

ブレイド群の Schur 被覆の表示

東京理科大学 川崎 理佳子

Rikako Kawasaki

Tokyo University of Science

1 概要

Artin ブレイド群 B_n とは $(n-1)$ 個の生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ で生成される群であり, それらの間の関係式は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad (\forall i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad |i-j| \geq 2) \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2). \end{aligned}$$

$n \geq 4$ のとき, Huebschmann[3] は 1 つの元 $\sigma_1 \in B_n$ で生成される free B_n -crossed module $\pi: C_n \rightarrow B_n$ が中心拡大

$$0 \rightarrow H_2(B_n) \rightarrow C_n \xrightarrow{\pi} B_n \rightarrow 1$$

をみだし, かつ C_n が B_n の Schur 被覆であることを示した. Schur 被覆とは Issac Schur により有限群の射影表現の研究において見出された概念で, 群の 2 次のホモロジー群と密接に関連しており, 有限群 G の射影表現は G の Schur 被覆の線型表現に自然に対応する (論文 [1] を参照). 対称群の Schur 被覆は Schur 自身によって研究され有限表示も知られているが, ブレイド群 B_n の Schur 被覆 C_n の有限表示を明示的に書いた論文はない. そこで, 本稿では C_n の有限表示を群の拡大の表示の理論 ([5]) を用いて具体的に計算することを目標に, 基本的な定義から説明する.

また, 本研究は北海道大学秋田利之教授との共同研究に基づいている.

2 群の拡大

この章では群の拡大の定義について解説する.

定義 2.1 (完全系列). 群と準同型写像の列

$$G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} G_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} G_n$$

が, 各 $1 \leq i \leq n-2$ に対して

$$\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$$

を満たすとき, 完全系列 (exact sequence) という.

定義 2.2 (群の拡大). 完全系列

$$1 \rightarrow K \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 1$$

を短完全系列 (short exact sequence) もしくは, 群の拡大 (group extension) という. 群を明示するときは, G を N の K による拡大 (extension of N by K) という.

このとき、次の補題が成り立つ。

補題 2.3 (5項補題). 群と準同型写像からなる可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{f_1} & G_2 & \xrightarrow{f_2} & G_3 & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \\ 1 & \longrightarrow & H_1 & \xrightarrow{g_1} & H_2 & \xrightarrow{g_2} & H_3 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

において、各行は群の拡大であるとする。もし、 φ_1 と φ_3 が同型写像であれば、 φ_2 も同型写像である。

3 ブレイドとブレイド群

この章ではブレイド群について解説し、その簡単な性質をいくつか紹介する。

3.1 ブレイド群の定義と基本的性質

任意の正の整数 n に対し、ブレイド群 B_n の定義を代数的に与える。この定義は生成元と関係式による群の表示の形で形式化される。

定義 3.1. Artin ブレイド群 B_n (Artin braid group) とは $(n-1)$ 個の生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ で生成される群で、それらの間の関係式は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad |i-j| \geq 2) \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2). \end{aligned}$$

この定義から直ちにわかるように、 B_1 は自明な群である。また B_2 は一つの生成元 σ_1 で生成されており、関係式は空集合なので無限巡回群であり、 $n \geq 3$ のブレイド群 B_n は非可換群である。

ブレイド群 B_n から群 G への準同型写像 $f: B_n \rightarrow G$ に対し、 G の元 $\{s_i = f(\sigma_i)\}_{i=1, \dots, n-1}$ は関係式

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i \quad (\forall i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad |i-j| \geq 2) \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

を満たし、この逆も成り立つ。

3.2 対称群への射影

以下、 \mathfrak{S}_n を n 次対称群とする。補題??を $G = \mathfrak{S}_n$ に適用しよう。 $s_i = (i \ i+1) \in \mathfrak{S}_n$ ($1 \leq i \leq n-1$) を i と $i+1$ の互換とする。 $s_1, \dots, s_{n-1} \in \mathfrak{S}_n$ が関係式 (3.1) を満たす事を確かめるのは容易である。よって、補題??より任意の $i = 1, 2, \dots, n-1$ に対し $s_i = \pi(\sigma_i)$ となるような群準同型 $\pi: B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ が唯一存在する。 \mathfrak{S}_n は $s_1, \dots, s_{n-1} \in \mathfrak{S}_n$ で生成されるので、この準同型は全射である。

4 群の中心拡大と群の2次コホモロジー

G を群、 A をアーベル群とし

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1 \tag{4.1}$$

を G の A による中心拡大 (central extension) とする。また、 π の集合論的切断 $s: G \rightarrow E$ を一つ選ぶ。すなわち、 $\pi s = \text{id}_G$ となるような写像 $s: G \rightarrow E$ を考える。 s は正規化条件

$$s(1) = 1 \tag{4.2}$$

を満たすとしてよい. もし s が準同型写像ならば, 上の拡大は分裂し, s が準同型写像ではない度合いを測る写像 $f: G \times G \rightarrow A$ が存在する. 実際, 任意の $g, h \in G$ に対し, E の元 $s(gh)$ と $s(g)s(h)$ は π で共に G の元 gh に移る. よって, $s(gh)$ と $s(g)s(h)$ の差は $i(A)$ の元である. こうして, 以下の等式により $f(g, h) \in A$ を定義することができる.

$$s(g)s(h) = i(f(g, h))s(gh). \quad (4.3)$$

条件 (4.2) から f が以下の意味で正規化されていることが従う.

$$f(g, 1) = 0 = f(1, g) \quad (g \in G). \quad (4.4)$$

写像 f は中心拡大 (4.1) と s に同伴する因子団 (factor set) と呼ばれる. 次に, 中心拡大 (4.1) が A と因子団 f から完全に復元できることを示す. $s(G)$ は $E/\iota(A)$ の完全代表系より, 対応 $(a, g) \mapsto i(a)s(g)$ は全単射 $A \times G \rightarrow E$ を定める. $(a, g), (b, h) \in A \times G$ に対し,

$$\begin{aligned} i(a)s(g)i(b)s(h) &= i(a)i(b)s(g)s(h) \\ &= i(a+b)i(f(g, h))s(g, h) \\ &= i(a+b+f(g, h))s(gh) \end{aligned}$$

より, $A \times G$ 上の群演算は以下で与えられる.

$$(a, g)(b, h) = (a + b + f(g, h), bh). \quad (4.5)$$

集合 $A \times G$ に積を入れたものを E_f と表す. 演算 (4.5) は直積群 $A \times G$ の積を f でひねったものに見えることに注意する.

$\forall a \in A$ に対し, $i(a) = i(a)s(1)$ であるので, 合成 $A \xrightarrow{i} E \cong E_f$ は, 標準的な単射

$$a \mapsto (a, 1) \quad (4.6)$$

に一致し, 合成 $E_f \approx E \xrightarrow{\pi} G$ は標準的な全射

$$(a, g) \mapsto g \quad (4.7)$$

元の中心拡大は G, A, f と上の対応によって定義された中心拡大

$$0 \rightarrow A \rightarrow E_f \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (4.8)$$

と同一視できる.

また注意として, 条件 (4.4) を満たす任意の写像 $f: G \times G \rightarrow A$ に対し, 演算 (4.5) によって E_f は群になるとは限らない.

以下が成り立つとき, E_f は群になる.

$$f(g, h) + f(gh, k) = f(h, k) + f(g, hk). \quad (4.9)$$

以上の考察から, 次の一対一対応が成り立ち,

$$(\text{拡大 (4.1) と切断 } s \text{ の組}) \leftrightarrow ((4.4) \text{ と } (4.9) \text{ を満たす写像 } G \times G \rightarrow A).$$

恒等式 (4.9) は以下の形に書き換えられる.

$$f(h, k) - f(gh, k) + f(g, hk) - f(g, h) = 0. \quad (4.10)$$

式 (4.10) と (4.4) は, f が G の正規化された 2 コサイクルであることを意味している. よって一対一対応

$$(\text{拡大 (4.1) と切断 } s \text{ の組}) \leftrightarrow (\text{正規化された 2 コサイクル } G \times G \rightarrow A)$$

を得る. また, (4.1) の切断を変えると, 得られる 2 コサイクルは元の f に 2 コバウンダリを加えたものになる. 以上のことから, 次が成り立つ.

定理 4.1. A をアーベル群, $\mathcal{E}(G, A)$ を A による G の中心拡大の同値類の集合とする. このとき以下の同型が成り立つ.

$$\mathcal{E}(G, A) \cong H^2(G, A).$$

5 Schur 被覆

定理 5.1 (普遍係数定理). G を群, A をアーベル群とすると, 自然な完全系列

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(G), A) \rightarrow H^n(G, A) \rightarrow \text{Hom}(H_n(G), A) \rightarrow 0 \tag{5.1}$$

が存在する.

定義 5.2. G, E を群,

$$0 \rightarrow H_2(G) \rightarrow E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1$$

を中心拡大とし, この中心拡大に対応するコホモロジー類を $u \in H^2(G, H_2(G))$ とする. 普遍係数定理における準同型 $H^2(G, H_2(G)) \rightarrow \text{Hom}(H_2(G), H_2(G))$ が

$$H^2(G, H_2(G)) \ni u \mapsto \text{id}_{H_2(G)} \in \text{Hom}(H_2(G), H_2(G)) \tag{5.2}$$

を満たすとき, E を G の Schur 被覆 (Schur cover) という. Schur 被覆は同型を除いても唯一つとは限らない. G が完全群のとき E は G の普遍中心拡大 (universal central extension) と呼ばれる. 普遍中心拡大は同型を除いて唯一つに定まる.

5.1 対称群の Schur 被覆の表示

\mathfrak{S}_n を n 文字の対称群とする. $n \geq 4$ のとき

$$H_1(\mathfrak{S}_n) \cong H_2(\mathfrak{S}_n) \cong \mathbb{Z}/2$$

であることが知られている. よって \mathfrak{S}_n の Schur 被覆 E は中心拡大

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow E \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1 \tag{5.3}$$

の形をしている.

$$\text{Hom}(H_2(\mathfrak{S}_n), \mathbb{Z}/2) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2,$$

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_1(\mathfrak{S}_n), \mathbb{Z}/2) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$$

$$\rightarrow H^2(\mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

中心拡大は同型を除いて 4 つ

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}/2 & \rightarrow & H^2(\mathfrak{S}_n, H_2(\mathfrak{S}_n)) & \rightarrow & \text{Hom}(H_2(\mathfrak{S}_n), H_2(\mathfrak{S}_n)) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \mathbb{Z}/2 & \rightarrow & \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2 & \rightarrow & \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0 \end{array}$$

より, \mathfrak{S}_n の Schur 被覆は 2 つ

定理 5.3 (Schur ([1] を参照)). $s_i = (i \ i+1) \in \mathfrak{S}_n$ ($1 \leq i \leq n-1$) を互換とし, $\mathbb{Z}/2 = \{1, z\}$ とおく. 各 $\alpha, \beta \in \{1, z\}$ に対し次の条件を満たす 2 コサイクル $\tau_{[\alpha, \beta]}: \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}/2$ が存在する.

$$\tau_{[\alpha, \beta]}(s_i, s_i) = \alpha, \quad \tau_{[\alpha, \beta]}(s_k, s_l) = \begin{cases} 1 & (k < l) \\ \beta & (l < k). \end{cases}$$

$H^2(\mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}/2) = \{[\tau_{[\alpha, \beta]}] \mid \alpha, \beta \in \{1, z\}\}$ である. 2 コサイクル $\tau_{[\alpha, \beta]}$ で定まる中心拡大を

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\iota} E_{[\alpha, \beta]} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_n \rightarrow 1$$

とすると $E_{[\alpha, \beta]}$ は t_1, \dots, t_{n-1}, z を生成元,

$$\begin{aligned} t_i^2 &= \alpha, \quad z^2 = 1, \quad zt_i = t_iz, \quad t_jt_{j+1}t_j = t_{j+1}t_jt_{j+1}, \quad t_kt_l = \beta t_l t_k \\ (1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq n-2, \quad 1 \leq k < l-1 \leq n-2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

を基本関係式とする群であり, $\iota(z) = z, \pi(t_i) = s_i, \pi(z) = 1$ を満たす. $E_{[\alpha, \beta]}$ が \mathfrak{S}_n の Schur 被覆であるための必要十分条件は $\beta = z$ である.

5.2 ブレイド群の Schur 被覆

$n \geq 4$ に対し

$$H_1(B_n) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(B_n) \cong \mathbb{Z}/2$$

であることが知られている. よって B_n の Schur 被覆は中心拡大

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow E \rightarrow B_n \rightarrow 1 \quad (5.5)$$

の形をしている.

$$\begin{aligned} \text{Hom}(H_2(B_n), \mathbb{Z}/2) &\cong \text{Hom}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2, \\ \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_1(B_n), \mathbb{Z}/2) &\cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2) = 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow H^2(B_n, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2$

非自明な中心拡大は一つで, この中心拡大が B_n の Schur 被覆

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_1(\mathfrak{S}_n), \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & H^2(\mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}/2) & \longrightarrow & \text{Hom}(H_2(\mathfrak{S}_n), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^2(B_n, \mathbb{Z}/2) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}(H_2(B_n), \mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

より B_n の 4 つの 2 コサイクル $\mu_{[\alpha, \beta]} := \tau_{[\alpha, \beta]} \circ (\pi \times \pi): B_n \times B_n \rightarrow \mathbb{Z}/2$ について次が従う.

命題 5.4. B_n の 4 つの 2 コサイクル

$$\mu_{[\alpha, \beta]} := \tau_{[\alpha, \beta]} \circ (\pi \times \pi): B_n \times B_n \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

について以下が従う. 上記の正規化された 2 コサイクル $\mu_{[\alpha, \beta]}: B_n \times B_n \rightarrow \mathbb{Z}/2$ に対応する中心拡大を

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow C_{[\alpha, \beta]} \rightarrow B_n \rightarrow 1$$

とする. $\beta = z$ のとき $C_{[\alpha, \beta]}$ は B_n の Schur 被覆であり, $\beta = 1$ のとき上の中心拡大は自明である.

6 ブレイド群の Schur 被覆の表示

以上の準備の下, 実際にブレイド群の Schur 被覆の具体的表示を求める.

$\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ をブレイド群 B_n の生成元とし, $\mu_{[\alpha, \beta]}: B_n \times B_n \rightarrow \mathbb{Z}/2 = \{1, s\}$ ($\alpha, \beta \in \{1, s\}$) を 2 コサイクルとする. 定理 5.3 より $\mu_{[\alpha, \beta]}$ は次式を満たす.

$$\begin{cases} \mu_{[\alpha, \beta]}(\sigma_i, \sigma_i) = \alpha \\ \mu_{[\alpha, \beta]}(\sigma_k, \sigma_l) = 1 \quad (k < l) \\ \mu_{[\alpha, \beta]}(\sigma_l, \sigma_k) = \beta \quad (k < l). \end{cases}$$

$\mu_{[\alpha, \beta]}$ に対応する中心拡大を

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\iota} C_{[\alpha, \beta]} \xrightarrow{\pi} B_n \rightarrow 1$$

とする. $C_{[\alpha, \beta]}$ は集合として $\mathbb{Z}/2 \times B_n$ と同一視できる. この同一視の下で群演算は

$$(x, \sigma) \cdot (y, \tau) = (x \cdot y \cdot \mu_{[\alpha, \beta]}(\sigma, \tau), \sigma\tau)$$

と表せ, 準同型 ι, π は

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2 &\xrightarrow{\iota} C_{[\alpha, \beta]} & s &\mapsto (s, 1) \\ C_{[\alpha, \beta]} &\xrightarrow{\pi} B_n, & (x, \sigma) &\mapsto \sigma \end{aligned}$$

と表せる. さらに標準的な集合論的切断

$$B_n \rightarrow C_{[\alpha, \beta]}, \quad \sigma \mapsto (1, \sigma)$$

が存在する. $\mathbb{Z}/2$ と B_n の表示は

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2 &= \langle s \mid s^2 \rangle, \\ B_n &= \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j \sigma_i \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \quad (i = j - 1), \quad \sigma_i \sigma_j \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} \quad (i < j - 1) \rangle \end{aligned}$$

で与えられる. 簡単のため

$$\mathbb{Z}/2 = \langle Y \mid S \rangle, \quad B_n = \langle X \mid R \rangle$$

とおく. また, X に対応する B_n の生成系も X と表すことにする. この意味において $X \subset B_n$ である. 同様に $Y \subset \mathbb{Z}/2$ である.

群の拡大の表示の理論を用いて, $C_{[\alpha, \beta]}$ の表示を求める ([5] 参照).

$$X^* := \{\sigma_1^*, \dots, \sigma_{n-1}^*\}, \quad Y^* := \{s^*\}$$

および, 自由群 $F := F(X^* \cup Y^*)$ を考える.

$$S^* := \{(s^*)^2\} \subset F$$

$$X' := \{(1, \sigma_i) \mid 1 \leq i \leq n-1\}$$

とおく. 対応

$$s^* \mapsto s = (s, 1), \quad \sigma_i^* \mapsto (1, \sigma_i)$$

により, 全射準同型写像

$$\varphi: F \rightarrow C_{[\alpha, \beta]}$$

が定義される. 各 i, j ($1 \leq i < j \leq n-1$) に対し

$$r_{ij} = \begin{cases} \{\sigma_i \sigma_j \sigma_i (\sigma_j \sigma_i \sigma_j)^{-1} & (i = j-1) \\ \sigma_i \sigma_j (\sigma_j \sigma_i)^{-1} & (i < j-1) \end{cases}$$

$$r_{ij}^* = \begin{cases} \{\sigma_i^* \sigma_j^* \sigma_i^* (\sigma_j^* \sigma_i^* \sigma_j^*)^{-1} & (i = j-1) \\ \sigma_i^* \sigma_j^* (\sigma_j^* \sigma_i^*)^{-1} & (i < j-1) \end{cases}$$

とおく.

$$\varphi(r_{ij}^*) = \begin{cases} (1, \sigma_i)(1, \sigma_j)(1, \sigma_i)(1, \sigma_j)^{-1}(1, \sigma_i)^{-1}(1, \sigma_j)^{-1} & (i = j-1) \\ (1, \sigma_i)(1, \sigma_j)(1, \sigma_i)^{-1}(1, \sigma_j)^{-1} & (i < j-1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1, \sigma_i)(1, \sigma_j)(1, \sigma_i)^{-1}(1, \sigma_j)^{-1} &= (1, \sigma_i \sigma_j)(1, \sigma_i \sigma_j)^{-1}(\beta, 1)^{-1} \\ &= (\beta, 1)^{-1} \\ &= (\beta, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1, \sigma_i)(1, \sigma_j)(1, \sigma_i)(1, \sigma_j)^{-1}(1, \sigma_i)^{-1}(1, \sigma_j)^{-1} \\ &= (\mu_{[\alpha, \beta]}(\sigma_i \sigma_j, \sigma_i), \sigma_i \sigma_j \sigma_i)(\mu_{[\alpha, \beta]}(\sigma_j, \sigma_i \sigma_j), \sigma_j \sigma_i \sigma_j)^{-1} \\ &= (1, 1) \end{aligned}$$

より,

$$R^* := \{\sigma_i^* \sigma_j^* \sigma_i^* (\sigma_j^* \sigma_i^* \sigma_j^*)^{-1} \ (i = j-1), \quad \sigma_i^* \sigma_j^* (\sigma_j^* \sigma_i^*)^{-1} (s^*)^{-1} \ (i < j-1)\}$$

とおく. 最後に, $\text{Im}(\iota)$ は $C_{[\alpha, \beta]}$ の正規部分群であるから, $\sigma_i^* \in X^*$, $s^* \in Y^*$ に対し,

$$\varphi((\sigma_i^*)^{-1} s^* \sigma_i^*) \in \text{Im}(\iota).$$

よって

$$\varphi((\sigma_i^*)^{-1} s^* \sigma_i^*) = \iota(s).$$

$$T^* := \{(\sigma_i^*)^{-1} s^* \sigma_i^* (s^*)^{-1} \in F \mid \sigma_i^* \in X^*, s^* \in Y^*\}$$

とおく. 以上の計算より, 次の主結果を得る.

定理 6.1. (秋田-K. (2022)) $n \geq 4$ とする. 正規化された 2 コサイクル $\mu_{[\alpha, \beta]}: B_n \times B_n \rightarrow \mathbb{Z}/2$ に対応する中心拡大を

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{\iota} C_{[\alpha, \beta]} \xrightarrow{\pi} B_n \rightarrow 1$$

とする. このとき $C_{[\alpha, \beta]}$ の表示は生成元

$$\sigma_1^*, \dots, \sigma_{n-1}^*, s^*$$

と関係式

$$\begin{aligned} (s^*)^2 &= 1, \\ \sigma_i^* \sigma_j^* \sigma_i^* &= \sigma_j^* \sigma_i^* \sigma_j^* \quad (i = j-1), \\ \sigma_i^* \sigma_j^* &= \begin{cases} \sigma_j^* \sigma_i^* & (\beta = 1, i < j-1), \\ s^* \sigma_j^* \sigma_i^* & (\beta = s, i < j-1), \end{cases} \\ \sigma_i^* s^* &= s^* \sigma_i^* \quad (1 \leq i \leq n-1) \end{aligned}$$

で与えられ, $\pi(\sigma_i^*) = \sigma_i$ ($1 \leq i \leq n-1$), $\pi(s^*) = 1$, $\iota(s) = s^*$ を満たす.

命題 5.4 より $\beta = s$ のときが B_n の Schur 被覆なので、以下が成り立つ。

系 6.2. (秋田-K. (2022)) $n \geq 4$ とする. ブレイド群 B_n の Schur 被覆 C_n の表示は

$$\sigma_1^*, \dots, \sigma_{n-1}^*, s^*$$

と関係式

$$\begin{aligned} (s^*)^2 &= 1, \\ \sigma_i^* \sigma_j^* \sigma_i^* &= \sigma_j^* \sigma_i^* \sigma_j^* \quad (i = j - 1), \\ \sigma_i^* \sigma_j^* &= s^* \sigma_j^* \sigma_i^* \quad (i < j - 1), \\ \sigma_i^* s^* &= s^* \sigma_i^* \quad (1 \leq i \leq n - 1) \end{aligned}$$

で与えられ, 射影 $\pi: C_n \rightarrow B_n$ は $\pi(\sigma_i^*) = \sigma_i$ ($1 \leq i \leq n - 1$), $\pi(s^*) = 1$ を満たす.

参考文献

- [1] Yuri Bazlov and Arkady Berenstein, Cocycle twists and extensions of braided doubles, Contemporary Mathematics Volume 592 (2013), 32–33.
- [2] Kenneth S. Brown, Cohomology of Groups, Springer-Verlag (1994).
- [3] Johannes Huebschmann, Braids and crossed modules, J. Group Theory 15 (2012), 57–83.
- [4] Christian Kassel and Vladimir Turaev, Braid Groups, Springer (2008).
- [5] 佐藤隆夫, 『群の表示』, 近代科学社 (2017).
- [6] D. Johnson; Presentation of Groups, Cambridge University Press, 1990.