アファイン座標系における em-波面の標準形について

北海道大学大学院情報科学院　中島　直道
Naomichi Nakajima
Graduate School of Information Science and Technology Hokkaido University

1　はじめに

本稿は，著者によるプレプリント [12] の概説である．著者らは情報幾何学における甘利，長岡による双対平坦多様体の概念 [1, 2]（これはアファイン微分幾何学におけるヘッセ多様体と同一の概念である [16]）を計量が退化する場合に一般化するべく概ヘッセ多様体の理論を建設した [13]．概ヘッセ多様体とは，局所的には標準接触多様体内のルジャンドル部分多様体であり，概ヘッセ計量と呼ばれる（退化し得る）対称 $(0, 2)$ テンソルと 二種類の（多価）ポテンシャル関数を備えるものである．これらポテンシャルのグラフをそれぞれ e-波面，m-波面と呼び，e/m-波面にはそれぞれ平坦アファイン接続を持つ互いにある種の双対性を満たす連接接束が付随する．

本稿では，それらの平坦アファイン接続と計量を用いた座標系に依らない判定法を与えることで e/m-波面の特異点の C^∞ 型を捉え，さらに，アファイン座標系における e/m-波面の標準形を与える．また，得られた判定法の条件式と概ヘッセ多様体上の 3 次，4 次テンソルおよび正準ダイバージェンスとの関連について調べる．これにより，特異点の判定法と統計多様体の幾何学との関連性が示唆される．なお，本稿における議論の詳細や証明については [12] を参照されたい．

本研究は二つの研究に動機を持つ．一つ目は佐治・梅原・山田による特異波面のリーマン幾何学の研究である．彼らはカスプ辺型やツバメの尾型特異点に対する使い勝手の良い判定法を与え，曲率に関する概念を導入することでこれら特異点のリーマン幾何学的性質を探っている [9, 14, 15]．本研究はいわばそのアファイン微分幾何学版の構築を目指したものであり，アファイン座標系における標準形の導出により特異点周りでのアファイン微分幾何的解析（および情報幾何的解析）が可能になる．二つ目は非凸最適化と変分法の文脈で 1970 年代に行われたエクランによる変曲点における波面の標準形の導出に関する研究である [5]．実際，本稿で述べる一つ目の標準形（定理 3.2）はカスプ辺型の特異点の記述を表しており，これはエクランによる結果 [5] の一般化かつ精密化を行ったものである．二つ目の標準形（定理 3.4）は，概ヘッセ計量が半正定値である場合に現れる特異点の記述を表している（e.g., フィッシャー・ラオ計量は半正定値である）．

本稿を通して，写像や多様体は全て滑らかなものを考え，太字は列ベクトルを表すものとする，e.g., $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$.

本研究は，アンビシャス博士人材フェローシップ制度 (情報・AI) の支援を受けたものである．

2　接触幾何学と概ヘッセ多様体の理論

次節で結果を述べるために接触幾何学と概ヘッセ多様体の理論の簡潔なまとめを行う．詳細は [13] を参照されたい．

N を $2n+1$ 次元多様体，ξ をその上の超平面場とする．(N, ξ) が接触多様体であるとは，超平面場 ξ が局所的に $\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$ なる 1 次微分形式 θ の核で表されるときをいう．このとき，θ を（局所）接触形式という．$2n+1$ 次元接触多様体 (N, ξ) に対して，n 次元部分多様体 $L \subset N$ がルジャンドル部分多様体であるとは，各点 $p \in N$ において $T_pL \subset \xi_p$ なるときをいう．

$\mathbb{R}^{2n+1}(=T^*\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$ に対して，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},z)$ でその標準的な座標系を表すものとする．ここで，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{p}$ はそれぞれ $T^*\mathbb{R}^n$ の底空間とファイバーの座標系を表し，これら二つの空間を $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$ と $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}}$ と書き，区別することにする．$\mathbb{R}^{2n+1}$ 上の 1 次微分形式 θ を

$$\theta := z - \boldsymbol{p}^T d\boldsymbol{x} = z - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i$$

で定める．このとき，$(\mathbb{R}^{2n+1},\theta)$ は接触多様体であり，この接触多様体を標準接触多様体と呼ぶ．

標準接触多様体 $(\mathbb{R}^{2n+1},\theta)$ に対して，ファイバー束

$$\pi:\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}_z,\ \ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},z)\mapsto(\boldsymbol{x},z)$$

はルジャンドルファイブレーション（各ファイバーがルジャンドル部分多様体である）を与える．変換 $\mathcal{L}:\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R}^{2n+1}$,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},z)=(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{p}',z')=(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{p}-z)$$

を考えると，これは微分同相写像であり接触超平面場を保つ．ファイバー方向への射影

$$\pi':=\pi\circ\mathcal{L}:\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}}\times\mathbb{R}_{z'},\ \ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},z)\mapsto(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{p}-z)$$

もまたルジャンドルファイブレーションとなる．このとき，二つのルジャンドルファイブレーションからなる次の図式を標準接触多様体 $(\mathbb{R}^{2n+1},\theta)$ に対するダブルファイブレーション構造と呼ぶ．

$$\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}\xleftarrow{\ \pi\ }\mathbb{R}^{2n+1}\xrightarrow{\ \pi'\ }\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}}\times\mathbb{R}$$

$L\subset\mathbb{R}^{2n+1}$ をルジャンドル部分多様体とする．L に対し，ルジャンドル写像

$$\pi^e:=\pi\circ\iota:L\to\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}_z,\quad \pi^m:=\pi'\circ\iota:L\to\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}}\times\mathbb{R}_{z'}$$

をそれぞれ e/m-ルジャンドル写像という．ここで，$\iota:L\to\mathbb{R}^{2n+1}$ は包含写像である．

定義 2.1（[13]）　e/m-ルジャンドル写像 π^e と π^m に対して，

$$W_e(L):=\pi^e(L)\subset\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}_z,\quad W_m(L):=\pi^m(L)\subset\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}}\times\mathbb{R}_{z'}$$

をそれぞれ L に付随する e/m-波面と呼ぶ．

L 上のベクトル束 $E\,(=E_L)$ を

$$E:=\{\ (p,w)\in L\times(\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}_z)\ \mid\ dz_p(w)-\boldsymbol{p}(p)^T d\boldsymbol{x}_p(w)=0\ \}$$

で定める．L はルジャンドル部分多様体であることから，$d\pi^e(T_pL)\subset E_p$ が各点 $p\in L$ において成り立つ．ここで E_p は p におけるファイバーである．このことから，束写像

$$\Phi:TL\to E,\quad v_p\mapsto d\pi^e_p(v_p)$$

が意味を持つことに注意する．

$\widetilde{\nabla}$ を $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}_z$ 上の平坦アファイン接続とし，$\psi_p:\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}\times\mathbb{R}_z\to E_p$ を z-軸に沿った線形射影とする．このとき，

$$\nabla^E_X\eta(p):=\psi_p\circ\widetilde{\nabla}_X\eta(p)$$

により E 上のアファイン接続 ∇^E を定義する．ここで，X は L 上のベクトル場であり η は E の切断である．

命題 2.2（[13]）　接続 ∇^E は平坦であり，任意の L 上のベクトル場 X,Y に対し

$$\nabla^E_X(\Phi(Y))-\nabla^E_Y(\Phi(X))=\Phi([X,Y])$$

が成り立つ．

(E, Φ, ∇^E) を e-波面 $W_e(L)$ に付随する連接接束と呼ぶ（cf. [14, 15]）．同様にして，m-波面 $W_m(L)$ に対しても連接接束 $(E', \Phi', \nabla^{E'})$ を定める．

これらベクトル束 E, E' は L 上で定義されたものであるが，$\mathbb{R}^{2n+1}$ 上で定義され得るものである．超平面場 ξ は直和分解

$$\xi_p = \ker d\pi'_p \oplus \ker d\pi_p \simeq E_p \oplus E'_p \simeq \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}} \oplus \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}}$$

をもつことに注意する．ここで，ξ 上にシンプレクティック形式 ω と (n, n) 型の擬リーマン計量 τ が

$$\omega := \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i, \quad \tau := \sum_{i=1}^n dx_i dp_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (dx_i \otimes dp_i + dp_i \otimes dx_i)$$

により自然に定義される．

定義 2.3（[13]） L 上の概ヘッセ計量 h を τ の引き戻しにより定義する：

$$h(Y, Z) := \tau(\iota_* Y, \iota_* Z) \quad (Y, Z \in TL).$$

ここで，$\iota_* = \Phi \oplus \Phi' : TL \hookrightarrow \xi = E \oplus E'$ は包含写像である．

一般に，ルジャンドル部分多様体 $L \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ は局所的に母関数 $g(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{p}_J)$ を用いて

$$L = \{(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{x}_J, \boldsymbol{p}_I, \boldsymbol{p}_J, z) \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid \boldsymbol{p}_I = \tfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}_I}, \boldsymbol{x}_J = -\tfrac{\partial g}{\partial \boldsymbol{p}_J}, z = \boldsymbol{p}_J^T \boldsymbol{x}_J + g(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{p}_J)\}$$

のように表される [3, 7]．ここで，$I \sqcup J = \{1, \cdots, n\}$ は分割であり，$(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{p}_J)$ は L の局所座標系である．$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}_I}$ は列ベクトル $(\frac{\partial g}{\partial x_i})^T_{i \in I}$ を表すものとする．

命題 2.4（[13]） $g(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{p}_J)$ を L の母関数とする．このとき，

$$h = \sum_{i,k \in I} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k - \sum_{j,l \in J} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_l} dp_j dp_l.$$

$\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}} \times \mathbb{R}_z$ と $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}} \times \mathbb{R}_{z'}$ 上のアファイン変換

$$F(\boldsymbol{x}, z) = (A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, z + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d), \quad F^*(\boldsymbol{p}, z') = (A'\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}', z' + \boldsymbol{c}'^T\boldsymbol{p} + d')$$

はアファインルジャンドル同値 $\mathcal{L}_F : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$,

$$\mathcal{L}_F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, z) = (A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},\ A'\boldsymbol{p} + \boldsymbol{b}',\ z + \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d)$$

を定める．ここで，A は正則行列で，$A' = (A^T)^{-1}$, $\boldsymbol{b}' = A'\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{c}'$, $d' = \boldsymbol{b}'^T\boldsymbol{b} - d$ である．この変換 $\mathcal{L}_F$ はダブルファイブレーション構造と接触構造を保つ（従って ω と τ も保つ）．

二つのルジャンドル部分多様体 L_1, L_2 がアファインルジャンドル同値 $\mathcal{L}_F$ により同一視されているとする：$\mathcal{L}_F(L_1) = L_2$．このとき，$\mathcal{L}_F$ は概ヘッセ計量を保ち，連接接束間の同型 $E_{L_1} \simeq E_{L_2}$, $E'_{L_1} \simeq E'_{L_2}$ を自然に引き起こす．この同型はまた，連接接束上の平坦アファイン接続を自然に同一視する．

定義 2.5（[13]） 概ヘッセ多様体 $(M, \mathcal{U} = \{L_\alpha\})$ とは，ルジャンドル部分多様体 $L_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ をアファインルジャンドル同値により張り合わせてできたものである．このとき，各 L_α の構造から，M 上に退化し得る $(0, 2)$ 型テンソル h と連接接束 (E, Φ, ∇^E)，$(E', \Phi', \nabla^{E'})$ が well-defined に定まる．各 L_α を M の局所モデルと呼ぶ．

以上の構成により概ヘッセ多様体 M を含む接触多様体が自然に定義されることに注意する．

$(M, h, (E, \Phi, \nabla^E), (E', \Phi', \nabla^{E'}))$ を概ヘッセ多様体とする．M 上の任意のベクトル場 Y, Z に対して，

$$(\eta, \eta') := (\Phi \oplus \Phi')(Y),\ (\zeta, \zeta') := (\Phi \oplus \Phi')(Z),\ \tau(\eta, \zeta') := \tau(\eta \oplus 0, 0 \oplus \zeta')$$

とおく．

定義 2.6（[13]） 概ヘッセ多様体 M に対して，標準 3 次テンソル C を次で定義する：

$$C(X,Y,Z) := \tau(\eta, \nabla^{E'}_X \zeta') + \tau(\zeta, \nabla^{E'}_X \eta') - \tau(\nabla^{E}_X \eta, \zeta') - \tau(\nabla^{E}_X \zeta, \eta').$$

ここで，X, Y, Z は M 上のベクトル場である．

命題 2.7（[13]） 標準 3 次テンソル C は局所的に母関数 $g(\boldsymbol{x}_I, \boldsymbol{p}_J)$ の 3 次導関数である：任意の k, l, m に対し

$$C(\partial_k, \partial_l, \partial_m) = \partial_k \partial_l \partial_m g.$$

ここで，$\partial_k := \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k \in I)$ または $\partial_k := \frac{\partial}{\partial p_k}$ $(k \in J)$ である．従って，C は対称である．

3　em-波面の標準形

本節では e/m-波面の特異点を概ヘッセ多様体の幾何学を用いて特徴づける．特に，アファイン座標系における e/m-波面の標準形を与える．

標準形の導出において，次のマルグランジュの割り算定理が主要な道具である．

定理 3.1（マルグランジュの割り算定理, e.g., [3]） $f(t, \boldsymbol{x})$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ における原点周りで定義された実関数とする（$t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$）．次数 d の多項式を $P(t) := \sum_{i=0}^{d} \lambda_i t^i$ $(\lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_d \neq 0)$ とする．このとき，原点周りの実関数 $Q(t, \boldsymbol{x})$ と $r_i(\boldsymbol{x})$ $(0 \leq i \leq d-1)$ が存在して，

$$f(t, \boldsymbol{x}) = Q(t, \boldsymbol{x}) P(t) + \sum_{i=0}^{d-1} r_i(\boldsymbol{x}) t^i.$$

行う議論は局所的であるため，局所モデル $L \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ をとり，L に対して h を概ヘッセ計量，(E, Φ, ∇^E) と $(E', \Phi', \nabla^{E'})$ をそれぞれ連接接束とする．また，$\bar{p} = (\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{p}}, \bar{z}) \in L$ をとり，$\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{p}} = (\bar{p}_1, \cdots, \bar{p}_n) \in \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}}$ とする．以下では $\bar{p}$ 周りにおける L に付随した m-波面についての結果を述べるが，$(\Phi', \nabla^{E'})$ と (Φ, ∇^E) を入れ替えて議論することで e-波面についても同様の結果が成り立つことに注意する．

定理 3.2（[12]） $\operatorname{rank} \Phi'(\bar{p}) = n-1$ とする．また，$\bar{p}$ において $\ker \Phi'(\bar{p})$ を張る L 上のベクトル場 $X \neq 0$ に対し，

$$\tau(\Phi(X)(\bar{p}), (\nabla^{E'}_{X(\bar{p})} \Phi'(X))(\bar{p})) \neq 0 \tag{1}$$

が成り立つとする．このとき，$\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}}$ のアファイン座標系 $\boldsymbol{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ とその双対である $\mathbb{R}^n_{\boldsymbol{x}}$ の $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ を取り直すことにより，以下が成り立つ：ある近傍 $\bar{p} \in V \subset L$, $0 \in \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}$, $(\bar{p}_2, \cdots, \bar{p}_n) \in \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ と関数

$$\varphi \in C^\infty(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2), \quad k_1, k_2 \in C^\infty(\mathcal{U}_2)$$

が存在して m-波面 $\pi^m(V)$ が

$$\begin{aligned} &z' = z'_{\pm}(\boldsymbol{p}) = k_2(p_2, \cdots, p_n) + (p_1 - k_1)\varphi(\pm\sqrt{p_1 - k_1}, p_2, \cdots, p_n), \\ &p_1 \geq k_1(p_2, \cdots, p_n) \end{aligned}$$

で与えられる．このときさらに，φ の第一変数に関する偏導関数は非ゼロである．

注意 3.3 m-ラグランジュ写像 $\pi^m_1 : L \to \mathbb{R}^n_{\boldsymbol{p}}$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, z) \mapsto \boldsymbol{p}$ に対する特異点識別子 [15] を（L の局所座標系をとって）

$$\lambda(q) := \det [d\pi^m_1(q)] \quad (q \in L)$$

とすると，定理 3.2 における条件式 (1) の左辺は

$$\tau(\Phi(X)(\bar{p}), (\nabla^{E'}_{X(\bar{p})} \Phi'(X))(\bar{p})) = \frac{1}{2}(X\lambda)(\bar{p})$$

となることが確かめられる（[12]）．同様にして，

$$\tau(\Phi(X)(\bar{p}),(\nabla^{E'}_{X(\bar{p})}\nabla^{E'}_{X(\bar{p})}\Phi'(X))(\bar{p}))=\frac{1}{2}(XX\lambda)(\bar{p})$$

が成り立つ．泉屋・佐治による判定法 [8] から，m-ルジャンドル写像 π^m が $\bar{p}$ においてツバメの尾型特異点と微分同相であることは，次が成り立つことと同値であることが従う：$d\lambda(\bar{p})\neq 0$,

$$\tau(\Phi(X)(\bar{p}),(\nabla^{E'}_{X(\bar{p})}\Phi'(X))(\bar{p}))=0,$$
$$\tau(\Phi(X)(\bar{p}),(\nabla^{E'}_{X(\bar{p})}\nabla^{E'}_{X(\bar{p})}\Phi'(X))(\bar{p}))\neq 0.$$

この場合，アファイン座標系における m-波面（多価ポテンシャル）の標準形を書き下すことは原理的には可能である一方でそれは複雑なものである．

情報幾何学的応用を考える上では，概ヘッセ計量が半正定値であると仮定することは自然である（フィッシャー・ラオ計量は半正定値である）．h は半正定値で，$\operatorname{rank}\Phi'(\bar{p})=n-1$ であると仮定する．このとき特異点識別子 λ の微分は特異点集合 $\{\lambda=0\}$ 上でゼロになるため，$\lambda=0$ に陰関数定理を適用できない．このため最も単純な場合として，特異点集合が L において余次元 1 の部分多様体である場合を考える．次の定理はこの場合における標準形を記述しており，これはまたヴァシリエフによる関数の極小点の分類の文脈としての特徴づけでもある [17].

定理 3.4（[12]）　$\operatorname{rank}\Phi'(\bar{p})=n-1$ とする．また，$\bar{p}$ 周りの任意の点 q において $\ker\Phi'(q)$ を張る L 上のベクトル場 $X\neq 0$ に対し，

$$\tau(\Phi(X)(q),(\nabla^{E'}_{X(q)}\Phi'(X))(q))=0, \tag{2}$$
$$\tau(\Phi(X)(\bar{p}),(\nabla^{E'}_{X(\bar{p})}\nabla^{E'}_{X(\bar{p})}\Phi'(X))(\bar{p}))\neq 0 \tag{3}$$

が成り立つとする．さらに，$\bar{p}$ の周辺で特異点集合 $S(\pi^m)$ は L における余次元 1 の部分多様体であると仮定する．このとき，アファイン座標系 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{x}$ を取り直すことにより，以下が成り立つ：ある近傍 $\bar{p}\in V\subset L$，$0\in\mathcal{U}_1\subset\mathbb{R}$, $(\bar{p}_2,\cdots,\bar{p}_n)\in\mathcal{U}_2\subset\mathbb{R}^{n-1}$ と関数

$$\varphi\in C^\infty(\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2),\quad k_1,k_2\in C^\infty(\mathcal{U}_2)$$

が存在して m-波面 $\pi^m(V)$ が

$$z'=z'(\boldsymbol{p})=k_2(p_2,\cdots,p_n)+(p_1-k_1)\varphi((p_1-k_1)^{1/3},p_2,\cdots,p_n)$$

で与えられる．このときさらに，φ の第一変数に関する偏導関数は非ゼロである．

4　判定法の内在的表現とコントラスト関数

2 節で見たように，概ヘッセ多様体 M 上には概ヘッセ計量 h と標準 3 次テンソル C が定まり，これらはそれぞれ，局所的には母関数の 2 次および 3 次導関数である．本節では，これらのような概ヘッセ多様体上のテンソルと定理 3.2，3.4 の関連について述べる．

定理 3.2 の条件式 (1) における量 $\tau(\Phi(X),\nabla^{E'}_X\Phi'(X))$ は h と C を用いて次のように書き換えることができる．

命題 4.1（[12]）　M 上の任意ベクトル場 X に対して，

$$\tau(\Phi(X),\nabla^{E'}_X\Phi'(X))=\frac{1}{4}\left(C(X,X,X)+Xh(X,X)\right).$$

上記の命題のように，定理 3.4 の条件式 (3) における量 $\tau(\Phi(X),\nabla^{E'}_X\nabla^{E'}_X\Phi'(X))$ を h と C を用いて表すことが考えられるが，これは不可能である．しかしながら，h や C と同様に局所的には母関数の 4 次導関数である M 上の

4 階テンソルが存在し得て，これらを用いた表示をすることが考えられる．この問題について統計多様体の幾何学の観点から考える．

統計多様体とは，擬リーマン計量 h と対称な $(0,3)$ テンソル C を備える多様体 N のことをいい，双対平坦多様体はこの特別な場合である．

江口はコントラスト関数と呼ばれる非対称な関数 $\rho : N \times N \to \mathbb{R}$ によって特徴づけられる統計多様体の幾何学を徹底的に調べている [6]．N 上のベクトル場 $X_1, \cdots, X_k, Y_1, \cdots, Y_l$ に対して関数

$$\rho[X_1 \cdots X_k | Y_1 \cdots Y_l] : N \to \mathbb{R}$$

を

$$\rho[X_1 \cdots X_k | Y_1 \cdots Y_l](r) = (X_1)_p \cdots (X_k)_p (Y_1)_q \cdots (Y_l)_q (\rho(p,q))|_{p=q=r} \tag{4}$$

で定義する．関数 $\rho : N \times N \to \mathbb{R}$ がコントラスト関数であるとは，任意の $r \in N$ と N 上のベクトル場 X, Y に対して次を満たすときをいう：

(i) $\rho[-|-](r) = \rho(r,r) = 0$,

(ii) $\rho[X|-](r) = \rho[-|X](r) = 0$,

(iii) $-\rho[X|Y]$ は N 上の擬リーマン計量である．

コントラスト関数は統計多様体を自然に誘導する，すなわち，多様体上にコントラスト関数が与えられたとき，コントラスト関数は計量 h や対称 $(0,3)$ テンソル C を自然に定める [6]．逆に，与えられた計量 h と $(0,3)$ テンソル C を復元するようなコントラスト関数を構成できることが知られている [10].

双対平坦多様体と概ヘッセ多様体の場合には標準的なコントラスト関数が定まり，これらをそれぞれブレグマンダイバージェンスと正準ダイバージェンスという．厳密に言えば，正準ダイバージェンスはコントラスト関数の条件式の内で (i) と (ii) のみを満たし，このような場合には弱コントラスト関数と呼ばれる [13]．概ヘッセ計量がいたるところで非退化な場合，正準ダイバージェンスはブレグマンダイバージェンスと一致する．

ルジャンドル部分多様体 $L \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ に対して，正準ダイバージェンス $D : L \times L \to \mathbb{R}$ は

$$D(p,q) = z(p) + z'(q) - \boldsymbol{x}(p)^T \boldsymbol{p}(q)$$

で定義される．D はアファインルジャンドル同値の下で不変なため，概ヘッセ多様体 M 上で定義される [13]．M 上の正準ダイバージェンスを D_M と書くことにする．

正準ダイバージェンス D_M は概ヘッセ計量 h と標準 3 次テンソル C を復元する [13]：

$$h(X,Y) = -D_M[X|Y], \ \ C(X,Y,Z) = -D_M[Z|XY] + D_M[XY|Z].$$

このようにして，式 (4) の形式で定義される関数の和を考える意味で，h と C はコントラスト関数の組合せで表現されることがわかる．

[4] では，上記のようなコントラスト関数から構成されるテンソルについての研究が行われており，コントラスト関数の組合せで構成される 4 階テンソルは二つのみであることが報告されている．双対平坦多様体上のブレグマンダイバージェンスではこれら二つのテンソルは消えてしまい，これは非自明な 4 階テンソルが構成されないことを意味している．この結果に従えば，双対平坦多様体（および概ヘッセ多様体）上で局所的に母関数の 4 次導関数を持つテンソルは構成できないことがわかる．

テンソルの代わりに正準ダイバージェンスによる表現を考えると，以下が得られる．

定理 4.2（[12]） X, Y, Z, W を M 上のベクトル場とする．このとき，次が成り立つ：

$$\tau(\Phi(Z), \nabla^{E'}_Y \Phi'(W)) = -\frac{1}{2} D_M[Z|YW], \tag{5}$$

$$\tau(\Phi(Z), \nabla^{E'}_X \nabla^{E'}_Y \Phi'(W)) = -\frac{1}{2} D_M[Z|XYW]. \tag{6}$$

系 4.3（[12]） M 上の任意のベクトル場 X に対して，次が成り立つ：

$$\tau(\Phi(X), \nabla_X^{E'}\Phi'(X)) = -\frac{1}{2}D_M[X|XX], \tag{7}$$

$$\tau(\Phi(X), \nabla_X^{E'}\nabla_X^{E'}\Phi'(X)) = -\frac{1}{2}D_M[X|XXX]. \tag{8}$$

注意 4.4 [6] において，江口はコントラスト関数の 4 階微分と 4 次テンソルの関係を調べており，特に B^* なる 4 次テンソル（[11] ではバートレットテンソルと呼ばれている）を導入している．定理 4.2 の等式 (6) が成り立つことと，$B^* = 0$（M が双対平坦多様体である場合に意味を持つ）が同値であることが知られており，この意味で，系 4.3 の式 (8) は江口による統計多様体の 4 次テンソルに基く幾何を反映したものになっている．

参考文献

[1] S. Amari and H. Nagaoka, *Methods of information geometry*, A.M.S., Oxford Univ. Press (2000).

[2] S. Amari, *Information Geometry and Its Application*, Applied Math. Sci., 194, Springer (2016).

[3] V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade and A.N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps I*, Monographs in Math. **82**, Birkhäuser (1986).

[4] F. M. Ciaglia, G. Marmo and J. M. Prez-Pardo, *Generalized potential functions in differential geometry and information geometry*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., **16** (2019), 1940002.

[5] I. Ekeland, *Legendre duality in nonconvex optimization and calculus of variations*, SIAM J. Control Optim., **15** (1977), 905–934.

[6] S. Eguchi, *Geometry of minimum contrast*, Hiroshima Math. J., **22** (1992), 631–647 .

[7] 泉屋周一，石川剛郎，応用特異点論，共立出版 (1998).

[8] S. Izumiya and K. Saji, *The mandala of Legendrian dualities for pseudo-spheres in Lorentz-Minkowski space and "flat" spacelike surfaces*, J. Singul., **2** (2010), 92–127.

[9] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. Math., **221** (2005), 303–351.

[10] T. Matsumoto, Any statistical manifold has a contrast function – On the C^3-functions taking the minimum at the diagonal of the product manifold, Hiroshima Math. J. **23** (1993), 327–332.

[11] H. Matsuzoe, *Geometry of contrast functions and conformal geometry*, Hiroshima Math. J., **29** (1999), 175–191.

[12] N. Nakajima, *Local normal forms of em-wavefronts in affine flat coordinates*, preprint, arXiv:2204.13288 (2022)

[13] N. Nakajima and T. Ohmoto, *The dually flat structure for singular models*, Inf. Geom., **4** (2021), 31–64.

[14] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math., **169** (2009), 491–529.

[15] 佐治健太郎，梅原雅顕，山田光太郎，特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学，丸善出版 (2017).

[16] 志磨裕彦，ヘッセ幾何学，裳華房 (2001).

[17] V.A. Vasil'ev, *Asymptotic exponential integrals, Newton's diagram, and the classification of minimal points*, Funct. Anal. Appl., **11** (1977), 163–172.