On realization problems of graphs as Reeb graphs of smooth functions with prescribed preimages

北澤直樹(Naoki Kitazawa)　(九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)*

(可微分)多様体を, その上の, 自身より次元の高くない空間への良い(可微分)写像を用いてみ, 調べるという手法は, 自然で重要である. 主に多様体の幾何学で多くの大きな面白い貢献をしてきており今もし続けている. その際, 逆像の連結成分からなる定義域の多様体の商空間 Reeb 空間が多くの場面で重要な道具となる. 本稿では, 関連した自然で重要な問題, 与えられたグラフを性質の良い可微分関数の Reeb 空間として実現できるかという　Sharko が創始した問題, 特に最近本質的に著者自身が創始したと考える, 逆像が指定したものになるように実現できるかという問題について知られた結果得られた結果も含め紹介する.

なお, 本稿の多くは [13] とも記述や内容が多く重複していることを添えておく. ただし, 後半の Main Theorem 3 等新たに加わった記述も存在する.

1. Reeb 空間(グラフ).

$c : X \to Y$ を位相空間の間の(連続)写像とする. X の任意の 2 点 x_1,x_2 について, Y のある点 y の逆像 $c^{-1}(y)$ の同じ連結成分にあるときかつその時に限り $x_1 \sim_c x_2$ をみたすよう, X 上の関係 $\sim_c$を定義する. 明らかにこれは同値関係である.

Definition **1.** 商空間 $W_c := X/\sim_c$ を c の Reeb 空間と呼ぶ.

$q_c : X \to W_c$ で商写像, $\bar{c}$ で $c = \bar{c} \circ q_c$ をみたす写像として定義する. 前者は連続写像, 後者は連続写像としてしかも一意に定まる.

今後, 滑らかな多様体の間の滑らかな写像で, 定義域の多様体の方が値域の多様体より次元の高いようなものとその Reeb 空間を考える. 多様体上の可微分関数や写像の Reeb 空間に関し, [20] が関連した初期の論文の一つである.

以降 $f : M \to N$ で滑らかな多様体 M から滑らかな多様体 N への滑らかな写像を表す. f の特異点とは, M の点 $p \in M$ でそこでの微分 df_p について階数が M, N 双方の次元より低いものとする. ある特異点 p での値として表せる $f(p)$ を f の特異値と呼ぶ. 特異値でない N の点を f の正則値と呼ぶ.

滑らかな多様体からなるクラスを考え, 滑らかな多様体 M_1 と M_2 について, 一方から他方への滑らかで特異点をもたないような同相写像つまり微分同相写像が存在するときかつその時に限り同値とし, 同値類をその多様体の微分同相型と呼ぶ(もちろんここで考えた関係は同値関係である). 多様体 M_1 と M_2 の微分同相型が等しいとき M_1 は M_2 に(M_1 と M_2 は) 微分同相であるという.

今後 $k > 0$ 次元 Euclid 空間を $\mathbb{R}^k$ で表す. これは自然な k 次元の滑らかな多様体であり, 自然な計量を有する Riemann 多様体でもある. $x \in \mathbb{R}^k$ と原点 0 の間に定まる距離を $||x|| \geq 0$ で表す. $S^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid ||x|| = 1\}$ で k 次元単位球面を表す(ただし k は 0 以上の整数). この多様体は, k 次元の滑らかな閉部分多様体で, 境界をもたずコンパクトである. そして $k \geq 1$ ならば連結である. $D^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid ||x|| \leq 1\}$ で k 次元単位球体を表す(ただし k は 1 以上の整数). これは k 次元の滑らかな閉部分多様体で, 境界をもちコンパクトである.

f がさほど病的でなく, (適切な文脈で)一般的な滑らかな写像のとき, W_f は値域の空間と同次元の多面体(で, 一般に滑らかな多様体から自然に一意に多面体の構造が定まることがよく知られている中, 値域の多様体に定まるそれを引き戻す形

*e-mail: n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp
web: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html

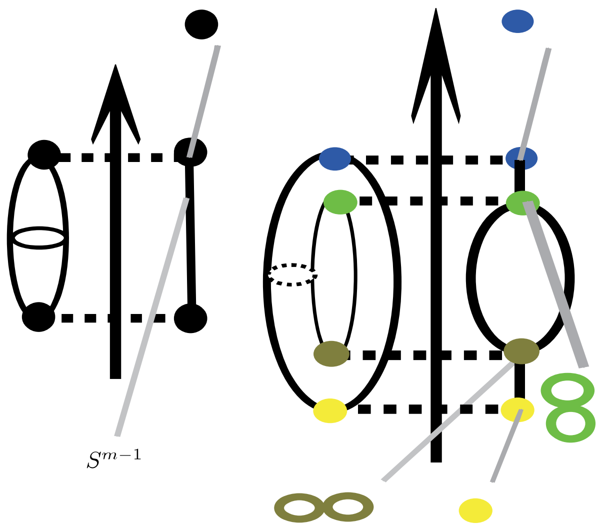

Figure 1: 次元 2 以上の単位球面の自然な高さを考えて得られる Morse 関数と Reeb グラフ(左). $\mathbb{R}^3$ に自然な形で埋め込まれたトーラス($S^1 \times S^1$)に対し自然な高さを考えて得られる Morse 関数と Reeb グラフ(右). グラフの点を指し示す線の先にある点や円周等の図形や単位球面 "S^{m-1}"の表記は, その点の q_f で考えた逆像を示す: なお右のグラフで辺(の内部)の各点の逆像は円周.

で自然に誘導されるもの)となる. Reeb 空間 W_f がこのような多面体であるという状況について, f が関数の場合 Reeb 空間 W_f はグラフになる. なお, 本稿で, グラフに関する用語, 例えば頂点(集合), 辺(集合), 多重辺, ループ他, グラフが連結であることや有限であることについては, 読者にとって既知の基本的な概念とする. また, グラフは自然に位相空間, 1 次元のセル複体(CW 複体)とみなせるが, 二つのグラフが同型であるとは, その間の PL 同相写像で一方のグラフの頂点集合をもう一方のグラフの頂点集合に写す様なものがあることとする(勿論グラフ全体の集まりの間の同値関係として同型であるという関係も定まる).

Theorem 1 ([23]). コンパクト多様体上の滑らかな関数 f で特異値が高々有限個であるようなものについて, W_f は 1 次元コンパクト多面体となる, つまり有限なグラフと同相である. 閉多様体上の滑らかな関数 f で特異値が高々有限個であるようなものについて, W_f は, 頂点集合を q_f に関しての逆像が特異点を含むようなもの全体からなる集合であるとしたグラフとなる.

Definition **2.** 閉多様体上の滑らかな関数 f で, W_f が, 頂点集合を q_f で考えた逆像が特異点を含むようなもの全体からなる集合であるとしてグラフとなるとき, Reeb グラフと呼ぶ.

例えば, Morse(-Bott) 関数のような特異点のまわりでの型が複雑でないような関数 f では, Reeb グラフ W_f が得られる. Morse 関数の定義や基本的な用語や性質は省略させて頂く. Morse-Bott 関数についても同様とするが, 各特異点の周りでは, 適当に選ばれた座標のもとで射影と Morse 関数の合成で表せているような滑らかな関数として定義することだけ言及しておく. 有名文献として, Morse 関数の理論に関して [16, 18, 19], Morse-Bott 関数に関して [1] がある.

Figure 1 と Figure 2 で Morse 関数, Morse-Bott 関数とその Reeb グラフの例を紹介しておく.

Remark **1.** ある程度良い性質を有する値域の方が次元が低いような滑らかな写像

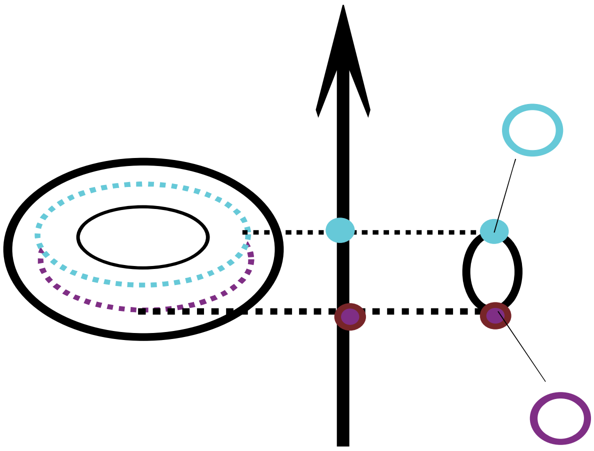

Figure 2: $\mathbb{R}^3$ に自然な形で埋め込まれたトーラスに対し自然な高さを考えて得られる Morse-Bott 関数と Reeb グラフ. グラフを指し示す線の先にある円周は, Figure 1 同様逆像を示し, また辺(の内部)の各点での逆像も円周.

について, Reeb 空間が値域の空間と同次元の多面体になるということについて補足する. [14] で次元 3 以上の閉多様体から平面への, 特異点の観点からして一般的な滑らかな写像, いわゆる安定写像で示されている. 安定写像という滑らかな写像のクラスは, 各特異点で値が異なるような閉多様体上の Morse 関数全体を含むようなクラスである(閉多様体上の滑らかな関数についてそういう関数であることと安定であることは同値である). 安定写像等の説明を含む可微分写像の特異点理論に関する教科書的文献として [2] 等がある. Reeb 空間が値域の空間と同次元の多面体になるという事実は, [26] でかなり一般的な状況で示されている. このような状況で, Reeb 空間は多様体の情報を完璧ではなくともそれなりにとらえる. 具体的には, 特別な状況では, ホモロジー群コホモロジー環等多様体の代数的な情報をある程度握る. [21, 24] 他著者の論文プレプリント, [3, 4, 5, 8, 9] 等に関連した話がある.

2. グラフの具体的な可微分関数の Reeb グラフとしての実現.

今後有限でループを持たない一方, 多重辺は持ちうるようなグラフが, 基本的で重要な位相的対象となる. これらのグラフは自然に 1 次元の多面体と考える. なおグラフに関する基本的な用語等の説明は省略する.

本稿では次の問題を中心的に扱う.

Problem **1.** 与えられたグラフを Reeb 空間とした性質の良い滑らかな関数を構成できるか ? ただし**定義域の多様体**について事前指定はしない. 尤も**多様体の次元を制限する等定義域多様体のクラス程度は制限**する.

発表者が本質的に創始し既に多く結果を得ている, 以下の問題を中心に紹介する.

Problem **2.** Problem 1 において, 正則値の逆像まで前もって指定して, 性質の良い滑らかな関数を構成できるか?

これらの問題は, 基本的で自然で重要である. しかし, 一般に, 「具体的に(特に大域的に)滑らかな写像を構成することの難しさ」というもの等があり難しい. これまで以下のような研究があった.

- 頂点や辺に関して特定の適切な条件を満たすようなグラフと同型なグラフを Reeb グラフとする, 閉曲面上の滑らかな関数の構成([25]). Problem 1 のよう

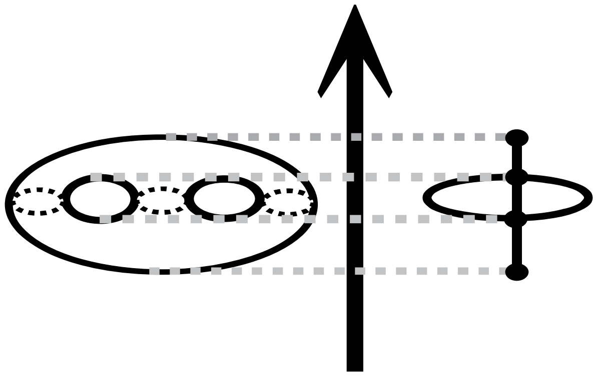

Figure 3: 与えられたグラフ(右)と閉曲面上の滑らかな関数(左).

な問題の始まりといえる研究である.

- 任意の, 有限でループを持たない(が多重辺は持つかもしれないような)グラフに対し, それと同型なグラフを Reeb グラフとする, 閉曲面上の滑らかな関数を構成([15]).
- 適切な条件を満たすようなグラフについて, それと同型なグラフが Reeb グラフとなる, Morse 関数で正則値の逆像が単位球面の非交和と微分同相になるようなものを多様体の次元を 2 以上の任意次元として構成([17]).

Figure 3 は, 右のグラフに対し, 左の方で表されているような滑らかな関数を得ていることを表す.いわゆる種数 2 の向き付け可能な閉曲面上の関数を示す.

以下が主結果の一つである.

Main Theorem 1 ([6])**.** $G := (V, E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする(V を頂点集合 E を辺集合とする). $g : G \to \mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e \in E$ 上で単射であるようなものとする. l を, E 上の非負の整数を値とするような関数とする. このとき, ある 3 次元向き付け可能連結閉多様体 M とその上の滑らかな関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. Reeb グラフ W_f が定まり W_f と G は同型(以降適切な同一視を定めて考える).
2. a を辺 e の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は種数 $l(e)$ の向き付け可能な閉曲面.
3. p が特異点のとき $q_f(p) \in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f = G$ の頂点で, $g(q_f(p)) = f(p)$.
4. $q_f(p) \in V$ が g の極値を与えないような頂点であり p が特異点のとき, f は p の周りで Morse 関数となる.
5. $q_f(p) \in V$ が g の極値を与えるような頂点であり次数は 1 で, $e \ni v$ であるような辺 $e \in E$ について $l(e) = 0$ とする. p が特異点のとき, f は p の周りで Morse 関数となる.
6. p が直前の 2 パターンに当てはまらないような特異点のとき, f は p の周りで Morse 関数とはならない. しかしこのような特異点の周りでの f について, 有限個のもの以外の周りでは, Mose-Bott 関数として表せる.

証明の概略を述べる. グラフの頂点のまわりでの局所的な関数を構成し, 残りの部分は射影を構成して最後に貼り合わせるという形で滑らかな関数を構成する. グラフの頂点の周りでの構成のみ簡単に紹介する.

まず, 極値を与えないような頂点の周りでは, Morse 関数の特異点と多様体のハンドルが対応しているという古くからの有名な事実を利用する. 局所的に, Reeb 空間がその頂点 v とそれを含む辺全体の和集合として表される元のグラフの部分空間と同相で, 頂点の逆像のみ特異点を含んでいて(他の点の逆像は含んでおらず), 像が閉区間で, 特異値が丁度 1 個でその像の内部にあるような Morse 関数を得る.

極値を与える頂点のまわりについて説明する. まず頂点 v の次数が 2 以上の時から説明する. まず頂点を含むような辺全体の集合を空でない 2 つの集合に分割する(空でない 2 つの集合ならば何でも良い). それぞれ値が特異値以下になるような部分, 特異値以上になるような部分となるようにまず局所的に, Reeb 空間が 1 個の頂点とそれを含む辺全体の和集合として表される元のグラフの部分空間と同相で, 頂点の逆像のみ特異点を含んでいて他の点の逆像は特異点を含んでいないような関数を得る. v が極値を与えない時のように, Morse 関数を構成できる. 丁度 1 個ある特異値のところで最大または最小となるように, 像を閉区間とみなしその上の二次関数を使って平面に埋め込み, 最後に垂直方向への射影を合成する. 頂点 v の次数が 1 の時についても簡単に触れる. 頂点を含む辺での l の値が 0 のときは単位球体 D^3 の高さを考えて得られる Morse 関数, D^3 上の $x \mapsto \pm||x||^2 + g(v)$ の形で定義される関数を考えれば良い. l の値が正の整数であるときは少し説明が必要である.

さて, Main Theorem 1 に関連し, [23] で以下が得られている.

Theorem 2 ([23]). *$m > 1$ を整数とする. $G := (V, E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする(V を頂点集合 E を辺集合とする). $g : G \to \mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e \in E$ 上で単射であるようなものとする. l を, E 上の, 以下を満たすような写像とする.*

- *l の値域は $m - 1$ 次元の滑らかな連結閉多様体の微分同相型全体からなる集合である.*
- *各頂点 $v \in V$ について, L_v をそこでの g の値が $g(v)$ 以下であるような v を含む辺全体の集合, U_v をそこでの g の値が $g(v)$ 以上であるような v を含む辺全体の集合とする. L_v の各辺 e について $l(e)$ に属するような滑らかな多様体をとりそれらの非交和 $F_{L,v}$ をとり, U_v で同様に多様体 $F_{U,v}$ をとる. このときこれらの非交和 $F_{L,v} \sqcup F_{U,v}$ を境界とするような m 次元の滑らかで連結なコンパクト多様体がある.*

このとき, ある m 次元連結閉多様体 M とその上の滑らかな関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. *Reeb グラフ W_f が定まり W_f と G は同型(以降適切な同一視を定めて考える).*
2. *a を辺 e の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は $l(e)$ に属する多様体と微分同相.*
3. *p が特異点のとき $q_f(p) \in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f = G$ の頂点で, $g(q_f(p)) = f(p)$.*

Remark **2.** Theorem 2 について, 詳細は省略するが, $m - 1$ 次元の滑らかな連結閉多様体の微分同相型, それらの非交和を境界とするような滑らかで連結なコンパクト多様体について, 向きを込め考えた場合, M として向きが入ったものを得ることができる.

この結果は, 次元や逆像に出てくる多様体についてかなり一般的な状況を扱っている. 一方, 特異点がいかなる型のものか等については触れられていない. 滑らかであるが実解析的でない関数を用いてとにかく関数を構成するという形で結果が得られる. 次に, 今回扱っている研究とは独立に既に知られていた結果を紹介する.

Theorem 3 ([22])**.** 3 次元向き付け可能連結閉多様体 M が, Morse 関数で Main Theorem 1 において l の値が 0 か 1 である場合のものを有するとき, M は 3 次元単位球面 S^3, $S^2 \times S^1$ やレンズ空間またはそれの連結和として表される多様体と微分同相となる. 逆にそのような多様体 M には, 今説明した条件を満たすような Morse 関数がある.

最近以下も得られた.

Main Theorem 2 ([11])**.** $G := (V, E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする(V を頂点集合 E を辺集合とする). $g : G \to \mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e \in E$ 上で単射であるようなものとする. l を, E 上の, 以下を満たすような写像とする.

- l の値域は 3 次元の滑らかで向き付け可能な連結閉多様体の微分同相型全体からなる集合である.
- $v \in V$ を $g(v)$ が極値となるような頂点とする. このとき v の次数は 1 で, $e \ni v$ である辺 $e \in E$ について $l(e)$ は S^3 の微分同相型.

このとき, 4 次元の連結な向き付け可能閉多様体 M とその上の Morse 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. Reeb グラフ W_f が定まり W_f と G は同型(以降適切な同一視を定めて考える).
2. a を辺 e の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は $l(e)$ に属するような多様体と微分同相.
3. p が特異点のとき $q_f(p) \in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f = G$ の頂点で, $g(q_f(p)) = f(p)$.

証明には, 先述の Morse 関数の特異点とハンドルに関する理論, そして 3 次元多様体に固有の有名な理論, いわゆる Dehn surgery に関する有名事実を用いる. もう少し詳しく述べると, この定理は, より一般的な定理の系として得られた. 最近以下も分かった.

Main Theorem 3 ([12])**.** $G := (V, E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする(V を頂点集合 E を辺集合とする). $g : G \to \mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e \in E$ 上で単射であるようなものとする. l を, E 上の, 以下を満たすような写像とする.

- l の値域は 2 次元の連結閉曲面の微分同相型全体からなる集合である.
- 各頂点 v について $e \ni v$ をみたすような辺 $e \in E$ について $l(e)$ に属する曲面の Euler 数が一意に定まるが, すべての $e \ni v$ についてその Euler 数を足すと偶数である.

このとき, 3 次元の連結な閉多様体 M とその上の滑らかな関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. Reeb グラフ W_f が定まり W_f と G は同型(以降適切な同一視を定めて考える).
2. a を辺 e の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は $l(e)$ に属するような曲面と微分同相.
3. p が特異点のとき $q_f(p) \in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f = G$ の頂点で, $g(q_f(p)) = f(p)$.
4. 有限個の特異点を除き, 各特異点の周りでは, f はMose-Bott 関数として表せる.

3. 補足.

今後の問題を挙げておく.

Problem **3.** Theorem 3 のような, 特定の多様体の族を特徴づけるような結果は得られるか.

Theorem 3 の [22] は, 正則値の逆像の連結成分が常に位相的には球面であるものの単位球面と微分同相とは限らないような Morse 関数と, その定義域の多様体に関する論文でもある(というよりそのような関数の話がメインである). この状況ではある程度完全な結果は得られているといえる. 他の状況については, 例えば現時点では, Main Theorem 1, Main Theorem 2 の状況で Morse 関数のみ考えて, さらに, 向き付け可能な正則値の逆像の連結成分を球面かトーラスに制限し, 向き付け不可能な正則値の逆像の連結成分を種数が 1 か 2 であるようなもの, つまり実射影曲面か Klein bottle に制限する等をしないと難しいと思われる. 閉曲面は種数が上がるといろいろ複雑になる. 一般の閉多様体が出てくると遥かに難しい.

最後に, 現時点で案の段階で公表はできないという程度の進捗である, 以下を挙げる.

Problem **4.** グラフを与え, 値域が $\mathbb{R}$ で Reeb グラフがそれと同型であるような, 性質の良い滑らかな写像の構成を考えてきた. では, 次元 $n \geq 1$ の多面体(CW 複体)を与え, 値域を $\mathbb{R}^n$ として, 同様の問題を考え解けるか?

その他, 詳細は省略するが, [7] では, 境界のない多様体上の, 逆像がコンパクトとは限らないような適切な滑らかな関数のクラスを考え, 本稿で扱ってきたような問題を考えて解答を得ている.

4. 謝辞.

本内容は 2021 年度科学研究費補助金基盤研究 (S)「研究代表者：佐伯 修(課題番号：17H06128)」の補助を受けたものである. 佐伯氏にはホスト研究者として本稿に関連した研究で大いにお世話になった. 感謝申し上げたい,

本内容に関連し, 共同研究のプロジェクト"九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 2020 年度若手研究-短期共同研究"「代表者：北澤 直樹(課題番号：20200027)」(https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/research-reports/year-2021/) の援助も受けている. 関連性の高いプロジェクトとして, 共同研究のプロジェクト"九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 2021 年度一般研究-研究集会 II"「代表者：櫻井 大督(九州大学情報基盤研究開発センター附属汎オミクス計測・計算科学センター)(課題番号：20210013)」(https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/post-2051/)でも議論等をさせて頂いた. いずれも, Reeb グラフが応用でも可視化等において重要なツールである現在, 値域の多様体の方が次元の低いような良い可微分写像やそこから定まる Reeb グラフや Reeb 空間, 逆像に関する微分トポロジー的な理論を応用して

いこうという挑戦に関わる. これらのプロジェクトの関係者の日々の支えに感謝申し上げたい.

なお, 本内容は, 国際共同利用・共同利用拠点京都大学数理解析研究所共同研究(公開型)の研究集会「可微分写像の特異点論及びその応用」(http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/saji/math/conf2021/index.html)における同じ題目の著者自身の講演の内容をもとにしている. 「山本 卓宏　氏(東京学芸大学)」は講演時に Main Theorem 1 と 2 における多様体の向き付け可能性という重要な事実について質問をして下さり, そして数日後所属機関に滞在された際追加で議論もして下さった. 感謝申し上げたい. 構成される写像の定義域多様体の性質という基本的な重要な事項について質問をして下さった「四ツ谷 直仁　氏(香川大学)」にも感謝申し上げたい. 講演を聴講して下さった皆さん, 講演の機会を下さった世話人で座長を務めて下さった「佐治 健太郎　氏(神戸大学)」同じく世話人で講演後に議論等して下さった「加世堂 公希　氏(秋田工業高等専門学校)」にも感謝申し上げたい.

最後に, 本稿に誤った記述や分かりにくい図や記述があれば, それは全て著者の至らなさによるものである. 誤りのご指摘やコメント等あれば是非ともして下されば幸いである.

References

[1] R. Bott, *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math. 60 (1954), 248–261.

[2] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).

[3] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.

[4] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology (2014).

[5] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathematical Journal Vol.43, No.3 (2014), 327–359.

[6] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values*, accepted for publication in Topol. Methods in Nonlinear Anal. after refereeing process, arxiv:1902.08841.

[7] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from closed or open manifolds*, a positive report for publication has been announced to be sent and this version will be published in Methods of Functional Analysis and Topology, arxiv:1908.04340.

[8] N. Kitazawa, *Special generic maps and fold maps and information on triple Massey products of higher dimensional differentiable manifolds*, submitted to a refereed journal, arxiv:2006.08960.

[9] N. Kitazawa, *Closed manifolds admitting no special generic maps whose codimensions are negative and their cohomology rings*, submitted to a refereed journal, arxiv:2008.04226v4.

[10] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed manifolds which may not be orientable*, a revised version is submitted to a refereed journal based on a positive comment by referees (major revision) after a submission to a refereed journal, arxiv:2108.01300.

[11] N. Kitazawa, *Realization problems of graphs as Reeb graphs of Morse functions with prescribed preimages*, submitted to a refereed journal, arXiv:2108.06913.

[12] N. Kitazawa, *Smooth functions with simple structures on 3-dimensional closed manifolds with prescribed Reeb graphs and preimages of regular values*, submitted to a refereed journal, arxiv:2109.00221.

[13] 北澤直樹, 可微分関数の Reeb グラフとグラフの具体的な可微分関数の Reeb グラフとしての実現, 第 18 回数学総合若手研究集会テクニカルレポートとして提出, 北海道大学数学講究録　182 (2022), 789–798.

[14] M. Kobayashi and O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2607–2636.

[15] Y. Masumoto and O. Saeki, *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*, Kyushu J. Math. 65 (2011), 75–84.; doi: 10.2206/kyushujm.65.75.

[16] 松本 幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店, 2005.

[17] L. P. Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*. Topol. Methods in Nonlinear Anal. 52 (2) (2018), 749–762, arxiv:1805.06727.; doi: 10.12775/TMNA.2018.029.

[18] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press,1963.

[19] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1965.

[20] G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´une fonction numérique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de I´Académie des Sciences 222 (1946), 847–849.

[21] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.

[22] O. Saeki, *Morse functions with sphere fibers*, Hiroshima Math. J. Volume 36, Number 1 (2006), 141–170.

[23] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, International Mathematics Research Notices, maa301, https://doi.org/10.1093/imrn/maa301, arxiv:2006.01689.

[24] O. Saeki and K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers*, J. Math. Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.; doi: 10.2969/jmsj1158241939.

[25] V. Sharko, *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*, Methods of Functional Analysis and Topology 12 (2006), 389–396.

[26] M. Shiota, *Thom's conjecture on triangulations of maps*, Topology 39 (2000), 383–399. ; doi: 10.1016/S0040-9383(99)00022-1.