異点集合とする錐多様体の錐特異点集合に沿った分岐被覆空間であることがわかる.

一方で、 $6_2^2$  の補空間は双曲多様体であり、4 つの理想正四面体の貼り合わせで実現できる. また、8 の字結び目の補空間も 2 つの理想正四面体の貼り合わせで実現でき、これらの双曲多様体は理想正四面体の貼り合わせで実現できるという類似性がある.

本研究ではこの類似点に着目し、これらの多様体の関係を明らかにすることを目的とする. その結果として、絡み目  $6_2^2$  の補空間の錐双曲構造から 8 の字結び目の補空間の完備双曲構造への変形を、双曲多面体の変形族によって記述する (図 3). また、その副産物として、ある双曲多面体の体積を計算することで、ある絡み目の族の双曲体積の公式も与える.

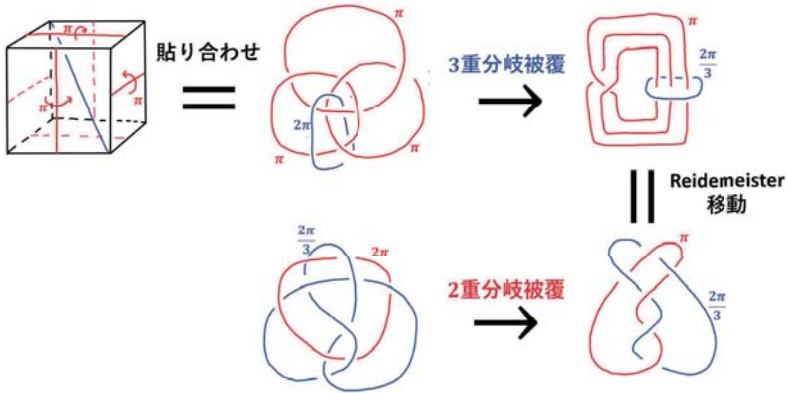


図2 8の字結び目であるようなユークリッド軌道体の構成.

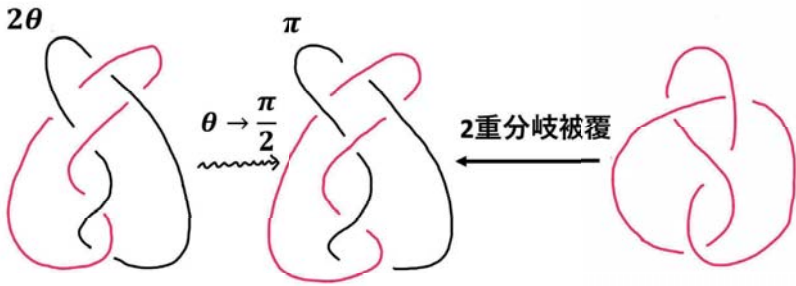


図3 本稿における計算の方針の概略. 結び目  $6_2^2$  を錐特異点とする錐多様体の錐双曲構造の変形から, 8の字結び目の補空間の双曲構造を構成する.

## 2 双曲 Dehn 手術

ここでは, Thurston による理想四面体の貼り合わせを用いたカスプ付き 3 次元多様体上の双曲構造の構成, およびその変形に関する双曲 Dehn 手術の理論 [6, 8] を紹介する.

双曲空間のモデルとして上半空間モデル

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$$

を用いる. 双曲空間の理想境界  $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \{0\} \cup \{\infty\}$  を自然に  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  と同一視する. すべての頂点が双曲空間の理想境界にある四面体を理想四面体という. はじめに, 3 次元双曲空間の理想四面体と, その合同類に対するパラメータを紹介する.

理想四面体  $T$  の頂点を  $p_0, p_1, p_2, p_3$  とする (図 4). このとき, 双曲空間の向きを保つ等長変換  $f \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  で,  $f(p_0) = \infty, f(p_1) = 0, f(p_2) = 1$  となるものが存在する. このとき,  $z = f(p_3)$  の虚部が正となるように頂点を順序付ける. 理想四面体の辺  $p_0p_1$  と辺  $p_2p_3$  に複素数  $z$ , 辺  $p_0p_2$  と辺  $p_3p_1$  に複素数  $1/(1-z)$ , 辺  $p_0p_3$  と辺  $p_1p_2$  に複素数  $(z-1)/z$  をそれぞれ対応させる. この辺  $e$  に関する複素数を  $z(e)$  と書き, 辺  $e$  に関するモジュラスと呼ぶ. 辺に関するモジュラスは, 理想四面体の向きを保つ合同類に対して一意

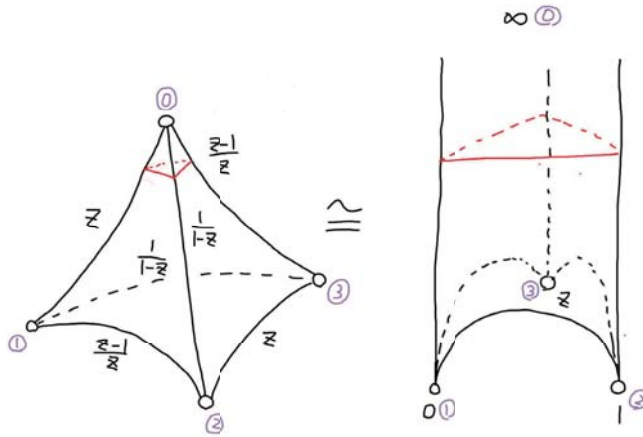


図4 双曲空間の理想四面体. 左図の各辺に添えられているのはモジュラス.

的に定まる.

続いて, 理想四面体の貼り合わせで得られる多様体上の双曲構造の計算に用いる貼り合わせ方程式について紹介する. 貼り合わせで同一視される理想四面体の辺の族を辺サイクルとよぶ.

**命題 2.1** (Thurston).  $M$  を理想四面体  $T_1, \dots, T_n$  を貼り合わせて得られるカusp付き向き付け可能3次元多様体とする. 任意の辺サイクル  $E$  に対して,

$$\prod_{e \in E} z(e) = 1$$

が成り立つとき,  $M$  には理想四面体によって (完備とは限らない) 双曲構造が導かれる.

命題 2.1 における方程式を貼り合わせ方程式とよぶ.

上記のように構成した双曲構造が完備である条件は以下のように与えられる. 理想四面体の各頂点において, 頂点を中心とする接球面と理想四面体の交わりを頂点のリンクと呼ぶ. リンクに双曲計量を制限することで, ユークリッド三角形になる. 理想四面体の貼りあわせにしたがって, 頂点のリンクを貼り合わせる時有限個のトーラス  $S_1, \dots, S_N$  の和集合となる.

**命題 2.2** (Thurston). 頂点のリンクを貼り合わせて得られる各トーラスに完備ユークリッド構造が導かれるとき,  $M$  の双曲構造は完備である.

リンクを貼り合わせて得られる各トーラスに完備ユークリッド構造が導かれる条件は以下のように確かめられる. リンクを貼り合わせて得られるトーラスの1つを  $L$  とする. 準同型  $\mu : \pi_1(L) \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ( $\mathbb{C}^*$  を複素数の積で群とみなす) を以下で定義する.  $\gamma \in \pi_1(L)$  をとる.  $L$  は理想四面体のリンクの和集合によって三角形分割が導かれ,  $\gamma$  は三角形の辺の列として表される. また, 各三角形の頂点は理想四面体の辺に対応し, 対応する理想四面体の辺のモジュラスを対応させる. このとき,

$$\mu(\gamma) = (-1)^{|\gamma|} \prod (\gamma \text{ の進行方向に対して右側の頂点に対応する辺のモジュラス})$$

と定義する. ただし  $|\gamma|$  は  $\gamma$  を表す辺の列の長さである.

**命題 2.3** (Thurston). リンクの貼り合わせで得られる各トーラスで準同型  $\mu$  が自明のとき, 各トーラスには完

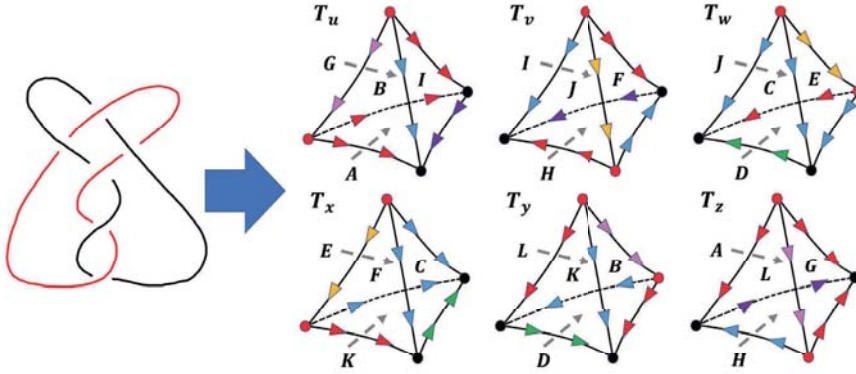


図5  $6_2^2$  の補空間の理想四面体分割 (標準的分割)

備ユークリッド構造が導かる。したがって、理想四面体を貼り合わせて得られる  $M$  の双曲構造は完備である。

続いて、理想四面体の貼り合わせで  $M$  に導かれる双曲構造が完備でない場合について紹介する。  $W$  を貼り合わせ方程式の解全体の空間とする。また、  $w \in W$  に対して、  $M_w$  を  $w$  に対応する理想四面体の貼り合わせで得られる (完備とは限らない) 双曲多様体とする。  $\pi_1(S_i)$  の生成元  $m_i, l_i$  を固定する。

$w \in W$  に対して、  $S_i$  が完備のとき、  $d_i(w) = \infty$  とする。  $S_i$  が完備ではないとき、次を満たす  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  が一意に存在する：

$$a_i \mu(m_i) + b_i \mu(l_i) = 2\pi\sqrt{-1}$$

このとき、  $d_i(w) = (a_i, b_i)$  とする。

写像  $d : W \rightarrow (\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\})^N$  を  $d(w) = (d_1(w), \dots, d_N(w))$  で定義する。

**命題 2.4** (Thurston).  $d(w)$  の各成分が  $\mathbb{Z}^2 \cup \{\infty\}$  に含まれるとき、  $M_w$  の完備化  $\overline{M_w}$  は双曲軌道体となる。

**注意 2.5.**  $N = 1$  で  $d(w) = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$  のとき、  $\overline{M_w}$  は  $M$  の  $(m, l$  に沿った)  $(a, b)$ -デーン手術で得られる軌道体と同型である。

### 3 絡み目 $6_2^2$

ここでは、本研究で調べた絡み目  $6_2^2$  の補空間、および特異点が  $6_2^2$  となる 3 次元軌道体について述べる。  $6_2^2$  の補空間は図 5 の理想四面体分割を持つ。  $6_2^2$  は二橋絡み目なので、 [7] により、これが Epstein-Penner の標準的分割であることがわかる。

**注意 3.1.** この 6 つの理想四面体による分割は、イントロダクションで述べた 4 つの理想正四面体によって完備双曲構造を実現する理想四面体分割ではない。 図 5 における理想四面体分割から、  $T_u, T_v, T_z$  と  $T_w, T_x, T_y$  に対して、 図 6 の操作を行うことで、 4 つの理想正四面体によって完備双曲構造を実現する分割が得られる。

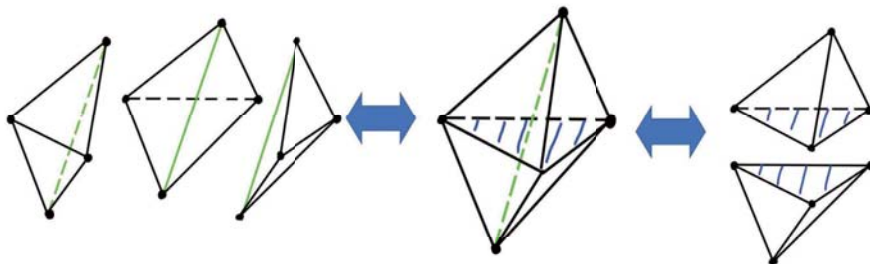


図6  $6_2^2$  の補空間の理想四面体分割の標準的分割から理想正四面体による分割を構成するための操作.

この理想四面体分割の貼り合わせ方程式を整理すると,

$$\begin{aligned} v &= y \\ uz &= wx \\ vwx &= 1 \\ w^3(v-1)^4x^3 &= (u-1)(w-1)(x-1)(z-1) \end{aligned}$$

が得られる. ただし,  $u, v, w, x, y, z$  は理想四面体の辺のモジュラスである. 各成分のメリディアン  $m_i$ , 標準的なロンジチュード  $l_i (i = 0, 1)$  を取ると,  $m_i, l_i$  はその成分に対応するリンクの貼り合わせで得られるトーラス  $S_i$  の基本群  $\pi_1(S_i)$  の生成元となる. このとき, 準同型  $\mu: \pi_1(S_i) \rightarrow \mathbb{C}^*$  による像は

$$\begin{aligned} \mu(m_0) &= \frac{(v-1)(y-1)}{v(w-1)xy(z-1)} \\ \mu(l_0) &= \frac{(u-1)(v-1)^4(y-1)^4}{u^2v^5w^2(w-1)^2x^4y^5(z-1)^5} \\ \mu(m_1) &= \frac{(x-1)(z-1)}{u(v-1)x(y-1)z} \\ \mu(l_1) &= \frac{(w-1)^2(z-1)^2}{u(u-1)v(v-1)w^2x(x-1)y(y-1)z^3} \end{aligned}$$

となる.

ここで,  $S_0$  では完備であり,  $S_1$  では十分小さい  $\theta > 0$  に対して錐角  $2\theta$  の錐特異点集合になる錐多様体を  $M[2\theta]$  とかく. つまり, 貼り合わせ方程式に関係式

$$\begin{aligned} \mu(m_0) &= 1, \mu(m_1) = 1 \\ \frac{\pi}{\theta} \log(\mu(m_1)) + 0 \log(\mu(l_1)) &= 2\pi i \end{aligned}$$

を加える. 理想四面体のパラメータを用いて整理すると,

$$\begin{aligned} v &= y \\ uz &= wx \\ vwx &= 1 \\ (v-1)^4 &= v^3(u-1)(w-1)(x-1)(z-1) \\ (v-1)(y-1) &= v(w-1)xy(z-1) \\ (u-1)(w-1)^2 &= u^2vw^2(x-1)^2yz^2 \\ \frac{x-1}{x(1-vx)} &= e^{2i\theta} \end{aligned}$$

とかける. この方程式を解くことで次を得る.

**命題 3.2.**  $\theta < \pi/5$  とする.  $M[2\theta]$  の理想四面体によるパラメータは,

$$x = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{-2e^{i\theta} - e^{2i\theta} - 2e^{3i\theta} + e^{4i\theta} + 1} - e^{i\theta} - e^{2i\theta} + 1 \right) e^{-3i\theta}$$

で与えられる. さらに, 他のパラメータは,

$$\begin{aligned} v &= y = \frac{e^{-2i\theta}}{x^2} (xe^{2i\theta} - x + 1) \\ u &= \frac{1 - xv}{v^2(1 - x) - v + 1} \\ w &= \frac{1}{xv} \\ z &= \frac{v^2(1 - x) - v + 1}{v(1 - xv)} \end{aligned}$$

で与えられる.

**注意 3.3.** コンピュータを用いた数値実験では  $\theta = \pi/5$  の近傍で, 理想四面体が平面につぶれることが確認できる. つまり,  $\theta = \pi/5$  の近傍で虚部が 0 になる. さらに  $\theta$  が小さくなると虚部が負になる. したがって,  $\pi/2$  に十分近い  $\theta$  に対しては,  $M[2\theta]$  はこのパラメータで実現できない.

### 4 絡み目の族と基本多面体

前節での, 理想四面体分割による錐多様体  $M[\theta]$  の双曲構造の構成では,  $\theta = \pi/2$  に到達することは困難であった. ここでは, 双曲構造を計算するための理想四面体分割ではないアプローチ, つまり,  $6_2^3$  の片方の成分に沿った分岐被覆によって得られる絡み目の補空間の双曲構造を計算することで, 錐多様体  $M[\theta]$  の双曲構造を計算する.

$M_n$  を  $M[2\pi/n]$  の錐特異点集合に沿った  $n$  重分岐被覆空間とする (図 4).  $6_2^3$  の各成分は自明な結び目なので,  $M_n$  は  $S^3$  内の絡み目  $K_n$  の補空間である.  $K_n$  は  $n$  が 3 の倍数のとき 3 成分絡み目, その他のときは結び目である (図 8 参照).

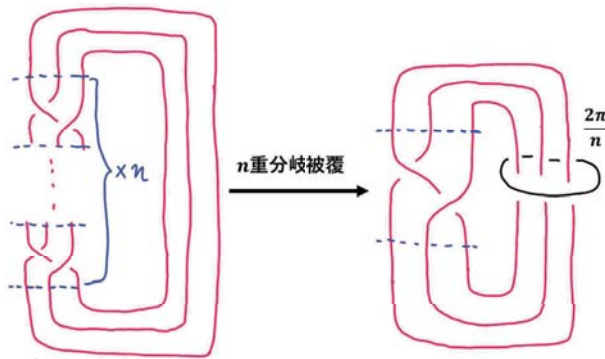


図 7  $K_n$  の構成

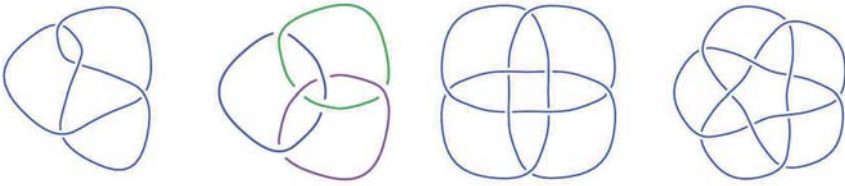


図8 具体的な  $K_n$  の図. 左から  $K_2 = 4_1$ ,  $K_3 = 6_3^2$ ,  $K_4 = 8_{18}$ ,  $K_5 = 10_{123}$ . 各図式は [4], [5] のもの.

$n > 2$  に対して, [7] によって  $M_n$  の理想多面体分割が決定されている. 図4はその理想多面体分割を示したものである.

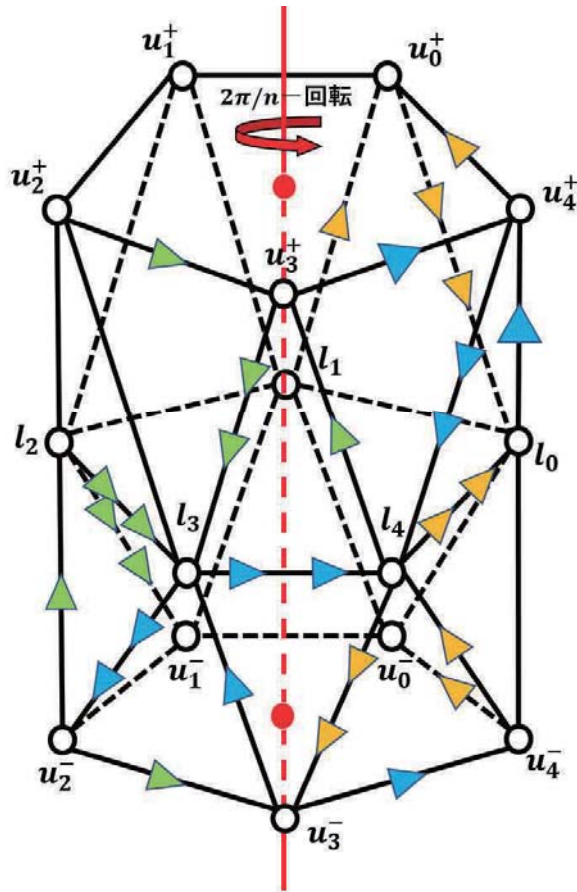


図9  $K_n$  の理想多面体分割. 図は  $n = 5$  の場合

双曲空間内でこの理想多面体の実現を考える．双曲空間の理想境界  $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  の点

$$\begin{aligned} u_k^+ &= re^{(2k+1)i\theta} \\ u_k^- &= \frac{1}{r}e^{(2k+1)i\theta} \\ l_k &= e^{2ki\theta} \end{aligned} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

をとる． $u_k^+, l_k$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) の凸包として得られる理想多面体を  $P_n^+$ ， $u_k^-, l_k$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) の凸包として得られる理想多面体を  $P_n^-$  とする． $M_n$  の理想多面体分割  $P_n^+ \cup P_n^-$  は Epstein-Penner [2] の意味での標準的分割に一致する．また， $l_1 \cdots l_n$  の凸包として得られる面で  $P_n^+$  と  $P_n^-$  を貼り合わせてできる理想多面体を  $P_n$  とする．

面の貼り合わせから， $P_n$  の辺と面には次の同値関係が誘導されている．

辺

各  $k = 0, \dots, n-1$  に対して，

- $l_k l_{k+1} \sim u_{k+1}^+ l_{k+1} \sim l_k u_{k-1}^-$
- $u_k^+ u_{k+1}^+ \sim l_{k+2} u_{k+1}^+ \sim u_k^- l_k \sim u_k^- u_{k+1}^-$

で辺を同一視する．ただし，添え字は  $n$  を法として考える．したがって，辺サイクルの数は  $2n$  個となる．

面

- $u_0^\pm, \dots, u_{n-1}^\pm$  の凸包を  $U^\pm$  (複号同順) とするとき， $U^+ \sim U^-$
- $u_k^\pm, l_k, l_{k+1}$  の凸包を  $A^\pm$  (複号同順) とするとき， $A^+ \sim A^-$
- $u_k^\pm, u_{k+1}^\pm, l_{k+1}$  の凸包を  $B^\pm$  (複号同順) とするとき， $B^+ \sim B^-$

**補題 4.1.** 理想多面体  $P_{2\pi/n}$  を理想四面体に分割して得られる貼り合わせ方程式を整理すると

$$r^2 - 2r \cos \theta + 1 = 4r \sin^2 \theta$$

となる．よって，貼り合わせの条件を満たす  $r(> 1)$  は，

$$r = \cos \theta + 2 \sin^2 \theta + \sin \theta \sqrt{(3 - 2 \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)}$$

となる．

**proof.** 各辺のサイクルの周りで理想四面体に分割し，その理想四面体のパラメータによって貼り合わせ方程式を計算する．

辺サイクル  $E_k^l = \{l_k l_{k+1}, u_{k+1}^+ l_{k+1}, l_k u_{k-1}^-\}$  に関する貼り合わせ方程式を計算する． $\{l_k, l_{k+1}, u_k^+, l_{k+2}\}$ ， $\{u_{k+1}^+, l_{k+1}, u_k^+, l_{k+2}\}$ ， $\{l_k, u_{k-1}^-, u_k^-, l_{k-1}^-\}$ ， $\{l_k, l_{k+1}, l_{k+2}, u_k^-\}$  を頂点とする理想四面体の辺サイクルに含まれる辺に関するモジュラスの積が 1 になればよい．よって，満たすべき式は

$$\begin{aligned} & \left( \frac{l_{k+2} - l_{k+1}}{l_{k+2} - l_k} \frac{u_k^+ - l_k}{u_k^+ - l_{k+1}} \right) \left( \frac{u_k^+ - l_{k+1}}{u_k^+ - u_{k+1}^+} \frac{l_{k+2} - u_{k+1}^+}{l_{k+2} - l_{k+1}} \right) \\ & \left( \frac{l_{k-1} - u_{k-1}^-}{l_{k-1} - l_k} \frac{u_k^- - l_k}{u_k^- - u_{k-1}^-} \right) \left( \frac{u_k^- - l_{k+1}}{u_k^- - l_k} \frac{l_{k+2} - l_k}{l_{k+2} - l_{k+1}} \right) = 1 \end{aligned}$$

となる．この式を，整理して主張の式を得る．

他の辺サイクルについても同様に計算することで，同じ式を得られる．

□



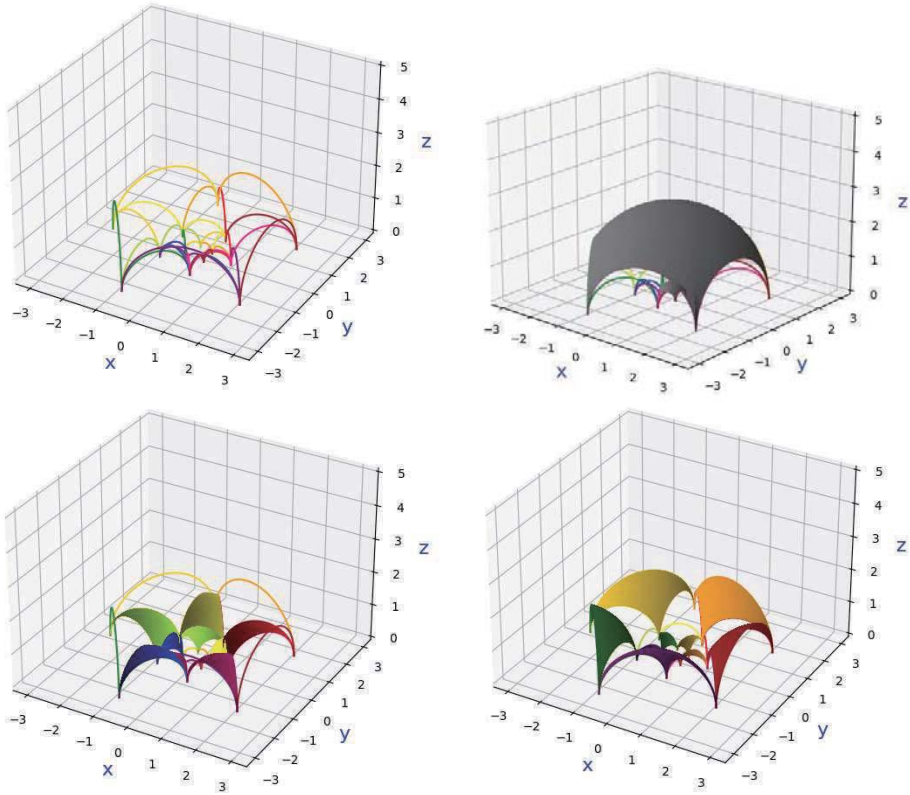


図 10 上半空間に  $P_n$  を実現したときの貼り合わせのパターン．辺の貼り合わせ (左上), 面  $U^+$  の貼り合わせ (右上), 面  $A_k^+$  の貼り合わせ (左下), 面  $B_k^+$  の貼り合わせ (右下) のパターンを表す．それぞれ同じ色が与えられた部分を貼り合わせる．各図は matplotlib を用いて作成した．

ここで,  $P_{2\pi/n}^+$  の対称群  $\text{Isom}^+(P_{2\pi/n}^+)$  は, 頂点の集合  $V^+$  に推移的に作用する．よって,  $P_{2\pi/n}^+$  の各頂点において, 同じユークリッド半径の接球体を取ればリンクは互いに合同になる．

$P_{2\pi/n}^+$  の頂点  $l_0$  のリンク  $L(l_0)$  を考える．リンク  $L(l_0)$  のユークリッド三角形としての相似類を計算する． $l_0$  と 1 本の辺で繋がる  $P_{2\pi/n}^+$  の頂点は,  $l_{n-1}, u_{n-1}^+, u_0^+, l_1$  である． $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  を,

$$\phi(z) = \frac{re^{i\theta} - 1}{re^{i\theta} - e^{2i\theta}} \cdot \frac{z - e^{2i\theta}}{z - 1}$$

と置くと,  $\phi(l_0) = \infty, \phi(l_1) = 0, \phi(u_0^+) = 1$  を満たす．特に,  $L(l_0)$  は  $\phi(l_1) = 0, \phi(u_0^+) = 1, \phi(u_{n-1}^+), \phi(l_{n-1}^+)$  を頂点とする Euclid 四角形と合同である．特に, 各頂点の角度の和は  $2\pi$  であることから,  $\alpha + \beta = \pi$  を得る． $P^+$  の定義から,  $\|\phi(u_0^+) - \phi(l_1)\| = \|\phi(u_{n-1}^+) - \phi(l_{n-1})\|$  が  $r$  の値に依らずに成り立つ．さらに, 直接計算することにより次がわかる．

**補題 4.2.**  $\|\phi(u_0^+) - \phi(u_{n-1}^+)\| = \|\phi(u_0^+) - \phi(l_1)\|$  である必要十分条件は,  $r$  が

$$r^2 - 2r \cos \theta + 1 = 4r \sin^2 \theta$$

を満たすことである．

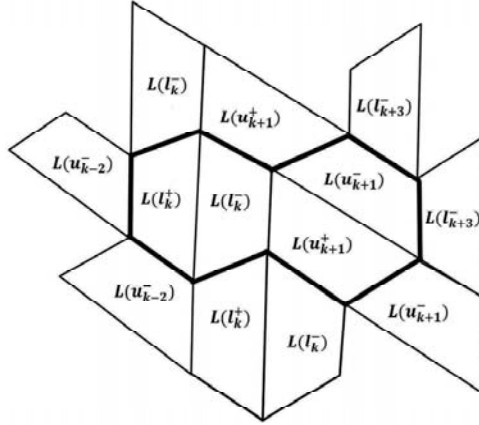


図 11  $P_{2\pi/n}^+$  の各頂点のリンクによるユークリッド平面のタイル貼り. 太枠部分で囲った部分が周期的に繰り返される.

補題 4.1 と補題 4.2 より,  $r = \cos \theta + 2 \sin^2 \theta + \sin \theta \sqrt{(3 - 2 \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)}$  のとき,  $P_{2\pi/n}$  の頂点のリンクをはりあわせて得られるトーラスには完備ユークリッド構造が導かれ, 理想多面体  $P_{2\pi/n}$  を貼り合わせて得られる  $M_n$  の双曲構造は完備である.

以下,  $r = \cos \theta + 2 \sin^2 \theta + \sin \theta \sqrt{(3 - 2 \cos \theta)(1 + 2 \cos \theta)}$  とする. 十分大きい  $n \in \mathbb{Z} > 0$  を固定し,  $\theta = \pi/n$  とする.  $\rho_n \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  を  $\rho_n(z) = e^{2i\theta} z$  とおく.  $G_n$  を  $\rho_n$  が生成する  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  の部分群とする. このとき,  $G_n$  は  $P_{2\pi/n}$  に作用する.  $D_n = \{(z, t) \in \mathbb{H}^3 \mid 0 \leq \arg z \leq 2\theta\}$  とおくと, この作用の基本領域として,  $\overline{P}_{\pi/n} = D_n \cap P_{2\pi/n}$  を取る.  $\overline{P}_{\pi/n}$  は, 理想頂点として,  $w_1 = u_{n-1}^-, w_2 = u_0^-, w_3 = l_0, w_4 = l_{n-1}^+$ ,  $w_5 = l_0^+$ , 実頂点として,  $v_1 = (0, r), v_2 = (0, 1/r), v_3 = (\cos \theta e^{-i\theta}, \sin \theta), v_4 = (\cos \theta e^{i\theta}, \sin \theta)$  をもつ理想多面体である.

$\theta$  を 0 に十分近い正の実数として,  $w_1 = (re^{-i\theta}, 0), w_2 = (re^{-i\theta}, 0), w_3 = (1, 0), w_4 = (e^{-2i\theta}, 0), w_5 = (e^{2i\theta}, 0), v_1 = (0, r), v_2 = (0, \frac{1}{r}), v_3 = (\cos \theta e^{-i\theta}, \sin \theta), v_4 = (\cos \theta e^{i\theta}, \sin \theta)$  を頂点とする理想多面体  $\overline{P}_\theta$  を考える. 構成から,  $\overline{P}_\theta$  は錐多様体  $M[2\theta]$  の基本領域である. 特に, 辺  $v_1 v_2$  は錐角  $2\theta$  の錐特異点集合になる. 直接計算することで, 辺  $v_1 v_2$  の長さは  $2 \log r$  となることがわかる. また, 図 12 において,  $\overline{P}_\theta$  の面角  $\alpha, \beta$  は次を満たす:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \theta - \frac{1}{2} \\ \cos \beta &= -\cos \alpha = \cos \theta + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**命題 4.3** (Schläfli formula for cone-manifold, [1], Theorem 3.20).  $C_t$  を 3 次元多様体  $M_t$  上の錐双曲構造の滑らかな族とする. さらに, 底空間と錐特異点集合は  $t$  によらずに同相であるとする. このとき,

$$-2 \frac{dV_t}{dt} = \sum_i \text{Length}(\Sigma_i) \frac{d\theta_i}{dt}$$

が成り立つ. ここで,  $V_t$  は  $C_t$  の体積,  $\Sigma_i$  は錐特異点集合の連結成分で,  $\theta_i$  は  $\Sigma_i$  の錐角である.

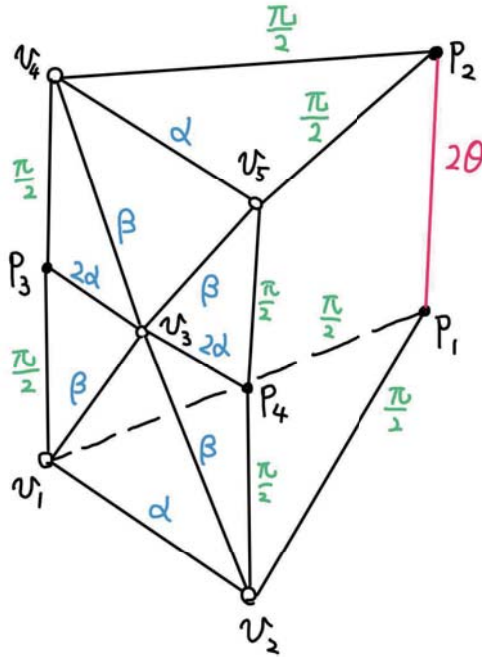


図 12 錐多様体  $M[2\theta]$  の基本多面体  $\bar{P}_\theta$ . 赤の辺は錐角  $2\theta$  の錐特異点集合.

定理 4.4.  $\bar{P}_\theta$  の体積は,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\bar{P}_\theta) &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta \log r(t) dt + V_3 \\ &= -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^\theta \left( \log \cos t + 2 \sin^2 t + \sin t \sqrt{(3 - 2 \cos t)(1 + 2 \cos t)} \right) dt - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \log(2 \sin t) dt \end{aligned}$$

で与えられる. ここで,  $V_3$  は理想正四面体の体積である.

proof.  $V(\theta) = \text{Vol}(\bar{P}_\theta)$  とする. 命題 4.3 を  $\bar{P}_\theta$  に適用すると,

$$-2 \frac{dV(\theta)}{dt} = 2 \log r(\theta) \times \frac{d\theta}{dt}$$

となる. 整理して両辺を  $t$  で積分すると,

$$V(\theta_0) = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_0} \log r(t) dt + C$$

となる. ただし  $C$  は積分定数である.

$C = V(\pi/2) = V_3$  であることを確かめる.  $\theta = \frac{\pi}{2}$  とする. このとき,  $r = 2 + \sqrt{3}$  となる. また,  $P_2^+$  は  $u_0^+, u_1^+, l_0, l_1$  の凸包,  $P_2^-$  は  $u_0^-, u_1^-, l_0, l_1$  の凸包となる. したがって,  $P_2^\pm$  は理想四面体である.

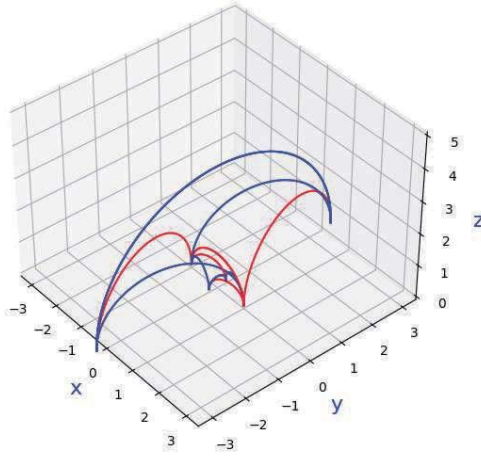


図 13  $P_2$  の図. 同じ色の辺同士を貼り合わせると 8 の字結び目の補空間が得られる.

辺のモジュラスを具体的に計算する. 各頂点の座標は

$$\begin{aligned} u_0^+ &= r\sqrt{-1}, & u_1^+ &= -r\sqrt{-1} \\ l_0 &= 1, & l_1 &= -1 \\ u_0^- &= \frac{1}{r}\sqrt{-1}, & u_1^- &= -\frac{1}{r}\sqrt{-1} \end{aligned}$$

である. 各理想四面体の各辺のモジュラスは  $(-1 + \sqrt{-3})/2$  で,  $P_2^\pm$  は理想正四面体である. したがって,

$$C = V(\pi/2) = \text{Vol}(\overline{P}_{\pi/2}) = \frac{1}{2}\text{Vol}(P_{\pi/2}) = \frac{1}{2}(\text{Vol}(P_{\pi/2}^+) + \text{Vol}(P_{\pi/2}^-)) = V_3$$

□

**注意 4.5.**  $P_n$  の貼り合わせパターンにしたがって得られる  $P_2^\pm$  の辺の貼り合わせパターンは, 添え字は 2 を法として考えることに注意すると

- $l_0 l_1 \sim u_1^+ l_1 \sim l_0 u_1^- \sim l_0 u_0^+ \sim u_0^- l_1$
- $u_0^+ u_1^+ \sim l_0 u_1^+ \sim u_0^- l_0 \sim u_0^- u_1^- \sim u_0^+ l_1 \sim l_1 u_1^-$

となる (図 13). これは, 8 の字結び目の補空間の理想四面体分割 (図 1) に一致する.

特に,  $M_n$  の双曲体積は,

$$\text{Vol}(M_n) = -2n \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \log \cos t + 2 \sin^2 t + \sin t \sqrt{(3 - 2 \cos t)(1 + 2 \cos t)} \right) dt + nV_3$$

で与えられ, 絡み目の族  $\{K_n\}$  の双曲体積が得られる.

### 参考文献

[1] D. Cooper, C. D. Hodgson, and S. Kerckhoff. *Three-Dimensional Orbifolds and Cone-Manifolds*, Vol. 5. Mathematical society of Japan, 2000.

- [2] D. B. A. Epstein and R. C. Penner. Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds. *Journal of Differential Geometry*, Vol. 27, No. 1, pp. 67–80, 1988.
- [3] H. M. Hilden, M. T. Lozano, and J. M. Montesinos-Amilibia. On a remarkable polyhedron geometrizing the figure eight knot cone manifolds. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, Vol. 2, No. 3, pp. 501–561, 1995.
- [4] C. Livingston and A. H. Moore. KnotInfo: Table of knot invariants. URL: [knotinfo.math.indiana.edu](http://knotinfo.math.indiana.edu), Current Month Current Year.
- [5] C. Livingston and A. H. Moore. LinkInfo: Table of link invariants. URL: [linkinfo.math.indiana.edu](http://linkinfo.math.indiana.edu), Current Month Current Year.
- [6] J. G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Vol. 149. Springer, 1994.
- [7] M. Sakuma and J. Weeks. Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements. *Japanese journal of mathematics. New series*, Vol. 21, No. 2, pp. 393–439, 1995.
- [8] W. P. Thurston. *The Geometry and Topology of Three-manifolds*. Princeton University, 1979.