Topological spherical space form の位相的複雑さ

— Python を用いた決定 —

九州大学·数理学研究院 岩瀬則夫

Norio IWASE

Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 位相的球空間形

1.1 位相的球空間形

- G — 球面 S^n に作用する有限群

定義 1.1 (位相的球空間形). $M = S^n/G$：G の球面 S^n への作用は自由かつ連続

- $\mathbb{H}$ — 四元数体
- $S(\mathbb{H}) \approx S^3$ — ノルム 1 の四元数全体のなす Lie 群
- S^{2h+3} — $\mathbb{H}^{h+1}$ の単位球面，$S(\mathbb{H})$ の左からの（等長的な）作用を受ける。
- $H_k = \langle a, b \mid a^2 = b^k,\ a^4 = 1,\ \bar{a}ba = \bar{b} \rangle < S(\mathbb{H})$（$k = 2, 3, 4, \ldots$）— 一般四元数群
- $H_2 \cong Q = \langle \mathbb{i}, \mathbb{j}, \mathbb{k} \mid \mathbb{i}^2 = \mathbb{j}^2 = \mathbb{k}^2 = \mathbb{i}\mathbb{j}\mathbb{k} \rangle = \{\pm 1, \pm\mathbb{i}, \pm\mathbb{j}, \pm\mathbb{k}\} \subset \mathbb{H}$ — 四元数群

定義 1.2. $N_h(k) := S^{4h+3}/H_k$ と置く。特に $N_h := S^{4h+3}/Q_8$，$M := N_0$ と略記する。

2 — ロボット動作設計

2.1 位相的複雑さ

- X — ロボットの状態空間（以下、X は連結を仮定する）
- $\mathcal{P}X$ — X の中に描かれた道（ロボット動作）全体 — $\mathcal{P}X \supset \mathcal{L}X \supset \Omega X$
- $\varpi : \mathcal{P}X \to X \times X \iff \varpi(\ell) = (\ell(1), \ell(0))$（動作の終着状態と出発状態）
- $\pi : P \to W$ —（全射）連続写像

Notation 2.1 (ここだけ). $O \subset W$ が π-sectional $\iff$ π は O 上の section を持つ。

Definition 2.2 (A. S. Švarc, '58).
$\mathrm{genus}(\pi) \le n \iff \pi$-sectional 開集合 $n{+}1$ 枚が W を覆う。

Definition 2.3. $\mathrm{tc}(X) := \mathrm{genus}(\varpi)$（位相的複雑さ）

- 開集合 O 上での section は、局所的な動作設計を与える。
- 気持ちの上では $\mathrm{tc}(X)$ はロボット動作設計の複雑さみたいなものを表す。

Theorem 2.4 (M. Farber '03).
$$\mathrm{tc}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = \mathrm{Imm}\,\mathbb{R}\mathrm{P}^n - \delta_n, \quad \delta_n = \begin{cases} 1, & n = 1, 3, 7 \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$
ただし、$\mathrm{Imm}\,M$ は多様体 M が Euclid 空間 E^n にはめ込める次元 n の最小数である。

2.2 ＬＳカテゴリ数

- $\mathcal{P}_0X = \varpi^{-1}(X \times \{*\})$ — X の基点「$*$」から出発する道（ロボット動作）全体
- $\varpi_0 : \mathcal{P}_0X \to X \iff \varpi_0(\ell) = \ell(1)$（終着状態）$\overset{\text{だいたい}}{\iff}$ $\varpi_0 = \varpi|_{\mathcal{P}_0X}$

Exercise 2.5. $U \subset X$ が ϖ_0-categorical $\iff$ 包含写像 $U \hookrightarrow X$ が零ホモトープ

Definition 2.6 (Lusternik-Schnirelamann '34).
$\mathrm{cat}(X) \le m \iff m{+}1$ 枚の categorical 開集合が X 全体を覆う。

Theorem 2.7 (Farber, '03).
$\mathrm{cat}(X) \le \mathrm{tc}(X) \le \mathrm{cat}(X \times X) \le 2\,\mathrm{cat}(X)$ — L-S カテゴリ数とＴＣ

Example 2.8. (1) $\mathrm{cat}(X) = 0 \iff X$ は可縮　(2) $\mathrm{tc}(X) = 0 \iff X$ は可縮
(3) $\mathrm{cat}(X) \le 1 \iff X$ は co-H-空間　(4) $\mathrm{cat}(S^n) = 1$　(5) $\mathrm{tc}(S^n) = 1 \iff n$ は奇数

Theorem 2.9 (Miyata). $\mathrm{cat}(N_h) = \dim N_h = 4h{+}3$

3 一般的結果

Definition 3.1 (Farber-Grant '07). $\mathrm{tc}^{\mathcal{S}}(X) \le m \iff$ ロボット動作を『出発と終着を入れ替えると逆の道で、一致していたら動かない』ものに限定した位相的複雑さ。

Definition 3.2 (Farber '03, Farber-Grant '08).
(1) $\mathcal{I}_{\mathrm{X}}(R) = \ker \Delta^* : H^*(X \times X; R) \to H^*(X; R)$（注：$\overline{H}^*$ を使っても同じです）

(2) $\mathcal{Z}_{\mathrm{R}}(X) = \mathrm{Max}\{m{\geq}0 | H^*(X \times X, R) \supset \mathcal{I}_{\mathrm{X}}(R)^m \neq 0\}$

(3) $\mathrm{wgt}_{\mathrm{u;R}}(\varpi) = \mathrm{Max}\{m{\geq}0 | \forall f : Y \to X \times X\ (\mathrm{genus}(f^*\varpi){<}m),\ f^*(u) = 0\}$

Theorem 3.3 (Farber-Grant '08). $\mathrm{wgt}_{\mathrm{u;R}}(\varpi) \leq \mathrm{tc}(X)$ for a non-zero $u \in \mathcal{I}_{\mathrm{R}}(X)$.

Theorem 3.4 (Y. Rudyak, A. Dranishnikov '09). If $\mathrm{cat}(X) = \dim X = n \geq 3$, then $\exists\, \mathfrak{b} \in H^1(X, I(\pi))$ s.t. $\mathfrak{b}^n \neq 0$, where $\mathfrak{b}$ is the Berstein class introduced by I. Berstein.

上記を用いて Farber らが $\mathrm{tc}(BG)$（$\mathrm{cd}(G) < \infty$）に対する目覚ましい結果を得ている。

4 fibrewise A_∞ 理論

4.1 (fibrewise) A_∞ 理論

- X — 位相空間

Theorem 4.1 (J. Milnor '56). 分類空間が X と弱同値となる位相群 G が存在する。

Theorem 4.2 (J. Stasheff '63). ΩX の A_∞ 構造 $P^\infty \Omega X$ は X と弱同値となる。

Theorem 4.3 (D. Benson '91). $EG{\times}_G BG$ が基点付き fibrewise 空間として $BG{\times}BG$ とホモトピー同値となる。ただし、$EG{\times}_G BG$ の基点は $[e] \mapsto [e, *]$ で与えられ、$BG{\times}BG$ の基点は diagonal map である。

- G — 離散群

Theorem 4.4. $\mathcal{L}BG$ は $EG{\times}_{\mathrm{ad}} G$ と fibrewise A_∞ 同値で、特に $P^n_B \mathcal{L}BG \simeq^B_B EG{\times}_{\mathrm{ad}} P^n G$

略証: ホモトピー同値（fibrewise A_1 同値）はすぐに分かる。また fibrewise A_n 同値となる為の障害は行き先が離散群であるので自明である。(上の (Benson) を使うともう少し一般的に証明できる (Miyata)） 終り.

4.2 fibrewise L-S 理論と位相的複雑さ

- $E = (E, p, X, s)$ — 写像 $s : X \to E$ は、射影 $p : E \to X$ に対する section である。

Definition 4.5. **(I. James '95)** $\mathrm{cat}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}}(E) \leq m \iff \exists \sigma : E \to P^m_B \Omega_B E$ s.t. $\sigma \circ e_m \simeq^B_B \mathrm{id}$

(I-Sakai '10) $\mathrm{cat}_{\mathrm{B}}(E) \leq m \iff \exists \sigma : E \to P^m_B \Omega_B E$ s.t. $\sigma \circ e_m \simeq_B \mathrm{id}$

$\Delta : X \to X \times X$ を基点とする fibrewise 空間 $(X \times X, \mathrm{pr}_1, X)$ を $\mathrm{d}(X)$ で表す。

Theorem 4.6 (I-S '10). (1) $\mathrm{tc}(X) = \mathrm{cat}_{\mathrm{B}}(\mathrm{d}(X))$ (2) $\mathrm{tc}^{\mathcal{M}}(X) = \mathrm{cat}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{B}}(\mathrm{d}(X))$

注 4.1 *$\mathrm{tc}^{\mathcal{M}}(X)$ は $\mathrm{tc}(X)$ と同様に定義されるが、ロボットの動作設計に対して「出発状態と終着状態が同じ場合は動かない」という条件（monoidal condition）を課している。*

Corollary 4.7 (I-S '10). 次の二条件は同値である。

(1) $\mathrm{tc}(X) \leq m$　(2) $\sigma \circ e_m \simeq_B \mathrm{id}$ を満たす $\sigma : \mathrm{d}(X) \to P^m_B \mathcal{L} X$ がある。

Theorem 4.8 (I-S '12). $\mathrm{tc}(X) \leq \mathrm{tc}^{\mathcal{M}}(X) \leq \mathrm{tc}(X)+1$.

Theorem 4.9 (J. Aguilar Gutmán and J. González, '21).

X が ANR ならば $\mathrm{tc}(X) = \mathrm{tc}^{\mathcal{M}}(X)$ が成立する。

4.3　fibrewise L-S 不変量と TC 不変量

- $E = (E, p, X)$ — fibrewise 空間、　$s : X \to E$ — E の fibrewise 基点
- R — 可換環、　Λ — コホモロジー作用素の集合
- $e_m : P^m_B \Omega_B E \hookrightarrow P^\infty_B \Omega_B E \simeq^B_B E$ — natural map

Definition 4.10 (James '95, I-S 10'). (1) $H^*_B(E;R) := H^*(E,X;R)$.

(2) $\mathrm{cup_B}(E;R) := \mathrm{Max}\{m \geq 0 | H^*(E;R) \supset H^*_B(E;R)^m \neq 0\}$.

(3) $\mathrm{wgt_B}(u;R) := \mathrm{Max}\{m \geq 0 | e^*_{m-1}(u) = 0\}$.

(4) $\mathrm{wgt_B}(E;R) := \mathrm{Min}\{m \geq 0 | e^*_m : H^*_B(E;R) \to H^*_B(P^m_B \Omega_B E;R) \text{ is mono}\}$.

(5) $\mathrm{Mwgt_B}(E;\Lambda) := \mathrm{Min}\{m \geq 0 | \mathrm{im}\, e^*_m \text{ is a direct summand as a } \Lambda\text{-module}\}$

Theorem 4.11 (I-S '10).

(1) $H^*_B(E;R) = \mathcal{I}_{\mathrm{R}}(X)$ and $\mathrm{cup_B}(E;R) = \mathcal{Z}_{\mathrm{R}}(X)$ if $(E, p, X) = \mathrm{d}(X)$.

(2) $\mathrm{wgt_B}(u;R) = \mathrm{wgt}_{\varpi}(u;R)$ if $(E, p, X) = \mathrm{d}(X)$.

5　今回の主題 (I-Miyata)

- $M = S^n/G$, G は有限群 — 位相的球空間形（ここでは G は向きを保つとする）

Remark 5.1. 通常 $2n-1 \leq \mathrm{tc}(M) = \mathrm{cat_B}(\mathrm{d}(M)) \leq 2n$ しか（簡単には）分からない。

Theorem 5.2. z を M の orientation class に対応する $H^n(M;\mathbb{F}_2)$ の生成元とする。

(1) 次の三条件は同値である。

i) $\mathrm{wgt_B}(z \otimes z;\mathbb{F}_2) = 2n$　ii) $\mathrm{wgt_B}(\mathrm{d}(M);\mathbb{F}_2) = 2n$　iii) $\mathrm{Mwgt_B}(\mathrm{d}(M);\mathcal{A}_2) = 2n$

(2) 上のどれかの条件が成立すれば $\mathrm{tc}(M) = \mathrm{cat_B}(\mathrm{d}(M)) = 2n$ である。（逆はいまのところできていない）

- $M = S^3/Q$ — 四元数群 $Q = \{\pm 1, \pm\mathbb{i}, \pm\mathbb{j}, \pm\mathbb{k}\}$ による S^3 の商空間

注 5.1 M についてすぐに分かるのは $5 \leq \mathrm{tc}(M) = \mathrm{cat_B}(\mathrm{d}(M)) \leq 6$ までである。

Theorem 5.3. $\mathrm{tc}(M) = \mathrm{cat_B}(\mathrm{d}(M)) = 6$.

6　証明の方針

6.1　線形問題への落とし込み

Theorem 6.1. $H^*(BQ;\mathbb{F}_2) \cong A \otimes \mathbb{F}_2[w],\ A \cong \mathbb{F}_2[x,y]/(x^3, y^3, x^2+y^2+xy)$

Theorem 6.2. $H^3(M;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2\{z\}$、$z$ は A の $x^2y = xy^2$ に対応する。

Theorem 6.3 (K. Fujii '73). $M = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^2_1 \cup e^2_2 \cup e^3$（$z$ は e^3 の双対）である。

Proposition 6.4. $H^6(M \times M;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2\{z \otimes z\}$

Proposition 6.5. $e^*_\infty(z \otimes z) \in H^\infty(P^\infty_B\,\Omega_B\,\mathrm{d}(M);\mathbb{F}_2)$ is the class of $c \in Z^6(P^\infty_B\,\Omega_B\,\mathrm{d}(M))$：

$$c[\tau|\{h_1|\cdots|h_k\}] = z(\tau)\cdot x^2y[h_1|\cdots|h_k]$$

Theorem 6.6. $e^*_\infty(z \otimes z) = [c]$

注 6.1 *上の定理は fibrewise ホモトピー同値写像* $e_\infty : P^\infty_B\,\Omega_B\,\mathrm{d}(M) \to \mathrm{d}(M)$ *の様子がよく分からないので Serre spectral sequece を用いて証明する。*

線形写像 $\delta : C^5(P^5_B\,\Omega_B\,\mathrm{d}(M);\mathbb{F}_2) \to C^6(P^5_B\,\Omega_B\,\mathrm{d}(M);\mathbb{F}_2)$ の表現行列を T_δ、c の表現ベクトルを T_c とする。

Problem 6.7. 線形方程式 $T_\delta\mathbb{x} = T_c$ は $\mathbb{F}_2$ 上で解を持つか？また解はどう書けるか？

6.2　問題の簡易化

Definition 6.8. $C^\infty(P^\infty_B\,\Omega_B\,\mathrm{d}(M))$ のコサイクル c' を次で定める。

$$c'[\tau|\{h_1|\cdots|h_k\}] = z(\tau)\cdot x^2[h_1|\cdots|h_k]$$

線形写像 $\delta' : C^4(P^4_B\,\Omega_B\,\mathrm{d}(M);\mathbb{F}_2) \to C^5(P^4_B\,\Omega_B\,\mathrm{d}(M);\mathbb{F}_2)$ の表現行列を $T_{\delta'}$、c' の表現ベクトルを $T_{c'}$ とする。

Theorem 6.9. 線形方程式 $T_{\delta'}\mathbb{x} = T_{c'}$ が解を持つならば $T_\delta\mathbb{x} = T_c$ も解を持つ。

Theorem 6.10 (Python program). $T_{\delta'}\mathbb{x} = T_{c'}$ は解を持つ。（$e^*_4(z \otimes x^2) = 0$ に相当）

注 6.2 *簡易化した問題は大型計算機で 7 分程度の時間がかかった為、Python program を最適化した。この program を用いると、簡易化した問題が M1 mac 上で 25 秒で解決し、元の問題も半日程度で解決した。いずれも期待どおりの結果であった。*[1]

結論. Python を動かす場合、M1 mac は大型計算機より速い。

最後に. 本研究で作成した Python program の最適化において、九州大学情報基盤研究センターの南里豪志先生に貴重なアドバイスを多々頂きました。深く感謝致します。

[1] The computation was carried out using the computer resource offered under the category of Trial Use Projects by Research Institute for Information Technology, Kyushu University.

7　プログラムの流れ

- 射影空間の次数を定める。
- 群 Q の multiplication と inversion の table を記述する。
- K. Fujii によって完全に決定された $e^0, e^1_1, e^1_2, e^2_1, e^2_2, e^3$ の境界を記述する。
- 定義に従って bar construction の境界を記述する。
- δ' の $\mathbb{F}_2$ 上の表現行列を二次元配列として記述する。
- 拡大係数行列 $[T_{\delta'}|T_{c'}]$ の階数 R と $T_{\delta'}$ の階数 r をガウスの消去法で求める。

— $R = r$ ならば解があり、$R = r+1$ ならば解が無い —

$T_{\delta'}\mathbb{x} = T_{c'}$ が解を持つから定理 6.9 より $T_{\delta}\mathbb{x} = T_c$ も解を持ち、$\mathrm{wgt_B}(z \otimes z) = 6$ を得た。

A　解の記述

Python program では、群 Q の要素を $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] = [e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b]$ と数字で記述し、M のセルを $[e0, e11, e12, e21, e22, e3] = [e^0, e^1_1, e^1_2, e^2_1, e^2_2, e^3]$ と記述した。program は正常終了し、次の特殊解を吐き出した：（手計算するのはほぼ無理か）

One particular solution is :

$[e0|7|7|7|6] + [e0|7|7|6|6] + [e0|7|7|6|2] + [e0|7|7|2|5] + [e0|7|7|2|1] + [e0|7|7|5|3] +$
$[e0|7|7|5|6] + [e0|7|7|5|5] + [e0|7|7|5|1] + [e0|7|7|1|3] + [e0|7|7|1|2] + [e0|7|3|6|5] +$
$[e0|7|3|6|1] + [e0|7|3|5|3] + [e0|7|3|1|5] + [e0|7|6|7|5] + [e0|7|6|7|1] + [e0|7|6|3|3] +$
$[e0|7|6|3|2] + [e0|7|6|3|5] + [e0|7|6|3|1] + [e0|7|6|6|2] + [e0|7|6|6|1] + [e0|7|6|2|7] +$
$[e0|7|6|2|3] + [e0|7|6|2|6] + [e0|7|6|2|2] + [e0|7|6|2|1] + [e0|7|6|2|4] + [e0|7|6|5|3] +$
$[e0|7|6|5|4] + [e0|7|6|1|7] + [e0|7|6|1|3] + [e0|7|6|1|2] + [e0|7|6|1|4] + [e0|7|2|7|6] +$
$[e0|7|2|3|7] + [e0|7|2|3|2] + [e0|7|2|3|4] + [e0|7|2|6|6] + [e0|7|2|6|2] + [e0|7|2|2|6] +$
$[e0|7|2|2|2] + [e0|7|2|2|5] + [e0|7|2|2|4] + [e0|7|2|5|2] + [e0|7|2|5|5] + [e0|7|2|5|1] +$
$[e0|7|2|1|7] + [e0|7|2|1|3] + [e0|7|2|1|6] + [e0|7|2|1|4] + [e0|7|2|4|2] + [e0|7|5|7|6] +$
$[e0|7|5|3|7] + [e0|7|5|3|2] + [e0|7|5|3|4] + [e0|7|5|6|3] + [e0|7|5|6|6] + [e0|7|5|6|2] +$
$[e0|7|5|6|5] + [e0|7|5|2|2] + [e0|7|5|2|4] + [e0|7|5|5|3] + [e0|7|5|5|6] + [e0|7|5|5|2] +$
$[e0|7|5|5|1] + [e0|7|5|1|3] + [e0|7|5|1|4] + [e0|7|5|4|2] + [e0|7|1|7|3] + [e0|7|1|7|2] +$
$[e0|7|1|7|5] + [e0|7|1|3|3] + [e0|7|1|3|5] + [e0|7|1|6|3] + [e0|7|1|2|3] + [e0|7|1|2|6] +$
$[e0|7|1|2|2] + [e0|7|1|2|4] + [e0|7|1|5|2] + [e0|7|1|5|5] + [e0|7|1|5|4] + [e0|7|1|1|3] +$
$[e0|7|1|1|4] + [e0|7|1|4|3] + [e0|7|1|4|2] + [e0|7|1|4|5] + [e0|7|4|7|1] + [e0|7|4|3|7] +$
$[e0|7|4|3|6] + [e0|7|4|6|7] + [e0|7|4|6|3] + [e0|7|4|6|6] + [e0|7|4|2|2] + [e0|7|4|2|4] +$
$[e0|7|4|5|2] + [e0|7|4|5|4] + [e0|7|4|1|2] + [e0|7|4|4|2] + [e0|3|7|7|3] + [e0|3|7|7|2] +$
$[e0|3|7|7|5] + [e0|3|7|7|1] + [e0|3|7|3|7] + [e0|3|7|3|3] + [e0|3|7|3|6] + [e0|3|7|3|5] +$
$[e0|3|7|3|4] + [e0|3|7|6|5] + [e0|3|7|6|1] + [e0|3|7|2|3] + [e0|3|7|2|5] + [e0|3|7|5|7] +$
$[e0|3|7|5|2] + [e0|3|7|5|5] + [e0|3|7|1|6] + [e0|3|7|1|4] + [e0|3|7|4|5] + [e0|3|7|4|1] +$
$[e0|3|3|6|7] + [e0|3|3|2|1] + [e0|3|3|5|7] + [e0|3|3|5|3] + [e0|3|3|5|5] + [e0|3|3|1|6] +$
$[e0|3|3|1|1] + [e0|3|6|7|3] + [e0|3|6|7|6] + [e0|3|6|7|2] + [e0|3|6|7|5] + [e0|3|6|3|7] +$
$[e0|3|6|3|3] + [e0|3|6|3|6] + [e0|3|6|3|5] + [e0|3|6|3|4] + [e0|3|6|6|3] + [e0|3|6|6|6] +$
$[e0|3|6|6|1] + [e0|3|6|6|4] + [e0|3|6|2|7] + [e0|3|6|2|3] + [e0|3|6|2|5] + [e0|3|6|2|1] +$
$[e0|3|6|5|3] + [e0|3|6|5|5] + [e0|3|6|5|1] + [e0|3|6|1|7] + [e0|3|6|1|2] + [e0|3|6|1|5] +$
$[e0|3|6|1|4] + [e0|3|6|4|7] + [e0|3|6|4|5] + [e0|3|2|7|1] + [e0|3|2|3|7] + [e0|3|2|3|6] +$
$[e0|3|2|6|6] + [e0|3|2|6|2] + [e0|3|2|6|5] + [e0|3|2|6|4] + [e0|3|2|2|2] + [e0|3|2|2|5] +$

[*e*0|3|2|2|1] + [*e*0|3|2|2|4] + [*e*0|3|2|5|7] + [*e*0|3|2|5|3] + [*e*0|3|2|5|6] + [*e*0|3|2|5|2] +
[*e*0|3|2|5|5] + [*e*0|3|2|5|1] + [*e*0|3|2|1|2] + [*e*0|3|2|1|1] + [*e*0|3|2|4|2] + [*e*0|3|5|7|7] +
[*e*0|3|5|7|6] + [*e*0|3|5|7|1] + [*e*0|3|5|3|3] + [*e*0|3|5|3|6] + [*e*0|3|5|3|5] + [*e*0|3|5|3|4] +
[*e*0|3|5|6|6] + [*e*0|3|5|6|5]+ [*e*0|3|5|6|1] + [*e*0|3|5|2|7] + [*e*0|3|5|2|2] + [*e*0|3|5|2|5] +
[*e*0|3|5|2|4] + [*e*0|3|5|5|5] + [*e*0|3|5|5|4] + [*e*0|3|5|1|5] + [*e*0|3|5|4|2] + [*e*0|3|5|4|5] +
[*e*0|3|5|4|1] + [*e*0|3|1|7|1] + [*e*0|3|1|3|7] + [*e*0|3|1|3|6] + [*e*0|3|1|3|5] + [*e*0|3|1|6|3] +
[*e*0|3|1|6|6] + [*e*0|3|1|6|5] + [*e*0|3|1|2|6] + [*e*0|3|1|2|2] + [*e*0|3|1|2|4] + [*e*0|3|1|5|7] +
[*e*0|3|1|5|6] + [*e*0|3|1|5|4] + [*e*0|3|1|1|2] + [*e*0|3|1|4|2] + [*e*0|3|4|6|5] + [*e*0|3|4|6|1] +
[*e*0|3|4|5|3] + [*e*0|3|4|1|5] + [*e*0|6|7|7|3] + [*e*0|6|7|3|3] + [*e*0|6|7|3|6] + [*e*0|6|7|3|2] +
[*e*0|6|7|5|3] + [*e*0|6|7|5|2] + [*e*0|6|7|5|4] + [*e*0|6|7|1|5] + [*e*0|6|7|4|3] + [*e*0|6|7|4|5] +
[*e*0|6|3|7|2] + [*e*0|6|3|7|5] + [*e*0|6|3|7|1] + [*e*0|6|3|3|2] + [*e*0|6|3|3|5] + [*e*0|6|3|3|1] +
[*e*0|6|3|6|3] + [*e*0|6|3|6|5] + [*e*0|6|3|6|1] + [*e*0|6|3|6|4] + [*e*0|6|3|2|3] + [*e*0|6|3|2|2] +
[*e*0|6|3|2|1] + [*e*0|6|3|5|7] + [*e*0|6|3|5|6] + [*e*0|6|3|5|2] + [*e*0|6|3|1|2] + [*e*0|6|3|1|5] +
[*e*0|6|3|1|4] + [*e*0|6|3|4|7] + [*e*0|6|3|4|3] + [*e*0|6|3|4|2] + [*e*0|6|3|4|1] + [*e*0|6|3|4|4] +
[*e*0|6|6|7|5] + [*e*0|6|6|3|7] + [*e*0|6|6|3|4] + [*e*0|6|6|2|5] + [*e*0|6|6|2|4] + [*e*0|6|6|5|3] +
[*e*0|6|6|5|6] + [*e*0|6|6|5|1] + [*e*0|6|6|1|3] + [*e*0|6|6|4|1] + [*e*0|6|6|4|4] + [*e*0|6|2|7|7] +
[*e*0|6|2|7|2] + [*e*0|6|2|6|7] + [*e*0|6|2|6|1] + [*e*0|6|2|2|7] + [*e*0|6|2|2|2] + [*e*0|6|2|2|4] +
[*e*0|6|2|5|7] + [*e*0|6|2|5|6] + [*e*0|6|2|5|2] + [*e*0|6|2|1|7] + [*e*0|6|2|1|3] + [*e*0|6|2|1|6] +
[*e*0|6|2|1|2] + [*e*0|6|2|1|5] + [*e*0|6|2|1|1] + [*e*0|6|2|4|7] + [*e*0|6|2|4|2] + [*e*0|6|2|4|1] +
[*e*0|6|2|4|4] + [*e*0|6|5|7|3] + [*e*0|6|5|7|2] + [*e*0|6|5|7|5]+ [*e*0|6|5|7|1] + [*e*0|6|5|3|3] +
[*e*0|6|5|3|6] + [*e*0|6|5|3|2] + [*e*0|6|5|3|5] + [*e*0|6|5|3|1] + [*e*0|6|5|6|7] + [*e*0|6|5|6|6] +
[*e*0|6|5|6|5] + [*e*0|6|5|6|4] + [*e*0|6|5|2|6] + [*e*0|6|5|2|2] + [*e*0|6|5|2|5] + [*e*0|6|5|5|7] +
[*e*0|6|5|5|3] + [*e*0|6|5|5|6] + [*e*0|6|5|5|2] + [*e*0|6|5|5|5] + [*e*0|6|5|5|4] + [*e*0|6|5|1|2] +
[*e*0|6|5|1|1] + [*e*0|6|5|1|4] + [*e*0|6|5|4|6] + [*e*0|6|5|4|2] + [*e*0|6|5|4|5] + [*e*0|6|1|7|3] +
[*e*0|6|1|7|2] + [*e*0|6|1|3|6] + [*e*0|6|1|3|5] + [*e*0|6|1|6|3] + [*e*0|6|1|6|6] + [*e*0|6|1|6|2] +
[*e*0|6|1|6|1] + [*e*0|6|1|2|7] + [*e*0|6|1|2|2] + [*e*0|6|1|2|5] + [*e*0|6|1|2|1] + [*e*0|6|1|5|7] +
[*e*0|6|1|5|2] + [*e*0|6|1|5|5] + [*e*0|6|1|5|4] + [*e*0|6|1|4|6] + [*e*0|6|1|4|5] + [*e*0|6|4|7|7] +
[*e*0|6|4|7|2] + [*e*0|6|4|7|5] + [*e*0|6|4|3|3] + [*e*0|6|4|3|2] + [*e*0|6|4|6|7] + [*e*0|6|4|6|3] +
[*e*0|6|4|6|1] + [*e*0|6|4|2|7] + [*e*0|6|4|2|3] + [*e*0|6|4|2|2] + [*e*0|6|4|5|6] + [*e*0|6|4|5|1] +
[*e*0|6|4|1|7] + [*e*0|6|4|1|6] + [*e*0|6|4|1|2] + [*e*0|6|4|1|5] + [*e*0|6|4|1|1] + [*e*0|6|4|4|7] +
[*e*0|6|4|4|2] + [*e*0|6|4|4|5] + [*e*0|2|7|7|5] + [*e*0|2|7|3|7] + [*e*0|2|7|3|2] + [*e*0|2|7|3|4] +
[*e*0|2|7|6|7] + [*e*0|2|7|6|6] + [*e*0|2|7|6|2] + [*e*0|2|7|6|4] + [*e*0|2|7|2|3] + [*e*0|2|7|2|6] +
[*e*0|2|7|2|2] + [*e*0|2|7|2|5] + [*e*0|2|7|2|4] + [*e*0|2|7|5|3] + [*e*0|2|7|5|6] + [*e*0|2|7|5|2] +
[*e*0|2|7|5|1] + [*e*0|2|7|1|5] + [*e*0|2|7|1|4] + [*e*0|2|7|4|2] + [*e*0|2|7|4|5] + [*e*0|2|7|4|1] +
[*e*0|2|3|7|7] + [*e*0|2|3|7|3] + [*e*0|2|3|7|1] + [*e*0|2|3|3|7] + [*e*0|2|3|3|6] + [*e*0|2|3|3|1] +
[*e*0|2|3|6|3] + [*e*0|2|3|6|6] + [*e*0|2|3|6|2] + [*e*0|2|3|6|4] + [*e*0|2|3|2|6] + [*e*0|2|3|2|2] +
[*e*0|2|3|2|5] + [*e*0|2|3|2|1] + [*e*0|2|3|2|4] + [*e*0|2|3|5|3] + [*e*0|2|3|5|6] + [*e*0|2|3|5|2] +
[*e*0|2|3|5|1] + [*e*0|2|3|1|6] + [*e*0|2|3|1|2] + [*e*0|2|3|4|2] + [*e*0|2|6|7|7] + [*e*0|2|6|7|3] +
[*e*0|2|6|7|2] + [*e*0|2|6|7|5] + [*e*0|2|6|3|7] + [*e*0|2|6|3|5] + [*e*0|2|6|3|4] + [*e*0|2|6|6|7] +
[*e*0|2|6|6|5] + [*e*0|2|6|6|1] + [*e*0|2|6|6|4] + [*e*0|2|6|2|7] + [*e*0|2|6|2|2] + [*e*0|2|6|2|5] +
[*e*0|2|6|2|1] + [*e*0|2|6|2|4] + [*e*0|2|6|5|3] + [*e*0|2|6|5|2] + [*e*0|2|6|5|1] + [*e*0|2|6|5|4] +
[*e*0|2|6|1|7] + [*e*0|2|6|1|3] + [*e*0|2|6|1|2] + [*e*0|2|6|1|5] + [*e*0|2|6|4|7] + [*e*0|2|6|4|2] +
[*e*0|2|2|7|3] + [*e*0|2|2|7|6] + [*e*0|2|2|7|2] + [*e*0|2|2|7|5] + [*e*0|2|2|7|1] + [*e*0|2|2|7|4] +
[*e*0|2|2|3|6] + [*e*0|2|2|3|2] + [*e*0|2|2|3|5] + [*e*0|2|2|3|1] + [*e*0|2|2|6|3] + [*e*0|2|2|6|2] +
[*e*0|2|2|6|4] + [*e*0|2|2|2|7] + [*e*0|2|2|2|3] + [*e*0|2|2|2|6] + [*e*0|2|2|5|3] + [*e*0|2|2|5|6] +
[*e*0|2|2|4|7] + [*e*0|2|5|7|3] + [*e*0|2|5|7|6] + [*e*0|2|5|3|5] + [*e*0|2|5|3|1] + [*e*0|2|5|3|4] +
[*e*0|2|5|6|7] + [*e*0|2|5|6|3] + [*e*0|2|5|6|2] + [*e*0|2|5|6|1] + [*e*0|2|5|6|4] + [*e*0|2|5|2|6] +
[*e*0|2|5|5|6] + [*e*0|2|1|7|3] + [*e*0|2|1|7|6] + [*e*0|2|1|7|4] + [*e*0|2|1|3|7] + [*e*0|2|1|3|6] +
[*e*0|2|1|6|3] + [*e*0|2|1|6|2] + [*e*0|2|1|6|5] + [*e*0|2|1|6|1] + [*e*0|2|1|6|4] + [*e*0|2|1|2|6] +
[*e*0|2|1|1|7] + [*e*0|2|4|7|3] + [*e*0|2|4|7|2] + [*e*0|2|4|7|5] + [*e*0|2|4|7|1] + [*e*0|2|4|3|7] +
[*e*0|2|4|3|6] + [*e*0|2|4|3|4] + [*e*0|2|4|2|7] + [*e*0|5|7|7|3] + [*e*0|5|7|7|6] + [*e*0|5|7|3|7] +
[*e*0|5|7|3|1] + [*e*0|5|7|3|4] + [*e*0|5|7|6|3] + [*e*0|5|7|6|2] + [*e*0|5|7|6|5] + [*e*0|5|7|5|3] +
[*e*0|5|3|7|2] + [*e*0|5|3|7|5]+ [*e*0|5|3|7|1] + [*e*0|5|3|3|7] + [*e*0|5|3|3|6] + [*e*0|5|3|3|2] +

[e0|5|3|3|1] + [e0|5|3|6|6] + [e0|5|3|6|5] + [e0|5|3|2|7] + [e0|5|3|2|6] + [e0|5|3|1|4] +
[e0|5|3|4|3] + [e0|5|3|4|1] + [e0|5|6|7|7] + [e0|5|6|7|2] + [e0|5|6|7|5] + [e0|5|6|7|1] +
[e0|5|6|7|4] + [e0|5|6|3|6] + [e0|5|6|3|2] + [e0|5|6|3|5] + [e0|5|6|3|1] + [e0|5|6|6|7] +
[e0|5|6|6|2] + [e0|5|6|2|7] + [e0|5|6|2|3] + [e0|5|6|2|6] + [e0|5|6|2|2] + [e0|5|6|2|5] +
[e0|5|6|2|4] + [e0|5|6|5|2] + [e0|5|6|5|1] + [e0|5|6|1|3] + [e0|5|6|1|6] + [e0|5|6|1|2] +
[e0|5|6|1|5] + [e0|5|6|1|4] + [e0|5|6|4|7] + [e0|5|6|4|3] + [e0|5|2|7|3] + [e0|5|2|3|3] +
[e0|5|2|3|6] + [e0|5|2|3|5] + [e0|5|2|3|1] + [e0|5|2|3|4] + [e0|5|2|6|7] + [e0|5|2|6|3] +
[e0|5|2|6|2] + [e0|5|2|2|3] + [e0|5|2|2|6] + [e0|5|2|5|3] + [e0|5|5|7|3] + [e0|5|5|7|6] +
[e0|5|5|3|7] + [e0|5|5|3|3] + [e0|5|5|3|2] + [e0|5|5|3|1] + [e0|5|5|6|6] + [e0|5|5|6|2] +
[e0|5|5|6|5] + [e0|5|5|6|1] + [e0|5|5|5|6] + [e0|1|7|7|7] + [e0|1|7|7|2] + [e0|1|7|7|4] +
[e0|1|7|3|7] + [e0|1|7|6|7] + [e0|1|7|6|3] + [e0|1|7|6|5] + [e0|1|7|6|1] + [e0|1|7|2|7] +
[e0|1|7|2|5] + [e0|1|7|5|5] + [e0|1|7|1|7] + [e0|1|7|1|6] + [e0|1|7|1|2] + [e0|1|7|1|5] +
[e0|1|7|1|1] + [e0|1|7|4|7] + [e0|1|7|4|3] + [e0|1|3|7|6] + [e0|1|3|7|2] + [e0|1|3|7|5] +
[e0|1|3|7|1] + [e0|1|3|3|7] + [e0|1|3|6|3] + [e0|1|3|6|5] + [e0|1|3|2|6] + [e0|1|3|1|7] +
[e0|1|6|7|3] + [e0|1|6|7|5] + [e0|1|6|3|6] + [e0|1|6|3|2] + [e0|1|6|3|5] + [e0|1|6|6|3] +
[e0|1|6|6|5] + [e0|1|6|6|4] + [e0|1|6|2|3] + [e0|1|6|2|2]+ [e0|1|6|2|5] + [e0|1|6|2|4] +
[e0|1|6|1|2] + [e0|1|6|1|5] + [e0|1|6|1|4] + [e0|1|6|4|3] + [e0|1|6|4|2] + [e0|1|6|4|5] +
[e0|1|2|7|3] + [e0|1|2|7|6] + [e0|1|2|7|5] + [e0|1|2|7|1] + [e0|1|2|7|4] + [e0|1|2|6|3] +
[e0|1|2|6|2] + [e0|1|2|6|4] + [e0|1|1|7|5] + [e0|1|1|3|7] + [e0|1|1|3|6] + [e0|1|1|6|1] +
[e0|1|1|2|7] + [e0|4|7|2|3] + [e0|4|7|1|5] + [e0|4|7|1|1] + [e0|4|7|4|5] + [e0|4|3|7|6] +
[e0|4|3|7|5] + [e0|4|3|3|7] + [e0|4|3|3|2] + [e0|4|3|3|4] + [e0|4|3|6|7] + [e0|4|3|6|6] +
[e0|4|3|6|5] + [e0|4|3|6|1] + [e0|4|3|2|2] + [e0|4|3|2|5] + [e0|4|3|2|4] + [e0|4|3|5|3] +
[e0|4|3|5|2] + [e0|4|3|1|5] + [e0|4|3|4|2] + [e0|4|6|7|3] + [e0|4|6|7|1] + [e0|4|6|7|4] +
[e0|4|6|3|7] + [e0|4|6|3|3] + [e0|4|6|3|2] + [e0|4|6|3|5] + [e0|4|6|3|4] + [e0|4|6|6|7] +
[e0|4|6|2|7] + [e0|4|6|4|3] + [e0|4|2|7|2] + [e0|4|2|7|5] + [e0|4|2|7|1] + [e0|4|2|3|7] +
[e0|4|2|3|3] + [e0|4|2|3|6] + [e0|4|2|3|4] + [e0|4|2|6|7] + [e0|4|2|6|3] + [e0|4|2|2|3] +
[e0|4|4|3|3]+[e0|4|4|6|7]+[e0|4|4|6|3]+[e12|7|7|2]+[e11|7|7|5]+[e12|7|7|1]+[e12|7|3|7]+
[e11|7|3|3]+[e11|7|3|4]+[e11|7|6|7]+[e12|7|6|7]+[e12|7|6|3]+[e12|7|6|6]+[e11|7|6|2]+
[e12|7|6|5]+[e12|7|6|1]+[e11|7|6|4]+[e11|7|2|3]+[e11|7|2|6]+[e11|7|2|2]+[e12|7|2|2]+
[e11|7|2|5]+[e11|7|2|1]+[e12|7|2|4]+[e11|7|5|3]+[e12|7|5|3]+[e12|7|5|6]+[e11|7|5|2]+
[e11|7|1|7]+[e12|7|1|2]+[e12|7|1|5]+[e12|7|1|4]+[e11|7|4|3]+[e11|7|4|2]+[e12|7|4|2]+
[e11|7|4|1]+[e11|7|4|4]+[e11|3|7|7]+[e11|3|7|3]+[e11|3|7|6]+[e11|3|7|2]+[e12|3|7|2]+
[e12|3|7|1]+[e11|3|7|4]+[e12|3|7|4]+[e11|3|3|7]+[e12|3|3|7]+[e11|3|3|2]+[e12|3|3|2]+
[e11|3|3|1]+[e12|3|6|7]+[e12|3|6|3]+[e12|3|6|6]+[e12|3|6|5]+[e12|3|6|1]+[e11|3|2|7]+
[e11|3|2|6]+[e12|3|2|2]+[e11|3|2|5]+[e11|3|2|1]+[e11|3|2|4]+[e12|3|2|4]+[e11|3|5|7]+
[e12|3|5|3]+[e11|3|5|1]+[e11|3|1|7]+[e11|3|1|6]+[e12|3|1|6]+[e11|3|1|2]+[e11|3|1|5]+
[e12|3|1|5]+[e11|3|4|7]+[e11|3|4|3]+[e11|3|4|6]+[e11|3|4|2]+[e12|3|4|2]+[e11|3|4|1]+
[e12|6|7|7]+[e11|6|7|3]+[e12|6|7|2]+[e12|6|7|5]+[e11|6|3|7]+[e12|6|3|6]+[e11|6|3|5]+
[e11|6|3|4]+[e12|6|3|4]+[e12|6|6|7]+[e12|6|6|3]+[e11|6|6|2]+[e11|6|6|5]+[e11|6|2|7]+
[e12|6|2|7]+[e11|6|2|3]+[e11|6|2|2]+[e11|6|2|5]+[e12|6|2|1]+[e11|6|5|7]+[e12|6|5|7]+
[e12|6|5|3]+[e11|6|5|2]+[e12|6|5|2]+[e11|6|5|5]+[e12|6|5|1]+[e11|6|1|7]+[e12|6|1|7]+
[e12|6|1|6]+[e11|6|1|2]+[e11|6|1|5]+[e12|6|1|5]+[e11|6|1|1]+[e12|6|1|1]+[e11|6|1|4]+
[e12|6|1|4]+[e12|6|4|7]+[e12|6|4|3]+[e11|6|4|5]+[e11|6|4|1]+[e12|2|7|7]+[e11|2|7|3]+
[e11|2|7|1]+[e12|2|7|1]+[e11|2|7|4]+[e12|2|3|7]+[e11|2|3|3]+[e12|2|3|3]+[e11|2|3|6]+
[e11|2|3|5]+[e11|2|6|7]+[e11|2|6|3]+[e11|2|6|6]+[e12|2|6|5]+[e11|2|6|1]+[e12|2|6|1]+
[e11|2|2|7]+[e12|2|2|7]+[e12|2|2|3]+[e11|2|2|6]+[e11|2|5|7]+[e11|2|1|3]+[e11|5|7|7]+
[e11|5|7|3]+[e11|5|3|7]+[e11|5|3|2]+[e11|5|3|4]+[e11|5|6|7]+[e11|5|6|3]+[e11|5|6|2]+
[e11|5|2|7]+[e11|5|2|3]+[e11|5|2|6]+[e11|5|5|3]+[e11|1|7|7]+[e11|1|7|6]+[e11|1|7|2]+
[e11|1|3|7]+[e11|1|3|3]+[e11|1|6|2]+[e11|1|2|7]+[e11|1|2|3]+[e11|1|2|6]+[e11|1|1|7]+
[e12|4|7|1] + [e12|4|3|7] + [e12|4|6|7] + [e12|4|6|3] + [e21|7|7] + [e21|7|6] + [e21|7|2] +
[e21|7|1] + [e22|7|1] + [e22|7|4] + [e22|3|3] + [e21|3|6] + [e22|3|2] + [e21|3|5] + [e22|3|5] +
[e22|3|4] + [e22|6|7] + [e21|6|3] + [e22|6|3] + [e21|6|5] + [e21|2|7] + [e22|2|3] + [e21|2|2] +
[e22|2|2] + [e3|7] + [e3|3]

文　献

[1] Alejandro Adem and R. James Milgram, *Cohomology of finite groups*, Second, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 309, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR2035696

[2] Jorge Aguilar-Guzmán and Jesús González, *Motion planning in polyhedral products of groups and a Fadell-Husseini approach to topological complexity* (2021).

[3] D. J. Benson, *Representations and cohomology. II*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 31, Cambridge University Press, Cambridge, 1991. Cohomology of groups and modules. MR1156302

[4] Israel Berstein, *On the Lusternik-Schnirelmann category of Grassmannians*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **79** (1976), no. 1, 129–134. MR400212

[5] Michael Farber, *Topological complexity of motion planning*, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), no. 2, 211–221. MR1957228

[6] Alexander N. Dranishnikov and Yuli B. Rudyak, *On the Berstein-Svarc theorem in dimension 2*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), no. 2, 407–413. MR2475974

[7] Edward Fadell and Sufian Husseini, *Category weight and Steenrod operations*, 1992, pp. 151–161. Papers in honor of José Adem (Spanish). MR1317569

[8] Michael Farber, *Topological complexity of motion planning*, Discrete Comput. Geom. **29** (2003), no. 2, 211–221. MR1957228

[9] Michael and Grant Farber Mark, *Symmetric motion planning*, Topology and robotics, 2007, pp. 85–104. MR2359031

[10] Michael Farber and Mark Grant, *Robot motion planning, weights of cohomology classes, and cohomology operations*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 9, 3339–3349. MR2407101

[11] Kensô Fujii, *On the K-ring of* S^{4n+3}/H_m, Hiroshima Math. J. **3** (1973), 251–265. MR334184

[12] Norio Iwase, A_∞*-method in Lusternik-Schnirelmann category*, Topology **41** (2002), no. 4, 695–723. MR1905835

[13] Norio Iwase and Michihiro Sakai, *Topological complexity is a fibrewise L-S category*, Topology Appl. **157** (2010), no. 1, 10–21. MR2556074

[14] Norio and Sakai Iwase Michihiro, *Erratum to "Topological complexity is a fibrewise L-S category" [Topology Appl. 157 (1) (2010) 10–21] [MR2556074]*, Topology Appl. **159** (2012), no. 10-11, 2810–2813. MR2923451

[15] Norio Iwase, Michihiro Sakai, and Mitsunobu Tsutaya, *A short proof for* $\mathrm{tc}(K) = 4$, Topology Appl. **264** (2019), 167–174. MR3975098

[16] I. M. James, *Introduction to fibrewise homotopy theory*, Handbook of algebraic topology, 1995, pp. 169–194. MR1361889

[17] L. Lyusternik and L. Šnirel′man, *Topological methods in variational problems and their application to the differential geometry of surfaces*, Uspehi Matem. Nauk (N.S.) **2** (1947), no. 1(17), 166–217. MR0029532

[18] John Milnor, *On spaces having the homotopy type of a* CW*-complex*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 272–280. MR100267

[19] Yuli B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), no. 1, 37–55. MR1644063

[20] Michihiro Sakai, A_∞*-spaces and L-S category in the category of fibrewise spaces*, Topology Appl. **157** (2010), no. 13, 2131–2135. MR2665235

[21] James Dillon Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292; ibid. **108** (1963), 293–312. MR0158400

[22] Jeffrey Strom, *Essential category weight and phantom maps*, Cohomological methods in homotopy theory (Bellaterra, 1998), 2001, pp. 409–415. MR1851266

[23] A. S. Švarc, *The genus of a fiber space*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **119** (1958), 219–222. MR0102812

九州大学・数理学研究院　岩瀬則夫