2 次で生成されるコホモロジー環をもつ Hessenberg 多様体について

大阪公立大学 数学研究所　　佐藤 敬志
Osaka Metropolitan University,
Osaka Central Advanced Mathematical Institute

1　序

Hessberg 多様体は de Mari, Procesi, Shayman によって定義された旗多様体の subvariety である [6]。特に本稿では A 型の Hessberg 多様体について述べるので、取り扱いやすいように Hessenberg 多様体の定義を彼らのものから少し言い換える。A 型の Hessberg 多様体は旗多様体 $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の部分多様体であり、次の 2 つのデータによって定まる。1 つは線形写像 $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ であり、もう 1 つは Hessenberg 関数と呼ばれる単調非減少関数 $h\colon [n] \to [n]$ である。ここで、$[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ は 1 から n までの整数の集合を表し、単調非減少関数 h は任意の $\forall j \in [n]$ で $h(j) \geq j$ を満たすときに Hessenberg 関数と呼ばれる。Hessenberg 関数は $\{t_j - t_i \mid j < i \leq h(j)\}$ という正ルート系の部分集合と対応している。Hessenberg 多様体の特殊な場合として、Springer 多様体や permutohedral variety などの重要な多様体がある。

旗多様体の幾何学がそのルート系の組合せ論的な言葉で記述できるように Hessenberg 多様体もその幾何学がルート系の部分集合の組合せ論的な言葉で記述されうる重要な部分多様体のクラスであると考えられている。実際に regular nilpotent Hessenberg 多様体のコホモロジー環は付随する超平面配置の logarithmic derivation module というものを用いて記述できる [1]。それは Borel による旗多様体のコホモロジー環の記述の一般化になっている。

Regular semisimple Hessenberg は Brosnan と Chow[3] によって解かれた

Shareshian–Wachs 予想により対称関数論との関係があり、そのコホモロジー群は組合せ論的な計算を実行することにより対称群の表現として完全に記述できる。しかし、コホモロジー環の環構造や具体的な記述はわずかな例を除いてほとんど知られていない。

本稿では、コホモロジー環が 2 次で生成される regular semisimple Hessenberg 多様体の環構造の具体的な記述について述べる。この結果は Anton Ayzenberg 氏（Higher School of Economics）と枡田幹也氏（大阪公立大学）との共同研究に基づく。

2 Regular semisimple Hessenberg 多様体

2.1 Hessenberg 多様体

$\mathbb{C}^n$ における（完全な）旗 $V_\bullet$ とは $\mathbb{C}^n$ の部分空間の増大列

$$V_\bullet = (\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n)$$

であり、$\dim_{\mathbb{C}} V_j = j$ を満たすものである。旗多様体 $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ とは $\mathbb{C}^n$ における旗全体のなす多様体である。$[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ を 1 から n までの整数の集合とする。

定義 2.1. 線形写像 $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ と単調非減少関数 $h\colon [n] \to [n]$ で $h(j) \geq j$ $(j \in [n])$ を満たすものに対し、Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(A, h)$ は旗多様体 $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の部分多様体であって次で定まるものである。

$$\mathrm{Hess}(A, h) = \{V_\bullet \mid A(V_j) \subset V_{h(j)} \text{ for } \forall j \in [n]\}.$$

上の性質を満たす h は Hessenberg 関数と呼ばれる。記述の簡略化のためにしばしば Hessenberg 関数 h をその値の列 $h = (h(1), h(2), \ldots, h(n))$ として書くことにする。例えば、$h = (n, n, \ldots, n)$ のときは Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(A, h)$ は旗多様体 $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ そのものである。これは A が何であるかに依らない。もし h' が h より関数として小さいなら、$\mathrm{Hess}(A, h')$ は $\mathrm{Hess}(A, h)$ の部分多様体である。ゆえに固定された A に対して、Hessenberg 多様体たちはネスト状の構造をもつ。一方で Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(A, h)$ の幾何学的な性質は A によって大きく変わりうる。以下では、A を標準基底に関する表現行列と同一視して扱う。A と A' が同じ Jordan 標準形をもつとき、$\mathrm{Hess}(A, h)$ と $\mathrm{Hess}(A', h)$ は多様体として同型 (diffeomorphic) であり、特に

コホモロジー環は同型である。行列 A が regular nilpotent であるとき、$\mathrm{Hess}(A,h)$ は regular nilpotent Hessenberg 多様体と呼ばれ、それは一般には特異点をもつ。行列 A が regular semisimple の場合、つまり A が互いに異なる固有値をもつ場合、Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(A,h)$ は regular semisimple Hessenberg 多様体と呼ばれ、それは滑らかな多様体である。Regular semisimple 行列を S で表すことにして、S は対角行列であると仮定する。T を n 次元トーラスとし、サイズ n の正則な対角行列のなす群と同一視する。このトーラス T は $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ に通常の方法で作用し、S が T と可換なので $\mathrm{Hess}(S,h)$ に制限することができる。これらの作用による $\mathrm{Hess}(S,h)$ と $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の固定点集合は一致し、$\mathrm{Hess}(S,h)^T = \mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)^T = \mathfrak{S}_n$ と対称群と同一視する。一方で、regular nilpotent Hessenberg 多様体に T-作用を制限することはできない。

2.2　同変コホモロジー環

空間 X に群 G が作用しているとき、その作用に関する同変コホモロジー環 $H^*_G(X)$ は Borel 構成 $EG \times_G X$ の通常のコホモロジー環として定義される。

$$H^*_G(X) = H^*(EG \times_G X)$$

とくに Borel 構成は次のファイバー束の全空間であることに注意。

$$X \to EG \times_G X \to BG$$

Regular semisimple Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ には上の T-作用があり、[4] で定義された GKM 多様体と呼ばれるものになっている [6]。GKM 多様体はその同変コホモロジー環を固定点集合に制限して見ることで調べることのできる多様体であり、実際に

$$\begin{aligned} H^*_T(\mathrm{Hess}(S,h)) \to H^*_T(\mathrm{Hess}(S,h)^T) &= \bigoplus_{w\in\mathfrak{S}_n} H^*_T(w) \\ &\cong \bigoplus_{w\in\mathfrak{S}_n} \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n] = \mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n]) \end{aligned}$$

は単射である。ここで $\mathrm{Map}(P,Q)$ は集合 P から Q への写像全体のなす集合を表す。さらに、$\mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_n])$ の中で、この準同型の像は次で与えられる。

$$\{f \mid f(w) - f(w(i,j)) \in (t_{w(i)} - t_{w(j)}), \forall w \in \mathfrak{S}_n,\ j < i \le h(j)\}$$

ここで (i,j) は i と j の互換を表し、(t) は t により生成されるイデアルを表す。特に regular semisimple Hessenberg 多様体の同変と通常のどちらのコホモロジー環も奇数次が消えていることに注意。

Hessenberg 関数 h が、ある k で $h(k)=k$ を満たすとき、Regular semisimple Hessenberg 多様体 $\mathrm{Hess}(S,h)$ は連結ではなく、$\mathrm{Hess}(S_1,h_1)\times\mathrm{Hess}(S_2,h_2)$ の $\binom{n}{k}$ 個のコピーの非交和となる。ここで h_1 は h を $[k]$ に制限したものであり、h_2 は h を $[k+1,n]$ に制限して整数をシフトすることで $[k+1,n]$ と $[1,n-k]$ を同一視して得られる Hessenberg 関数である。S_1 は対角行列 S の k 番目までの成分、S_2 は残りの $n-k$ 個の成分として得られる regular semisimple 行列である。以下では、$\mathrm{Hess}(S,h)$ は連結であると仮定する。つまり任意の $j\in[n-1]$ で $h(j)\geq j+1$ と仮定する。

3 主結果

3.1 前提となる結果

Regular semisimple Hessenberg 多様体の同変 2 次コホモロジーについて、[2] により生成元が分かっており、それを定理 3.1 として記す。全ての元は $\mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n,\mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n])$ の元として記述されている。

定理 3.1. $\mathrm{Hess}(S,h)$ が連結であれば、次の元たち $\{x_i,y_{a,k},\tau_A,t_i \mid i,k\in[n],\, a$ は $h(a-1)=h(a)=a+1$ をみたす$,\, A\subset[n], |A|\in\{j\in[n-1]\mid h(j-1)+1=h(j)=j+1\}\}$ は $H^2_T(\mathrm{Hess}(S,h))$ を張る。ここで、各々の元は $w\in\mathfrak{S}_n$ として次で定まる。

- $x_i(w)=t_{w(i)}$
- $y_i(w)=\begin{cases} t_i-t_{w(a+1)} & (i\in\{w(1),\ldots,w(a)\})\\ 0 & (otherwise)\end{cases}$
- $\tau_A(w)=\begin{cases} t_{w(|A|)}-t_{w(|A|+1)} & (A=\{w(1),\ldots,w(|A|)\})\\ 0 & (otherwise)\end{cases}$

注意 3.2. x_i は旗多様体 $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ の各点 $V_\bullet$ に V_i/V_{i-1} が乗った直線束の同変チャーン類の引き戻しとして得られる。

さらに [2] に続く論文で記す予定である次の定理が成立する。この定理は $H^*(\mathrm{Hess}(S,h))$ が 2 次で生成されるための h の必要十分条件を与える。

定理 3.3. $\mathrm{Hess}(S,h)$ が連結であれば、次は同値である。

- $H^*(\mathrm{Hess}(S,h))$ は 2 次で生成される。
- ある $0 \leq a < b \leq n-1$ に対し、h は次の形 (3.1) である。

$$h(j) = \begin{cases} a+1 & (1 \leq j \leq a) \\ j+1 & (a < j < b) \\ n & (b \leq j \leq n) \end{cases} \tag{3.1}$$

この (3.1) の形で書かれる Hessenberg 関数 h を double lollipop type と呼ぶ。

注意 3.4. 上で $a=0$ かつ $b=1$ のとき $\mathrm{Hess}(S,h)$ は旗多様体 $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ である。また、$a=0$ かつ $b=n-1$ のとき $\mathrm{Hess}(S,h)$ は permutohedral variety である。

3.2　生成元と関係式

一般の場合には記述が複雑になりすぎるので、(3.1) において $b=a+1$ である場合についてコホモロジー環の生成元と関係式を調べる。つまり、$h=(a+1,\ldots,a+1,n,\ldots,n)$ であるとする。この場合、定理 3.1 における生成元は

$$\{x_i, y_{a,k}, t_i \mid i,k \in [n]\}$$

の 3 種類のみになる。特に今は a を固定しているので、$y_{a,k}$ を y_k と書くことにする。また、ルート系の対称性から $a \leq \frac{n}{2}$ の場合のみを考えれば十分なので、そのように仮定する。また、同変コホモロジー環の元を通常のコホモロジー環に落とすときには t_i を消去すればよく、文字 x_i, y_k は通常のコホモロジー環に落としたときの像をも表すことにする。

[5] により、double lollipop type の regular semisimple Hessenberg 多様体の Poincaré 多項式は知られている。とくに $h=(a+1,\ldots,a+1,n,\ldots,n)$ のときは

$$\mathrm{Poin}(\mathrm{Hess}(S,h),\sqrt{q}) = [a]_q![n-a-1]_q! \sum_{k=0}^{a} \binom{n}{k} q^k [n-2k]_q, \tag{3.2}$$

で与えられる。ここで $[m]_q = \dfrac{1-q^m}{1-q}$, $[m]_q! = \displaystyle\prod_{k=1}^{m}[k]_q!$ である。この等式 (3.2) は $\frac{n}{2} < a$ でも成立する。

生成元 x_i たちと y_k たちの関係式を調べるに当たり、同変コホモロジー環の元として次の記号を用意する。

- $y_i^* = y_i + x_{a+1} - t_i$
- 部分集合 $I \subset [n]$ に対し、$y_I = \displaystyle\prod_{i\in I} y_i$ とし、$y_I^* = \displaystyle\prod_{i\in I} y_i^*$ とする。

$\mathrm{Map}(\mathfrak{S}_n, \mathbb{Z}[t_1,\ldots,t_n])$ の元として y_i^* は次のように書ける。

$$y_i^*(w) = \begin{cases} t_{w(a+1)} - t_i & (i \in \{w(a+2),\ldots,w(n)\}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

命題 3.5. 同変コホモロジー環の元として次の関係式が成立する。

(0) $e_i(x_1,\ldots,x_n) = e_i(t_1,\ldots,t_n) \quad (1 \le i \le n)$

(R1) $y_I = 0 \quad (|I| = a+1)$

(R1*) $y_I^* = 0 \quad (|I| = n-a)$

(R2) $\displaystyle\sum_{|I|=r} y_I - \sum_{j=0}^{r} \binom{a-j}{r-j} e_j(x_1,\ldots,x_a)(-x_{a+1})^{r-j} = 0 \quad (1 \le r \le a)$

(R3) $y_i^2 + x_{a+1}y_i = y_i t_i \quad (1 \le i \le n)$

証明. (0) この関係式は旗多様体から来る。各固定点上での値を見ることでもすぐに確認できる。

(R1) y_I の support は $I \subset w([a])$ を満たす $w \in \mathfrak{S}_n$ 全体からなるものである。しかし今は $|I| = a+1$ である。ゆえに y_I の support は空集合である。同じ議論で (R1*) を示せる。

(R2) $|I| = r$ とする。定義より

$$y_I(w) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i\in I}(t_i - t_{w(a+1)}) & (I \subset \{w(1),\ldots,w(a)\}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

であり、その support 上での値は次のように変形できる。

$$\sum_{k=0}^{r} e_k(t_\bullet \,|\, I)\,(-t_{w(a+1)})^{r-k}$$

ここで $e_k(t_\bullet \,|\, I)$ は $\{t_i \,|\, i \in I\}$ を変数とする k 次の基本対称多項式を表す。固定された $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し、$\sum_{|I|=r} y_I(w)$ の値を計算しよう。$J_w = \{w(1), \ldots, w(a)\}$ とすると次の等式が成立する。

$$\sum_{|I|=r} y_I(w) = \sum_{\substack{I \subset J_w \\ |I|=r}} y_I(w) = \sum_{\substack{I \subset J_w \\ |I|=r}} \sum_{k=0}^{r} e_k(t_\bullet \,|\, I)\,(-t_{w(a+1)})^{r-k}$$

ここで右辺を見ると、k-部分集合 $I' \subset J_w$ に対し r-部分集合 $I \subset J_w$ で I' を含むものが $\binom{a-k}{r-k}$ 個ある。この k-部分集合 $I' \subset J_w$ は k-部分集合 $w^{-1}(I') \subset [a]$ と 1 対 1 対応があり、$\prod_{i \in I'} t_i = \prod_{i \in w^{-1}(I')} x_i(w)$ である。ゆえに

$$e_k(t_\bullet \,|\, I) = \sum_{\substack{I' \subset J_w \\ |I'|=k}} \prod_{i \in I'} t_i = e_k(x_1, \ldots, x_a)(w)$$

であり、w に依らずに

$$\sum_{|I|=r} y_I = \sum_{k=0}^{r} \binom{a-k}{r-k} e_k(x_1, \ldots, x_a)(-x_{a+1})^{r-k}$$

が成立する。

(R3) 示すべき式は $y_i y_i^* = 0$ と同値だが、y_i と y_i^* の supports は交わらない。

□

3.3 コホモロジーの環構造

$H^*(\mathrm{Hess}(S,h);\mathbb{Q})$ の環構造について述べる。$X_i \mapsto x_i$, $Y_i \mapsto y_i$ によって与えられる全射 $\mathbb{Q}[X_i, Y_i \mid i \in [n]] \to H^*(\mathrm{Hess}(S,h);\mathbb{Q})$ を考える。命題 3.5 の関係式に対応して $\mathbb{Q}[X_i, Y_i \mid i \in [n]]$ のイデアル $\mathfrak{I}$ を定め、全射

$$\mathbb{Q}[X_i, Y_i \mid i \in [n]]/\mathfrak{I} \to H^*(\mathrm{Hess}(S,h);\mathbb{Q}).$$

の定義域と終域の Hilbert 多項式が一致することを確認して、両者が同型であることを示す。

定義 3.6. $Y_i^* = Y_i + X_{a+1}, Y_I = \prod_{i\in I} Y_i, Y_I^* = \prod_{i\in I} Y_i^*$ とする。$\mathbb{Q}[X_i, Y_i \mid i \in [n]]$ のイデアル $\mathfrak{I}$ を次の元で生成されるものとする。

(0) $e_i(X_1, \ldots, X_n) \quad (1 \le i \le n)$

(R1) $Y_I \quad (|I| = a+1)$

(R1*) $Y_I^* \quad (|I| = n-a)$

(R2) $\displaystyle\sum_{|I|=r} Y_I - \sum_{j=0}^{r} \binom{a-j}{r-j} e_j(X_1, \ldots, X_a)(-X_{a+1})^{r-j} \quad (1 \le r \le a)$

(R3) $Y_i^2 + X_{a+1} Y_i \quad (1 \le i \le n)$

定理 3.7. 上のセッティングのもと、$X_i \mapsto x_i$, $Y_i \mapsto y_i$ で与えられる次の全射は同型である。

$$\mathbb{Q}[X_i, Y_i \mid i \in [n]]/\mathfrak{I} \to H^*(\mathrm{Hess}(S, h); \mathbb{Q})$$

証明. 詳細は省略するが、関係式で変形していくことにより、$\mathbb{Q}[X_i, Y_i \mid i \in [n]]/\mathfrak{I}$ の任意の元の代表元を次のものの線形和として書くことができる。

$$\left\{ X_{a+1}^{i_{a+1}} X_1^{i_1} \cdots X_a^{i_a} X_{a+2}^{i_{a+2}} \cdots X_n^{i_n} Y_I \;\middle|\; \begin{array}{c} |I| \le a,\ 0 \le i_{a+1} \le n - 2|I| - 1, \\ 1 \le k \le a \ \Rightarrow\ 0 \le i_k \le a - k, \\ a+2 \le k \le n \ \Rightarrow\ 0 \le i_k \le n - k \end{array} \right\}$$

この単項式の数を数えることにより、$\mathbb{Q}[X_i, Y_i \mid i \in [n]]/\mathfrak{I}$ の Hilbert 多項式は (3.2)

$$[a]_q! [n-a-1]_q! \sum_{k=0}^{a} \binom{n}{k} q^k [n-2k]_q$$

以下であることが導かれる。ゆえに定理の全射は同型写像である。 □

注意 3.8. 定理 3.7 の証明において $H^*(\mathrm{Hess}(S, h))$ の基底が与えられたので、$\mathfrak{S}_n$-表現としての構造も分かる。対称群の作用は $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し、$\sigma \cdot x_i = x_i$, $\sigma \cdot y_k = y_{\sigma(k)}$ となっている。

参考文献

[1] T. Abe, T. Horiguchi, M. Masuda, S. Murai, and T. Sato, *Hessenberg varieties and hyperplane arrangements*, J. für die Reine und Angew. Math. (Crelles Journal), vol. 2020, no. **764**, 2020, pp. 241–286. https://doi.org/10.1515/crelle-2018-0039.

[2] A. Ayzenberg, M. Masuda, and T. Sato, *The second cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties from GKM theory*, arXiv:2203.11580.

[3] P. Brosnan and T. Chow, *Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties*, Adv. Math. **329** (2018), 955–1001.

[4] V. Guillemin and C. Zara, *1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J. **107** (2001), no. 2, 283–349.

[5] J. Huh, S-Y. Nam, and M. Yoo, *Melting lollipop chromatic quasisymmetric functions and Schur expansion of unicellular LLT polynomials*, Discrete Math. **343** (2020), 111728.

[6] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, *Hessenberg varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), no. 2, 529–534.