（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（情報学）	氏名	清水　良輔
論文題目	Construction of p-energy and associated energy measures on the Sierpiński carpet （Sierpiński carpet 上のp-エネルギーと対応するエネルギー測度の構成）		

（論文内容の要旨）

本論文では無限分岐的な自己相似集合であるSierpiński carpet(以下SCと略す)と呼ばれるフラクタル上において、結果として構成されたSobolev空間がある指数のヘルダー空間に埋め込まれるという意味でpが「次元（後述のARC次元）」より大きな場合のp-エネルギーや関連する関数空間、測度の構成、及び、その基本的性質の解析を行った。主結果は以下の３つに要約される：

1） SC上へのSCの幾何的性質を反映した自然なp-エネルギーとその定義域としての(1,p)-Sobolev空間の構成。

2) (1,p)-Sobolev空間の「測度距離空間上のBesov空間」としての同定。

3) p-エネルギー測度の構成、及び、その局所性や連鎖律などの基本的性質の証明。

以下ではこの研究の背景および主結果について詳述する。「フラクタル上の解析学」は 1980年代後半に自己相似集合の上での自己相似的な拡散過程（Dirichlet form)の構成を皮切りに大きな進歩を遂げた。しかしながらこの研究は、確率論（Markov 過程論）に依存するところが大きく、Dirichlet formの単純なL^p化に相当するp-エネルギーについてはフラクタルのような複雑な空間上で満足に扱えない状況であった。その一方で、近年の「距離空間の幾何学」の研究により、距離空間を離散近似するグラフ上のp-エネルギーと、Ahlfors正則等角次元（以下ARC次元と略す）という幾何学的量との関連が明らかになり、空間の上のp-エネルギー(非線型ポテンシャル論)がARC次元と深い関係を持つことが示唆されていた。ここでARC次元はGromov双曲群の境界やその作用の性質と深く関わることが知られている擬対称不変量である。ARC次元はEuclid空間などの「滑らか」な場合では通常の意味での次元(Hausdorff次元や位相次元)と一致するが、SCなどの「複雑」な空間では非自明な量となる。そのため「非線型ポテンシャル論とARC次元の関わり」という幾何学と解析学の新しい交わりを見る端緒として、まずフラクタル上で p-エネルギーを構成する必要があった。 本論文では「p > ARC次元」という意味で低次元の場合に、このエネルギーの構成問題を解決した。

主結果1）では、p = 2の場合に相当するSC上で（Brown運動と呼ばれる）自己相似的な拡散過程の構成を行ったKusuoka-Zhouの方法の本質を抽出し、それを一般のpの場合に拡張することにより、離散p-エネルギーのスケール極限としてSCの自己相似性や対称性を保存する「自然」なエネルギーを構成した。このような直接的な構成により、下に述べる定義域の特徴付けやp-エネルギーの性質の解析が可能となった。

主結果2）では、p-エネルギーの定義域となる(1,p)-Sobolev空間に相当する関数空間をSCのHausdorff次元やwalk次元から定まる指数を持つFractional Korevaar-Schoen型の関数空間と同定した。さらに、その指数が、ユークリッド空間とは異なり、pよりも真に大きいことを示した。

主結果 3）では、SCの自己相似性を用いて関数の局所的なp-エネルギーを与えるp-エネルギー測度を構成した。さらに構成された　p-エネルギー測度のC^1級の関数に対するL^p量の連鎖律等の成立を含め、基本的な幾つかの性質を示した。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は、フラクタルの古典的な例の一つであるSC上にSobolev空間に相当する関数空間を構成することを主要な結果としている。ユークリッド空間やリーマン多様体上では、Sobolev空間は、(非線形) 偏微分方程式論・ポテンシャル論などの解析学を展開する上での基本的な道具の一つである。このSobolev空間を一般の距離空間においてどのように構成するのかは、解析学における長年の懸案となっていた。

そのような懸案に対して、従来は、Lipschitz連続な関数の局所Lipschitz定数を微分の代替とみなし、そのp乗積分が有界な関数の集まりを (1, p)-ソボレフ空間とする方法が主流であった。この方向では、1990年代の Hajlasz, Cheeger, Shanmugalingam らによる基本的な結果があり、現在では確立された一つの研究分野として盛んに研究が行われている。しかしながら、この方法で構成された (1, 2)-Sobolev空間から導かれる拡散過程の熱核はガウス型の漸近挙動を持つことが知られている一方、Barlow-BassおよびKusuoka-Zhouによって構成されたSC上の標準的な拡散過程（Brown運動）については、その熱核はガウス型の漸近挙動を持たないことがわかっている。つまり、Hajlasz, Cheeger, Shanmugalingam らが構成したSobolev空間の理論はSCなどの場合には適用ができず、SCに代表される自己相似集合の上へのSobolev空間の構成は未解決な問題となっていた。

本論文はこのような状況に対して、SCを離散近似するグラフの列上の離散的な p-エネルギーのスケーリング極限として p-エネルギーを定義するという新しい方法を提唱した。そしてpが空間のARC次元より大きい場合について、実際にスケーリング極限が存在すること、その極限に付随する関数空間が反射的なBanach空間でありSC上の連続関数の空間に連続的に埋め込まれていること、pが２の場合に知られているディリクレ形式に付随するエネルギー測度の概念が、pの場合にも拡張できること、エネルギー測度がchain ruleを満たすこと、さらには構成された関数空間がfractional Korevaar-Shoen表現を持ち、そこに現れる指数の振る舞いが、ユークリッド空間とは本質的に異なることなどの、基本的な結果を示した。 これらの結果の証明は、p = 2の場合のKusuoka-Zhouの手法を基礎としてはいるが、一般のpの場合への拡張において、独自の高度な解析学的手法を見いだしており、申請者の数学的技量は博士学位取得に十分な水準にある。さらに、以上の結果は、SC上のSobolev空間の構成という未解決問題を解決するとともに、従来のユークリッド空間あるいはリーマン多様体上のSobolev空間の理論の常識がSC上では通用しないことを明らかにしている。ひいては、前述の Hajlasz, Cheeger, Shanmugalingam らによる距離空間上のSobolev空間の理論そのものにも大きな見直しを提起するものであり、学術的価値は極めて高い。よって本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和4年7月27日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。また、本論文のインターネットでの全文公表についても支障がないことを確認した。