# quiver から得られる nilpotent Lie 代数と Ricci soliton

大阪市立大学　溝口　史華
Fumika Mizoguchi　Osaka City University *

**概要**

nilpotent Lie 群は, Ricci soliton を許容する非自明な例を多く供給する. 本稿では, quiver から nilpotent Lie 代数を得る方法を紹介する. また, “直線型” の quiver から得られた Lie 代数に対応する単連結 Lie 群が左不変な Ricci soliton 計量を持つことを述べる.

## 1　導入

本稿では, nilpotent Lie 代数上の代数的 Ricci soliton が重要な役割を果たす.

**定義 1.1（nilpotent）**　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が $n$-step nilpotent Lie 代数であるとは, 次を満たすこと:

$$\mathfrak{g}^{n-1} \neq 0, \quad \mathfrak{g}^n = 0.$$

ここで, $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}]$, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ と定める.

**定義 1.2（代数的 Ricci soliton）**　内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle,\rangle)$ が 代数的 Ricci soliton であるとは, $c \in \mathbb{R}, D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して, 次を満たすこと:

$$\mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id} + D.$$

**定義 1.3（Ricci soliton）**　Riemann 多様体 $(M, g)$ が Ricci soliton であるとは, $c \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して, 次を満たすこと:

$$\mathrm{ric}_g = c \cdot g + \mathcal{L}_X g.$$

代数的 Ricci soliton と Ricci soliton には次のような関係がある.

**定理 1.4（Lauret, [3]）**　左不変計量つきの単連結 Lie 群 $(G, g)$, 及び対応する内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle,\rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

* This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. This work was partly supported by Osaka Metropolitan University Advanced Mathematical Institute (MEXT Joint Usage/Research Center on Mathematics and Theoretical Physics).

- $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ が代数的 Ricci soliton ならば, $(G, g)$ は Ricci soliton である.
- $G$ が nilpotent で, $(G, g)$ が Ricci soliton ならば, $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ は代数的 Ricci soliton である.

与えられた等質多様体が不変な Ricci soliton 計量を持つかという問題がある．特に, $c < 0$ の場合は, 非自明な Ricci soliton の例が数多く供給される．最近, Riemann 多様体 $(M, g)$ が $c < 0$ の等質 Ricci soliton であるとき, $(M, g)$ は solvable Lie 群に左不変計量を入れた空間と等長的であることが示された ([1])．また, 適切な subalgebra に内積を制限することにより, Ricci soliton 計量を持つ solvable Lie 群から, Ricci soliton 計量を持つ nilpotent Lie 群が得られる ([4])．したがって, Ricci soliton を許容する nilpotent Lie 群を調べることは重要である.

nilpotent Lie 代数上の代数的 Ricci soliton について, 2-step nilpotent Lie 代数については具体例が多い．また, Lie 代数の構造が簡単な場合は, 代数的 Ricci soliton を許容するか否かの判定条件も解明されている ([6])．一方で, ステップ数の高い nilpotent Lie 代数は, 扱いやすい具体例が少ない．そこで, 次のような一般的な問題が考えられる.

**問題** 1.5

- 扱いやすい step 数の高い nilpotent Lie 代数の例を構成する.
- 与えられた nilpotent Lie 代数が代数的 Ricci soliton を許容するか否かを判定する.

本稿では, quiver から nilpotent Lie 代数を構成する方法を紹介する．この方法は, 任意の step 数の nilpotent Lie 代数を供給する．さらに, “直線型” の quiver から得られた Lie 代数が代数的 Ricci soliton を許容することを述べる.

## 2　既知の例

以下では, nilpotent Lie 代数上の代数的 Ricci soliton について既に知られている例を 2 つ紹介する．1 つ目は, ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数である．ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数とは, 次の例のように行列をブロック分割して, その対角ブロックとそれより下のブロックが 0 となるような行列全体のことである:

$$\left\{ \left( \begin{array}{c|cc|c|c} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & x_7 & x_8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & x_9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

**定理** 2.1 **(田丸, [7])**　ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数には, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

例えば, $(1,1,1)$ のブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数は 3 次元ハイゼンベルグ代数である:

$$\left\{ \left( \begin{array}{c|c|c} 0 & x_1 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\} : 3\text{ 次元ハイゼンベルグ代数}.$$

2 つ目は, グラフから得られる nilpotent Lie 代数である. 集合 $V, E$ と写像 $f : E \to V \times V$ の組 $(V, E, f)$ を有向単純グラフという. $V$ の元を頂点といい, $E$ は頂点の対の集合であり, その元を辺という. $f : E \to V \times V$ は, 辺の始点と終点を定める写像である.

**定義** 2.2（Dani-Mainkar, [2]） 有向単純グラフ $(V, E, f)$ に対して,

$$\mathfrak{n} := \mathrm{span}(V \cup E),$$

$$[x, y] = \begin{cases} e & (x, y \in V, f(e) = (x, y)), \\ -e & (x, y \in V, f(e) = (y, x)), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

とすると, 2-step nilpotent Lie 代数を得る.

**定理** 2.3（Lauret-Will, [5]） グラフから得られる Lie 代数が, 代数的 Ricci soliton を許容するための必要十分条件は, グラフが “positive” のときである.

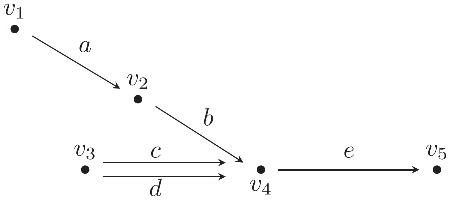
## 3 quiver から得られる Lie 代数

quiver とは, 多重辺とループを許す有向グラフのことで, 次のように定義する.

**定義** 3.1 集合 $V, E$, 写像 $s, t : E \to V$ に対して, 組 $Q = (V, E, s, t)$ を <u>quiver</u> という. $V$ の元を <u>頂点</u> , $E$ の元を <u>辺</u> , $\alpha \in E$ に対して, $s(\alpha)$ を <u>始点</u> , $t(\alpha)$ を <u>終点</u> という.

**定義** 3.2 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$ に対して, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-1)$ であるとき, 辺の列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ が <u>道</u> であるという. このとき, $n$ を <u>道の長さ</u> という.

**例** 3.3 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{a, b, c, d, e\}$ とし, $s(a) = v_1, s(b) = v_2, s(c) = v_3, s(d) = v_3, s(e) = v_4, t(a) = v_2, t(b) = v_4, t(c) = v_4, t(d) = v_4, t(e) = v_5$ とすると quiver となる. これを図示すると, 次のようになる.



この quiver の道は, $a, b, c, d, e, ab, be, ce, de, abe$ の 10 個.

quiver $Q$ の道 $x = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ に対して, $s(x) := s(\alpha_1)$ を道 $x$ の始点といい, $t(x) := t(\alpha_n)$ を道 $x$ の終点という.

**定義 3.4** quiver $Q = (V, E, s, t)$ に対して, $Q$ のすべての道の集まりを $\mathrm{Path}(Q)$ とし, $\mathfrak{n}_Q$ を次で定める:

$$\mathfrak{n}_Q := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} \mathrm{Path}(Q).$$

また, $x, y \in \mathrm{Path}(Q)$ 対して, 積と括弧積を

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & (t(x) = s(y)), \\ 0 & (t(x) \neq s(x)), \end{cases} \qquad [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

と定めると, $\mathfrak{n}_Q$ は $[,]$ に関して Lie 代数となる. これを $Q$ から得られる Lie 代数 という. ここで, $Q$ のすべての道 $\mathrm{Path}(Q)$ を, $\mathfrak{n}_Q$ の自然な基底という.

$n_Q$ に積 $\cdot$ を入れたものは道代数として既に知られている. 道代数の場合は, 頂点を長さ 0 の道として含めるのが一般的である. 今回は, 長さ 1 以上の道のみを扱う.

quiver $Q$ の道 $x$ に対して, $s(x) = t(x)$ であるとき, $x$ を cycle という. 辺が有限集合である有限 quiver が cycle を含まないとき, quiver のすべての道の長さの最大値が存在する. これを quiver の長さ という.

**命題 3.5** $Q$ を cycle を含まない有限 quiver とすると, $\mathfrak{n}_Q$ は有限次元の nilpotent Lie 代数となる. また, quiver の長さが $m$ の quiver から得られる Lie 代数は, $m$-step nilpotent Lie 代数である.

$Q$ を cycle を含む quiver とすると, cycle を繰り返し通ることで無限に道が存在するので, $\mathfrak{n}_Q$ は無限次元の Lie 代数となる.

## 4 例

本章では, quiver から得られる Lie 代数の具体例を紹介する. 以降, quiver は図で表し, 頂点の記号は省略する.

**例 4.1**

$$\bullet \xrightarrow{\quad a \quad} \bullet \xrightarrow{\quad b \quad} \bullet$$

から得られる Lie 代数 $\mathfrak{n}$ は 3 次元ハイゼンベルグ代数と同型. このとき, $\mathfrak{n} = \mathrm{span}\{a, b, ab\}$ で, 括弧積は,

- $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = ab,$

- $[a, ab] = 0$,
- $[b, ab] = 0$.

次は, 多重辺を含む quiver の例である.

**例 4.2**

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & \bullet \arrow[r, "c"] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

から得られる Lie 代数は $\mathfrak{n} = \mathrm{span}\{a, b, c, ac, bc\}$ で, 次と同型:

$$
\left\{ \left( \begin{array}{cc|c|c} 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.
$$

**注意 4.3**

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, "a"] & & \\
 & \bullet \arrow[r, "c"] & \bullet \\
\bullet \arrow[ur, "b"'] & &
\end{tikzcd}
$$

から得られる Lie 代数は, 例 4.2 で得られる Lie 代数と道も辺のつながり方も同じなので, 例 4.2 で得られる Lie 代数と同じである.

**例 4.4**

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "a"] & \bullet \arrow[r, "b"] & \bullet \arrow[r, "c"] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

から得られる Lie 代数は $\mathfrak{n} = \mathrm{span}\{a, b, c, ab, bc, abc\}$ で次と同型:

$$
\left\{ \left( \begin{array}{c|c|c|c} 0 & x_1 & x_4 & x_6 \\ \hline 0 & 0 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.
$$

例 4.1, 例 4.2, 例 4.4 は, ブロック分割から得られるので, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

**注意 4.5**　ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数には, quiver から得られないもの存在す

る．例えば, 次の Lie 代数は quiver からは得られない:

$$\left\{ \left( \begin{array}{c|cc|c} 0 & x_1 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

また, quiver から得られる nilpotent Lie 代数にも, ブロック分割から得られないものが存在する.

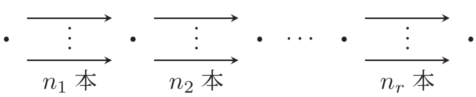
## 5　結果

前の章で紹介した quiver から得られる nilpotent Lie 代数は, 代数的 Ricci soliton となる内積を持つことがわかった．このことから, 次の問題を考えた.

**問題** 5.1　cycle を含まない有限 quiver から得られる nilpotent Lie 代数には, 代数的 Ricci soliton となる内積がいつ存在するか.

現在, 次の結果が得られている.

**定理** 5.2（**直線型** quiver）



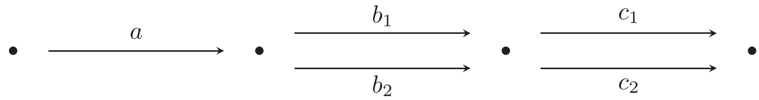

から得られる $r$-step nilpotent Lie 代数には, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

証明において, 代数的 Ricci soliton となる内積を帰納的に構成する.

**注意** 5.3　代数的 Ricci soliton となる内積は, 次のようになる.

- $r = 2$ のとき, 自然な基底を正規直交基底とする内積が代数的 Ricci soliton.
- $r \neq 2$ のとき, 自然な基底を正規直交基底とする内積は代数的 Ricci soliton とは限らない. 今回構成した代数的 Ricci soliton となる内積は, 自然な基底を直交基底とする内積である.

**例** 5.4

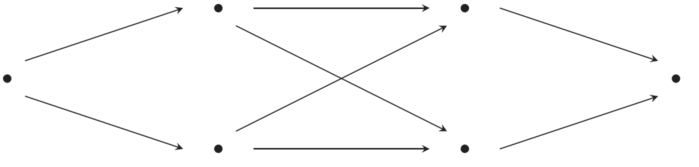



から得られる nilpotent Lie 代数は, $\langle a, a\rangle = 8/7$, その他の道のノルムは 1 とし, すべての道を直交基底とする内積に関して, 代数的 Ricci soliton となる．一方で, 自然な基底を正規直交基底とす

る内積は代数的 Ricci soliton ではない.

**定理 5.5**（2-step） quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step のときは, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

2-step のときは直線型に帰着されるので, 定理 5.5 は定理 5.2 から従う. 一方, 3-step 以上の場合は, 直線型の quiver に帰着されないものがある. 例えば, 次のような quiver から得られる Lie 代数は, 小さい quiver から得られる Lie 代数の直和には分解できない.



## 参考文献


[1] Böhm, C. and Lafuente, R., Non-compact Einstein manifolds with symmetry, arXiv:2107.04210.

[2] Dani, S. G. and Mainkar, M., Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 6, 2235–2251.

[3] Lauret, J., Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, Math. Ann. **319** (2001), no. 4, 715–733.

[4] Lauret, J., Ricci soliton solvmanifolds, J. Reine Angew. Math. **650** (2011), 1–21.

[5] Lauret, J. and Will, C., Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions, Math. Ann. **350** (2011), no.1, 199–225.

[6] Nikolayevsky, Y., Einstein solvmanifolds and the pre-Einstein derivation, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no.8, 3935–3958.

[7] Tamaru, H., Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds, Math. Ann. **351** (2011), no. 1, 51–66.