偏極トーリック曲面の漸近的 Chow 安定性

東京理科大学理学部第二部数学科　新田泰文 *
Department of Mathematics, Faculty of Science Division II,
Tokyo University of Science

概 要

本稿の目的は研究集会「RIMS 共同研究：変換群論の新潮流」での講演に基づいて論文 [12] の概説を行うことである. 偏極トーリック曲面において漸近的 Chow 半安定性の障害の消滅と K 準安定性が漸近的 Chow 準安定性を導くことを説明する. 尚, 本稿の内容は齋藤俊輔氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.

1　導入

本稿を通して k は標数 0 の代数的閉体を意味するものとする. また, k 上の偏極多様体とは k 上で定義された**正規**完備代数多様体 X と X 上の豊富な直線束 L の組 (X, L) を意味するものとする. X の自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ の極大代数的トーラス T を一つ選び固定する.

まず本稿の背景を説明する. (X, L) を $\mathbf{C}$ 上の非特異偏極多様体とする. (X, L) における定スカラー曲率 Kähler 計量の存在問題は Kähler 幾何学における中心的な問題の一つである. Yau-Tian-Donaldson 予想によると, その存在は (X, L) が幾何学的不変式論の意味で安定であることと同値であろうと予想されている. 安定性の候補は様々なものが知られているが, 今のところ (一様) K 準安定性が有力であると思われる.

一方, Donaldson は [5] において偏極多様体 (X, L) の自己同型群が離散的であり, $c_1(L)$ が定スカラー曲率 Kähler 計量を含むとき漸近的 Chow 安定であることを示した. また, 満渕は [9] において自己同型群が離散的でない場合を考え, 適切な条件下で Donaldson の結果を一般化した. この条件について簡単に説明しよう. (X, L) を偏極多様体とする. 各 $r \in \mathbf{Z}_{>0}$ と $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ に対して (X, L) の指数 r の積配位と呼ばれる 1 径数退化族 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が得られる (cf. 例 2.2). さらに, この積配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対

*本研究は JSPS 科研費（課題番号 21K03234）の助成を受けたものである.

して Chow ウェイトと呼ばれる数値的不変量が定義される (cf. 定義 2.5). これを $Chow_r(\xi)$ を表したとき, 満渕の課した条件とは次の通りである.

$$\text{各 } \xi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T) \otimes \mathbf{Q} \text{ に対して } r \in \mathbf{Z}_{>0} \text{ を十分大きく選ぶと常に } Chow_r(\xi) = 0 \text{ である.} \tag{1.1}$$

これは (X, L) が漸近的 Chow 半安定であるための必要条件である. 満渕は [9] において偏極多様体 (X, L) が条件 (1.1) を満たし, さらに $c_1(L)$ が定スカラー曲率 Kähler 計量を含むなら漸近的 Chow 準安定であることを示した. ここで条件 (1.1) の仮定を取り除くことはできないことが知られている ([13]).

さて, Yau-Tian-Donaldson 予想が正しいとするとこの事実における定スカラー曲率 Kähler 計量の存在は (一様) K 準安定性に置き換えることができる. すなわち, 条件 (1.1) と (一様) K 準安定性が漸近的 Chow 準安定性を導くと予想される. 以上の背景の下で, 我々はこの予想が偏極トーリック曲面という特別な場合に成立することを示した.

主定理 (N.-齋藤 [12]). k 上の偏極トーリック曲面において条件 (1.1) と T 同変 K 準安定性は漸近的 Chow 準安定性を導く.

我々の主定理では基礎体を $\mathbf{C}$ に限定していないこと, また特異点を持つ場合も含んでいることに注意せよ. さらに, これをトーリック del Pezzo 曲面に適用すると以下を得る.

系. k 上の Gorenstein トーリック del Pezzo 曲面 X が条件 (1.1) を満たすとき, 次の 4 つの条件は同値である.

(1) (X, K_X^{-1}) は T 同変 K 準安定である.

(2) (X, K_X^{-1}) は漸近的 Chow 準安定である.

(3) (X, K_X^{-1}) は漸近的 Chow 半安定である.

(4) (X, K_X^{-1}) は T 同変 K 半安定である.

一般に, 条件 (1.1) とは無関係に偏極多様体に対し (1) $\Rightarrow$ (4) 及び (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) という含意が成り立っている. また, トーリック Fano 多様体に対しては (1) と (4) は同値であり, さらにこれらは T 一様 K 安定性とも同値である ([11, Corollary 1.0.7]).

2　準備

2.1　K 安定性

(X, L) を k 上の n 次元偏極多様体とする．まず (X, L) のテスト配位について説明しよう．本論文では T 同変なものしか扱わないので，T 同変テスト配位のみ説明する．

定義 2.1. $r \in \mathbf{Z}_{>0}$ とする．偏極多様体 (X, L) の指数 r の T **同変テスト配位**とは以下の 4 つ組からなる:

(1) $T \times \mathbf{G}_m$ の作用を持つ正規代数多様体 $\mathcal{X}$;

(2) $T \times \mathbf{G}_m$ 同変な射影的平坦射 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{A}^1$;

(3) $T \times \mathbf{G}_m$ 線型化を持つ相対豊富な直線束 $\mathcal{L} \to \mathcal{X}$;

(4) $T \times \mathbf{G}_m$ 同変同型 $(\mathcal{X}_{\mathbf{G}_m}, \mathcal{L}_{\mathbf{G}_m}) \cong (X \times \mathbf{G}_m, p_1^* L^r)$.

ただし $p_1\colon X \times \mathbf{G}_m \to X$ は第 1 成分への射影である．また，$\mathbf{G}_m$ は複素数の乗法で，T は自明に $\mathbf{A}^1$ に作用するものとし，$(\mathcal{X}_{\mathbf{G}_m}, \mathcal{L}_{\mathbf{G}_m}) \to \mathbf{G}_m$ は $(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \to \mathbf{A}^1$ の包含射 $\mathbf{G}_m \hookrightarrow \mathbf{A}^1$ による基底変換である．$T \times \mathbf{G}_m$ 同変な同型射 $\mathcal{X} \cong X \times \mathbf{A}^1$ が存在するときテスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は**積配位**であるという．

例 2.2. $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ とする．ξ が誘導する $\mathbf{G}_m$ の $\mathcal{X} \coloneqq X \times \mathbf{A}^1$ 上の対角線作用を考える．そのとき第 2 成分への射影 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{A}^1$ は $T \times \mathbf{G}_m$ 同変である．さらに，$p\colon \mathcal{X} \to X$ を第 1 成分への射影とし，各 $r \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対してこの作用の $\mathcal{L} \coloneqq p^* L^r$ 上の $\mathbf{G}_m$ 線型化を考える．そのとき $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ は (X, L) の指数 r の T 同変積配位である．これを ξ が誘導する積配位という．

$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を (X, L) の指数 r の T 同変テスト配位とする．各 $t \in \mathbf{A}^1$ に対して $\mathcal{X}_t \coloneqq \pi^{-1}(\{0\})$, $\mathcal{L}_t \coloneqq \mathcal{L}|_{\mathcal{X}_t}$ とする．そのとき，$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{A}^1$ の平坦性により

$$N_{rm} \coloneqq \dim_{\mathbf{C}} H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^m) = \dim_{\mathbf{C}} H^0(X, L^{rm})$$

が十分大きな $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して成立する．さらに，漸近的 Riemann-Roch の定理により

$$N_{rm} = a_0 (rm)^n + a_1 (rm)^{n-1} + O(m^{n-2})$$

を得る．ここで

$$a_0 = \frac{(L^n)}{n!}, \quad a_1 = -\frac{1}{2}\frac{(K_X \cdot L^{n-1})}{(n-1)!}$$

である．$0 \in \mathbf{A}^1$ は $\mathbf{G}_m$ 作用の固定点であるので $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ への $\mathbf{G}_m$ 作用は余表現 $\lambda_m \colon H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^m) \to H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^m) \otimes \mathbf{C}[t, t^{-1}]$ を誘導する．この余表現に対する ウェイト分解を

$$H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^m) = \bigoplus_{i=1}^{N_{rm}} H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^m)_{\lambda_i^{(m)}}$$

と表す．ここで $H^0(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_0^m)_{\lambda_i^{(m)}}$ は $\lambda_i^{(m)}$ に対するウェイト部分空間である．そのとき [1, Theorem 3.1] により

$$w_{rm} \coloneqq \sum_{i=1}^{N_{rm}} \lambda_i^{(m)} = b_0(rm)^{n+1} + b_1(rm)^n + O(m^{n-1})$$

が十分大きな $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して成立する．そこで次の漸近展開を考えよう:

$$\frac{w_{rm}}{rmN_{rm}} = F_0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) + F_1(\mathcal{X}, \mathcal{L})(rm)^{-1} + O(m^{-2}).$$

簡単な計算により

$$F_0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \frac{b_0}{a_0}, \quad F_1(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}.$$

であることが確かめられる．

定義 2.3. $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を (X, L) の指数 r の T 同変テスト配位とする．

$$DF(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \coloneqq -2F_1(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 2\frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_0^2}$$

を $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の **Donaldson-二木不変量**という．

定義 2.4. (X, L) を偏極多様体とする．

(1) 任意の T 同変テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して $DF(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq 0$ が成り立つとき (X, L) はT **同変 K 半安定**であるという．

(2) (X, L) が T 同変 K 半安定であって T 同変テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して $DF(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0$ と $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が積配位であることが同値であるとき (X, L) はT **同変 K 準安定**であるという．

2.2 Chow 安定性

テスト配位を用いて偏極多様体の Chow 安定性を定義する．まずはテスト配位の **Chow ウェイト**から説明する．

定義 2.5. $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を (X, L) の指数 r の T 同変テスト配位とする．

$$Chow_r(\mathcal{X}, \mathcal{L}) := F_0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - \frac{w_r}{rN_r}$$

を $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ の **Chow ウェイト**という．

2.1 節で説明した Donaldson-二木不変量は Chow ウェイトのスケール極限として表現することができる．実際，$(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ を (X, L) の指数 r の T 同変テスト配位とすると，十分大きな $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して

$$\begin{aligned} Chow_{rm}(\mathcal{X}, \mathcal{L}^m) &= F_0(\mathcal{X}, \mathcal{L}^m) - \frac{w_{rm}}{rmN_{rm}} = F_0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - \frac{w_{rm}}{rmN_{rm}} \\ &= F_0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - F_0(\mathcal{X}, \mathcal{L}) - F_1(\mathcal{X}, \mathcal{L})(rm)^{-1} - O(m^{-2}) \\ &= -F_1(\mathcal{X}, \mathcal{L})(rm)^{-1} - O(m^{-2}) \\ &= \frac{1}{2} DF(\mathcal{X}, \mathcal{L})(rm)^{-1} - O(m^{-2}) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って $m \to \infty$ とすると

$$DF(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = \lim_{m \to \infty} 2rmChow_{rm}(\mathcal{X}, \mathcal{L}^{\otimes m}) \tag{2.1}$$

を得る．

定義 2.6. (X, L) を偏極多様体とする．

(1) 任意の指数 r の T 同変テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して $Chow_r(\mathcal{X}, \mathcal{L}) \geq 0$ が成り立つとき (X, L) は**レベル r で Chow 半安定**であるという．

(2) (X, L) がレベル r で Chow 半安定であって指数 r の T 同変テスト配位 $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ に対して $Chow_r(\mathcal{X}, \mathcal{L}) = 0$ と $(\mathcal{X}, \mathcal{L})$ が積配位であることが同値であるとき (X, L) は**レベル r で Chow 準安定**であるという．

(3) 十分大きな $r \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して (X, L) が常にレベル r で Chow 半安定であるとき，(X, L) は**漸近的 Chow 半安定**であるという．

(4) 十分大きな $r \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して (X, L) が常にレベル r で Chow 準安定であるとき，(X, L) は**漸近的 Chow 準安定**であるという．

(2.1) から直ちに分かるように，偏極多様体 (X, L) が漸近的 Chow 半安定なら K 半安定である．

注意 2.7. [14, Theorem 3.9] と [7, Corollary 4.5 (a)] により, 定義 2.6 による Chow 安定性の定義は Mumford による従来のもの ([10, 1.17]) と同値である.

$\xi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ とする. $r \in \mathbf{Z}_{>0}$ とし, ξ が誘導する指数 r の積配位の Chow ウェイトを $Chow_r(\xi)$ と表す. そのとき, 簡単な計算により $-\xi$ が誘導する積配位の Chow ウェイトは $-Chow_r(\xi)$ に等しいことが分かる. 従って以下を得る.

命題 2.8. 偏極多様体 (X, L) がレベル r で Chow 半安定なら, 任意の $\xi \in \mathrm{Hom}(\mathbf{G}_m, T)$ に対して $Chow_r(\xi) = 0$ である. 特に, (X, L) が漸近的 Chow 半安定なら (1.1) が成立する.

3 偏極トーリック多様体

3.1 運動量多面体

本節では (X, L) は k 上の n 次元偏極トーリック多様体とする. すなわち, $\dim T = \dim X = n$ であり, T の X への作用は稠密な開軌道を持つものとする. $M := \mathrm{Hom}(T, \mathbf{G}_m)$ とする. M は階数が n の格子である. $M_{\mathbf{R}} := M \otimes \mathbf{R}$ とする. $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ とすると T の X への作用は余表現 $\rho_m\colon H^0(X, L^m) \to H^0(X, L^m) \otimes k[T]$ を誘導する. この余表現に対するウェイト分解を

$$H^0(X, L^m) = \bigoplus_{\chi \in M} H^0(X, L^m)_\chi$$

と表す. ここで $H^0(X, L^m)_\chi$ は χ に対する $H^0(X, L^m)$ のウェイト部分空間である. そこで

$$P := \overline{\mathrm{conv}} \left(\bigcup_{m \in \mathbf{Z}_{>0}} \left\{ \frac{\chi}{m} \in M_{\mathbf{R}} \,\middle|\, \chi \in M,\ H^0(X, L^m)_\chi \neq \{0\} \right\} \right)$$

とすると, P は n 次元有理凸多面体になることが知られている. ([2] の 2.1 節を見よ) ここで $\overline{\mathrm{conv}}$ は閉凸包を意味する. この P を (X, L) の**運動量多面体**という. 以下では必要なら L をその十分高い冪と取り換えて, 初めから P は整凸多面体であると仮定する.

逆に n 次元整凸多面体から (X, L) を次のようにして復元することができる (cf. [3]). 一般に $P \subset M_{\mathbf{R}}$ を n 次元整凸多面体とする. $C(P) \subset M_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$ を原点を頂点とする P の錐とすると, その格子点集合 $S_P := C(P) \cap (M \times \mathbf{Z})$ は有限生成単位的可換半群である. S_P の k 上の半群環

を $k[S_P]$ と表すとこれは k 上の有限生成代数であり, $\mathbf{Z}$ の座標による自然な次数付けを持つ. そのとき $(\mathrm{Proj}\, k[S_P], \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, k[S_P]}(1))$ として偏極トーリック多様体が得られる.

3.2 偏極トーリック多様体の K 安定性と Chow 安定性

(X, L) を k 上の偏極トーリック多様体とし, P を (X, L) の運動量多面体とする. P 上の凸関数 f であって有限個の有理アファイン関数 $\ell_1, \ldots, \ell_m$ を用いて

$$f = \max\{\ell_1, \ldots, \ell_m\}$$

と表されるものを P 上の**区分的有理アファイン凸関数**という. 偏極トーリック多様体においては T 同変テスト配位と P 上の区分的有理アファイン凸関数との間に一対一の対応があることが知られている (cf. [4, Theorem 4.1], [8, Theorem 3.4, Remark 3.6]). 本稿では区分的有理アファイン凸関数から T 同変テスト配位を構成する方法について説明する. f を P 上の区分的有理アファイン凸関数とする. $A \in \mathbf{Z}$ を $A > \max_P f$ であるように選び

$$\mathcal{P}_f := \{(x, y) \in M_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R} \mid x \in P,\ f(x) - A \leq y\}$$

とする. $\mathcal{P}_f$ は $M_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$ 内の $(n+1)$ 次元有理凸多面的集合である. $r \in \mathbf{Z}_{>0}$ を $r\mathcal{P}_f \subset M_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$ が整凸多面的集合であるように選ぶ. そのとき, $r\mathcal{P}_f$ から上と同様の構成で $(n+1)$ 次元トーリック多様体 $\mathcal{X}_f$ と $\mathcal{X}_f$ 上の $\mathbf{G}_m \times T$ 線型化直線束 $\mathcal{L}_f$ が得られる. さらに, $\pi_f \colon \mathcal{X}_f \to \mathbf{A}^1_k$ が自然に定まり $(\mathcal{X}_f, \mathcal{L}_f)$ は (X, L) の指数 r の T 同変テスト配位となる.

定義 3.1. P の内点 x_0 を一つ選び固定する.

(1) P 上の区分的有理アファイン凸関数全体の集合を $\mathcal{C}^{\mathbf{Q}}_{PL}$ と表す.

(2) 各 $r \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して, $f \in \mathcal{C}^{\mathbf{Q}}_{PL}$ であって $r\mathcal{P}_f \subset M_{\mathbf{R}} \times \mathbf{R}$ が整凸多面的集合であるもの全体の集合を $\mathcal{C}^{\mathbf{Q}}_{PL,r}$ で表す.

また,

$$\widetilde{\mathcal{C}}^{\mathbf{Q}}_{PL} := \{f \in \mathcal{C}^{\mathbf{Q}}_{PL} \mid \inf_P f = f(x_0) = 0\},$$
$$\widetilde{\mathcal{C}}^{\mathbf{Q}}_{PL,r} := \{f \in \mathcal{C}^{\mathbf{Q}}_{PL,r} \mid \inf_P f = f(x_0) = 0\}$$

と定義する.

$\mathcal{C}_{PL}^{\mathbf{Q}}$ とは (X,L) の T 同変テスト配位全体の集合, $\mathcal{C}_{PL,r}^{\mathbf{Q}}$ は指数が r の T 同変テスト配位全体の集合に他ならない. また, 各 $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して

$$\mathcal{C}_{PL,r}^{\mathbf{Q}} \subset \mathcal{C}_{PL,mr}^{\mathbf{Q}}, \quad \mathcal{C}_{PL}^{\mathbf{Q}} = \bigcup_{r \in \mathbf{Z}_{>0}} \mathcal{C}_{PL,r}^{\mathbf{Q}}$$

が成り立つ.

命題 3.2. (X,L) を偏極トーリック多様体とし, P を (X,L) の運動量多面体とする. $r \in \mathbf{Z}_{>0}$, $f \in \mathcal{C}_{PL,r}^{\mathbf{Q}}$ とし, $(\mathcal{X}_f, \mathcal{L}_f)$ を f が定める指数 r の T 同変テスト配位とすると, 以下が成立する.

$$\begin{aligned} DF(\mathcal{X}_f, \mathcal{L}_f) &= DF(f) \\ &\coloneqq \frac{1}{\mathrm{vol}(P)} \left(\int_{\partial P} f(\zeta)\, d\sigma - \frac{\sigma(\partial P)}{\mathrm{vol}(P)} \int_P f(x)\, dx \right), \\ Chow_r(\mathcal{X}_f, \mathcal{L}_f) &= Chow_r(f) \\ &\coloneqq \frac{1}{E_P(r)} \sum_{a \in P \cap (M/r)} f(a) - \frac{1}{\mathrm{vol}(P)} \int_P f(x)\, dx. \end{aligned}$$

ただし E_P は P の Ehrhart 多項式であり, σ は ∂P 上の Borel 測度であって E_P の係数に

$$E_P(r) \coloneqq \#(rP \cap M) = \mathrm{vol}(P) r^n + \frac{\sigma(\partial P)}{2} r^{n-1} + \cdots + 1$$

として現れる標準的なものである.

命題 3.2 により偏極トーリック多様体の K 安定性と Chow 安定性は凸関数を用いて次のように言い換えることが可能となる.

命題 3.3. (X,L) を偏極トーリック多様体とし, P を (X,L) の運動量多面体とする. また $r \in \mathbf{Z}_{>0}$ とする.

(1) (X,L) が T 同変 K 半安定であることは任意の $f \in \mathcal{C}_{PL}^{\mathbf{Q}}$ に対して $DF(f) \geq 0$ であることと同値である.

(2) (X,L) が T 同変 K 準安定であることは, (X,L) が T 同変 K 半安定であってアファイン関数でない $f \in \mathcal{C}_{PL}^{\mathbf{Q}} \setminus \{0\}$ に対して $DF(f) > 0$ であることと同値である.

(3) (X,L) がレベル r で Chow 半安定であることは任意の $f \in \mathcal{C}_{PL,r}^{\mathbf{Q}}$ に対して $Chow_r(f) \geq 0$ であることと同値である.

(4) (X,L) がレベル r で Chow 準安定であることは, (X,L) がレベル r で Chow 半安定であってアファイン関数でない $f \in \mathcal{C}_{PL,r}^{\mathbf{Q}}$ に対して $Chow_r(f) > 0$ であることと同値である.

3.3　偏極トーリック多様体の K_* 安定性

我々は [11] で偏極トーリック多様体における T 同変 K 準安定性の条件を強めた K_* 準安定性を導入した．本節ではその定義を簡単に説明する．(X, L) を k 上の n 次元偏極トーリック多様体とする．P を (X, L) の運動量多面体とし, P の余次元 1 までの面の相対内部全ての和集合を P^* と表す．P の内点 x_0 を一つ選び固定する．

定義 3.4. P^* 上の連続な凸関数 f で

$$\int_{\partial P} |f(\zeta)|\, d\sigma < \infty$$

を満たすもの全体の集合を $\mathcal{C}_*$ と表す．また,

$$\widetilde{\mathcal{C}}_* := \{f \in \mathcal{C}_* \mid \inf_P f = f(x_0) = 0\}$$

と定義する．

直ちに分かるように $\mathcal{C}_*$ は $\mathcal{C}_{PL}^{\mathbf{Q}}$ を真に含む集合である．また, 各 $f \in \mathcal{C}_*$ に対して $DF(f)$ が意味を持つことに注意せよ．

定義 3.5. (X, L) を偏極トーリック多様体とし, P を (X, L) の運動量多面体とする．任意の $f \in \mathcal{C}_*$ に対して

$$DF(f) \geq 0$$

であって f がアファイン関数でないならば常に $DF(f) > 0$ が成り立つとき, (X, L) は K_* 準安定であるという．

直ちに分かるように偏極トーリック多様体の K_* 準安定性は T 同変 K 準安定性を導く．さらに, 偏極トーリック曲面に対してはその逆も成り立っている．

定理 3.6 ([6, Proposition 5.3.1, Proposition 6.1])**.** 偏極トーリック曲面が T 同変 K 準安定であることと K_* 準安定であることは同値である．

高次元で定理 3.6 の類似が成り立つかどうかは興味深い問題であるが, 今の所未解決である．

3.4　漸近展開

主定理の証明でポイントとなるのは [15] による漸近展開公式である．

命題 3.7 ([15, Lemma 3.3])**.** (X, L) を n 次元偏極トーリック多様体とし，P を (X, L) の運動量多面体とする．そのとき各 $f \in \mathcal{C}_{PL}^{\mathbf{Q}}$ に対して $c_0(f), \ldots, c_{n-2}(f) \in \mathbf{Q}$ で

$$\sum_{a \in P \cap (M/r)} f(a) = r^n \int_P f(x)\, dx + \frac{r^{n-1}}{2} \int_{\partial P} f(\zeta)\, d\sigma + \sum_{i=2}^{n} r^{n-i} c_{n-i}(f)$$

であるものが存在する．

今，(X, L) を偏極トーリック曲面とすると各 $f \in \mathcal{C}_{PL}^{\mathbf{Q}}$ に対して

$$\sum_{a \in P \cap (M/r)} f(a) = r^2 \int_P f(x)\, dx + \frac{r}{2} \int_{\partial P} f(\zeta)\, d\sigma + c_0(f)$$

と表せる．そこで [11, Proposition 5.1.2] を使うと以下を得る．これが主定理の証明において本質的である．

命題 3.8. (X, L) を偏極トーリック曲面とし，P を (X, L) の運動量多面体とする．そのとき $f \in \widetilde{\mathcal{C}}_{PL}^{\mathbf{Q}}$ で $\int_{\partial P} f(\zeta)\, d\sigma = 1$ であるものに対して f に依らない定数 $C > 0$ で

$$c_0(f) \geq -C$$

であるものが存在する．

4 証明の概略

本節では主定理の証明の概略を説明する．(X, L) を k 上の偏極トーリック曲面とする．P を (X, L) の運動量多面体とし，P の内点 x_0 を一つ選び固定する．(X, L) が (1.1) を満たし，さらに T 同変 K 準安定であるとする．そのとき定理 3.6 より (X, L) は K_* 準安定である．今，(X, L) が漸近的 Chow 準安定でないと仮定する．そのとき整数列 $(r_j)_{j \in \mathbf{Z}_{>0}}$ と $f_j \in \mathcal{C}_{PL, r_j}^{\mathbf{Q}}$ $(j \in \mathbf{Z}_{>0})$ で次の 5 つの条件を満たすものが存在する．

(i) $r_j \to \infty$ (as $j \to \infty$).

(ii) 各 f_j はアファイン関数ではない．

(iii) 各 $j \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して $Chow_{r_j}(f_j) \leq 0$.

(iv) 各 $j \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して $f_j \in \widetilde{\mathcal{C}}_{PL, r_j}^{\mathbf{Q}}$.

(v) 各 $j \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して $\int_{\partial P} f_j(\zeta)\, d\sigma = 1$.

さらに, [11, Proposition 5.2.3] により必要なら $(f_j)_{j\in\mathbf{Z}_{>0}}$ を適当な部分列と取り換えて $f_\infty \in \widetilde{\mathcal{C}}_*$ で $\|f_j - f_\infty\|_{L^1(P)} \to 0$ (as $j \to \infty$) であるものが存在すると仮定してもよい. そこで命題 3.8 を使うと各 $j \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して

$$\begin{aligned} 0 &\geq r_j Chow_{r_j}(f_j) \\ &\geq \frac{r_j^2}{2E_P(r_j)} DF(f_j) - \frac{r_j}{\mathrm{vol}(P)E_P(r_j)} \int_P f_j(x)\,dx - \frac{r_j}{E_P(r_j)} C \end{aligned}$$

となることが分かる. 従って, $j \to \infty$ とすると Fatou の補題より

$$0 \geq DF(f_\infty)$$

を得る. ここで (X, L) の K_* 準安定性より f_∞ はアファイン関数であるが, $f_\infty \in \widetilde{\mathcal{C}}_*$ であるので $f_\infty = 0$ となる. 一方, 条件 (v) より各 $j \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{r_j^2}{2E_P(r_j)} &= \frac{r_j^2}{2E_P(r_j)} \int_{\partial P} f_j(\zeta)\,d\sigma \\ &\leq \left(\frac{r_j^2 \sigma(\partial P) + 2r_j}{2\,\mathrm{vol}(P)E_P(r_j)}\right) \int_P f_j(x)\,dx + \frac{r_j}{E_P(r_j)} C \end{aligned}$$

であるので $j \to \infty$ とすると

$$\frac{1}{2\mathrm{vol}(P)} \leq 0$$

となり矛盾する. よって (X, L) は漸近的 Chow 準安定である.

参考文献

[1] S. Boucksom, T. Hisamoto and M. Jonsson, Uniform K-stability, Duistermaat Heckman measures and singularity of pairs. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **67** (2017) 743–841.

[2] M. Brion, Sur l'image de l'application moment. *Séminaire d'algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin* (Paris, 1986), 177–192, Lecture Notes in Math., 1296, Springer, Berlin, 1987.

[3] D. A. Cox, J. B. Little and H. K. Schenck, *Toric varieties*. Graduate Studies in Mathematics **124**. *American Mathematical Society, Providence, RI*, (2011). xxiv+841 pp.

[4] T. Delcroix, Uniform K-stability of polarized spherical varieties. arXiv:2009.06463v2.

[5] S. K. Donaldson, Scalar curvature and projective embeddings. I. *J. Differential Geom.* **59** (2001) 479–522.

[6] S. K. Donaldson, Scalar curvature and stability of toric varieties. *J. Differential Geom.* **62** (2002) 289–349.

[7] G. R. Kempf, Instability in invariant theory. *Ann. of Math.* (2) **108** (1978) no. 2, 299–316.

[8] Y. Li and Z. Li, Equivariant $\mathbb{R}$-test configurations of polarized spherical varieties. arXiv:2206.04880v2.

[9] T. Mabuchi, An energy-theoretic approach to the Hitchin-Kobayashi correspondence for manifolds, I. *Invent. math.* **159** (2005) 225–243.

[10] D. Mumford, Stability of projective varieties. *Enseign. Math.* (2) **23** (1977) no. 1–2, 39–110.

[11] Y. Nitta and S. Saito, A uniform version of the Yau-Tian-Donaldson correspondence for extremal Kähler metrics on polarized toric manifolds. arXiv:2110.10386.

[12] Y. Nitta and S. Saito, Asymptotic Chow-stability of polarized toric surfaces, in preparation.

[13] H. Ono, Y. Sano and N. Yotsutani, An example of asymptotically Chow unstable manifolds with constant scalar curvature. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **62** (2012) 1265–1287.

[14] J. Ross and R. Thomas, A study of the Hilbert-Mumford criterion for the stability of projective varieties. *J. Algebraic Geom.* **16** (2007) no. 2, 201–255.

[15] B. Zhou and X. H. Zhu, Relative K-stability and modified K-energy on toric manifolds. *Adv. Math.* **219** (2008), 1327–1362.