Über die stationären und quasistationären magnetischen Felder des Rotationsellipsoides

von

Takeshi KIYONO
Institut für Elektronentechnik

(eingegangen am 10. April 1956)

Inhalt

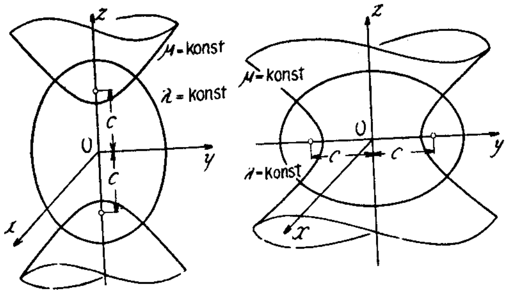
1. Einleitung.

Die sehr weitgehenden theoretischen Untersuchungen des elektromagnetischen Feldes am Ellipsoide sind von F. Möglich[1] gemacht werden, und mehrere physikalische und technische Probleme über stationäre und nichtstationäre Felder des Rotationsellipsoides sind gelöst von vielen Autoren[2),3)]. Aber es scheinen noch einige Probleme übrigzubleiben für weitere Untersuchungen.

In dieser Arbeit sind die stationären und quasistationären magnetischen Felder um Rotationsellipsoid und der Wirbelstrom auf der Oberfläche davon unter einfacheren Bedingungen geführt und einige rechnerische Resultate gegeben. Allerdings die hier behandelten Probleme sind interessant für Theorie der Induktionsmethode der geoelektrischen Untersuchung, aber die praktischen Anwendungen und die experimentellen Ergebnisse sind an anderen Orten berichtet[4),5)].

Im allgemeinen ist es zweckmässig, die Koordinaten des Rotationsellipsoides zu benutzen, um die Randwertsufgabe über Rotationsellipsoid zu behandeln. Die hier benutzten Koordinaten sind die des gestreckten und des abgeplatteten Rotationsellipsoides, die Beziehungen zwischen denen und den kartesischen Koordinaten sind durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

für gestrecktes Rotationsellipsoid



(a) Koordinaten des gestreckten Rotationsellipsoid

(b) Koordinaten des abgeplattetes Rotationsellipsoid

Abb. 1.1. Die Koordinatensysteme des Rotationsellipsoid.

$$\left.\begin{aligned} x&=c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\cos\phi\,,\\ y&=c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\sin\phi\,,\\ z&=c\lambda\mu\,,\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

für abgeplattetes Rotationsellipsoid

$$\left.\begin{aligned} x&=c\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}\cos\phi\,,\\ y&=c\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}\sin\phi\,,\\ z&=c\lambda\mu\,,\end{aligned}\right\}\qquad(1.2)$$

wo die Konstante c den Brennpunktabstand des Rotationsellipsoides $\lambda=$ konst und des Rotationshyperboloides $\mu=$konst vom Ursprung bedeutet (vgl. Abb. 1.1).

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} h_1&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2}\,,\\ h_2&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\mu}\right)^2}\,,\\ h_3&=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\phi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)^2}\,,\end{aligned}\right\}\qquad(1.3)$$

so ergeben sich für

gestrecktes Rotationsellipsoid:

$$\left.\begin{aligned} h_1(\lambda,\ \mu)&=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,,\\ h_2(\lambda,\ \mu)&=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}\,,\\ h_3(\lambda,\ \mu)&=c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\,,\end{aligned}\right\}\qquad(1.4)$$

und für

abgeplattetes Rotationsellipsoid:

$$\left.\begin{aligned} h_1(\lambda,\ \mu)&=c\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2+1}}\,,\\ h_2(\lambda,\ \mu)&=c\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}}\,,\\ h_3(\lambda,\ \mu)&=c\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(1.5)$$

Gegeben sind die kartesischen Koordinaten x, y, z, so müssen die Koordinaten λ, μ, ϕ nach den Beziehungen berechnet werden:

für gestrektes Rotationsellipsoid

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{1}{2c}\left[\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}+\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}\right],\\ \mu&=\frac{1}{2c}\left[\sqrt{(z+c)^2+\rho^2}-\sqrt{(z-c)^2+\rho^2}\right],\\ \phi&=\tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2};\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

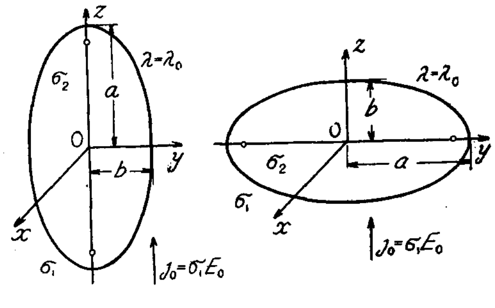
für abgeplattetes Rotationsellipsoid

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\xi^2+\sqrt{\xi^4+4\zeta^2}},\\ \mu&=\frac{z}{c\lambda}, \qquad \phi=\tan^{-1}\frac{y}{x},\\ \xi&=\frac{1}{c}\sqrt{x^2+y^2+z^2-c^2}, \qquad \zeta=\frac{z}{c}.\end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

2. Magnetisches Feld an dem im stationären Stromfelde befindlichen Rotationsellipsoid.

Wenn ein Rotationsellipsoid im gleichförmigen Stromfelde gesetzt ist, so werden die Stromlinien gestört, und ein magnetisches Feld wird verursacht um den Körper herum. Im Fall der Rotationssymmetrie kann der Verlauf des Feldes verhältnismässig einfach gerechnet werden.

Hier handelt es sich um das magnetische Feld ausserhalb eines Rotationsellipsoides endlicher Leitfähigkeit, das die parallel zum stationären Primärfelde gerichtete Rotationsachse besitzt (vgl. Abb. 2.1). Aus Symmetriegründen ist es klar, dass das magnetische Feld sich kreisförmig um die Achse des Systems verteilt, und dass die ϕ-Komponente H_ϕ des Feldes auf einem horizontalen Kreise, der den Mittelpunkt auf der z-Achse hat, konstant ist. Also nach der Ampèresche Formel,



(a) Gestrecktes Rotationsellipsoid, $\lambda_0=a/c$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$. (b) Abgeplattetes Rotationsellipsoid, $\lambda_0=b/c$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Abb. 2.1.

$$\oint H_\phi ds=I_\rho, \tag{2.1}$$

erhält man

$$H_\phi=\frac{1}{2\pi\rho}I_\rho, \tag{2.2}$$

wo ρ der Halbmesser des Kreises ist und I_ρ die Strommenge bedeutet, welche eine von dem Kreise vom Halbmesser ρ begrenzte Fläche durchfliesst.

Der Wert von I_ρ berechnet sich aus dem Flächenintegral der zur Fläche S normalen Stromdichte j_n:

$$I_\rho = \int_S j_n dS\,. \tag{2.3}$$

Wählt man die Fläche λ=konst, $\mu=\mu'$ als S, so kann man die Stromdichte j_n durch das Potential V_1 ausdrücken

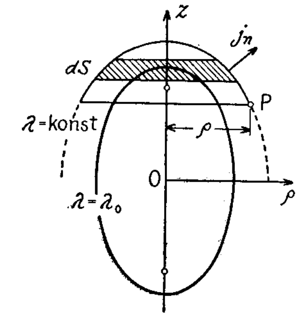


Abb. 2.2.

$$j_n = j_\lambda = -\sigma_1 \frac{1}{h_1(\lambda,\,\mu')}\frac{\partial V_1}{\partial \lambda}\,, \tag{2.4}$$

und das Flächenelement dS durch

$$dS = 2\pi\rho(\lambda,\,\mu')\,h_2(\lambda,\,\mu')\,d\mu'\,, \tag{2.5}$$

(vgl. Abb. 2.2). Damit ergibt sich

$$I_\rho = -2\pi\sigma_1 \int_\mu^1 \frac{h_2(\lambda,\,\mu')}{h_1(\lambda,\,\mu')}\,\rho(\lambda,\,\mu')\,\frac{\partial V_1}{\partial \lambda}\,d\mu'\,. \tag{2.6}$$

Nun muss das elektrische Sekundärpotential V_1 bestimmt werden. In beiden Systemen der gestreckten und abgeplatteten Rotationsellipsoide wird das Primärpotential V_0 des homogenen Stromfeldes dadurch dargestellt, dass

$$V_0 = -E_0 z = -cE_0\lambda\mu\,, \tag{2.7}$$

wo E_0 die Stärke des Primärfeldes bedeutet. Die Sekundärpotentialen V_1 und V_2 ausserhalb und innerhalb des Ellipsoides müssen auf der Oberfläche des Ellipsoides $\lambda=\lambda_0$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\left.\begin{aligned} &V_1 = V_2\,,\\ &\frac{\partial V_1}{\partial n} - \kappa\frac{\partial V_2}{\partial n} = (\kappa-1)\frac{\partial V_0}{\partial n}\,, \end{aligned}\right\}\quad \lambda=\lambda_0\,, \tag{2.8}$$

wo $\kappa=\sigma_2/\sigma_1$ ist, und $\partial/\partial n=(1/h_1)\,\partial/\partial\lambda$ den zur Oberfläche normalen Gradient bedeutet.

Für den Fall der Rotationssymmetrie sind die Lösungen der Laplaceschen Gleichung ausgedrückt durch die folgenden Reihenentwicklungen:

für gestrecktes Rotationsellipsoid

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_n(\lambda)\,P_n(\mu)\,, &\quad \lambda>\lambda_0\,,\\ V_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\lambda)\,P_n(\mu)\,, &\quad \lambda<\lambda_0\,; \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

für abgeplattetes Rotationsellipsoid

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_n(i\lambda)\, P_n(\mu)\,, \qquad \lambda > \lambda_0\,, \\ V_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(i\lambda)\, P_n(\mu)\,, \qquad \lambda < \lambda_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Die Werte der Koeffizienten A_n und B_n in diesen Entwicklungen werden nach den Bedingungen (2. 8) bestimmt und mittels dieser Werte werden die Potentiale durch die folgenden Darstellungen ausgedrückt:

für gestrecktes Rotationsellipsoid

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{E_0}{\alpha_g}\, c Q_1(\lambda)\, \mu\,, \\ V_2 &= \frac{E_0}{\beta_g}\, c\lambda\mu\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

$$\alpha_g = \beta_g \frac{Q_1(\lambda_0)}{P_1(\lambda_0)} = \frac{1}{\lambda_0}\left[Q_1(\lambda_0) + \frac{1}{\kappa-1}\,\frac{1}{\lambda_0^2-1}\right]; \tag{2.12}$$

für abgeplattetes Rotationsellipsoid

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{E_0}{i\alpha_a}\, c Q_1(i\lambda)\, \mu\,, \\ V_2 &= \frac{E_0}{\beta_a}\, c\lambda\mu\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

$$\alpha_a = \beta_a \frac{Q_1(i\lambda_0)}{P_1(i\lambda_0)} = \frac{1}{i\lambda_0}\left[Q_1(i\lambda_0) - \frac{1}{\kappa-1}\,\frac{1}{\lambda_0^2+1}\right]. \tag{2.14}$$

Durch Einsetzen von Gl. (2. 11) bzw. (2. 13) in Gl. (2. 6), ergeben sich für gestrecktes Rotationsellipsoid

$$I_\rho = -\pi\sigma_1 c^2 E_0 \frac{\sqrt{\lambda^2-1}}{\alpha_g}\, Q_1^1(\lambda)\,(1-\mu^2)\,, \tag{2.15}$$

für abgeplattetes Rotationsellipsoid

$$I_\rho = -\pi\sigma_1 c^2 E_0 \frac{\sqrt{\lambda^2+1}}{i\alpha_a}\, Q_1^1(i\lambda)\,(1-\mu^2)\,. \tag{2.16}$$

Und nach Gl. (2. 2), erhält man

für gestrecktes Rotationsellipsoid

$$H_\phi = -\frac{E_0\sigma_1}{2\alpha_g}\,\rho\,\frac{Q_1^1(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-1}}\,, \tag{2.17}$$

für abgeplattetes Rotationsellipsoid

$$H_\phi = -\frac{E_0\sigma_1}{2i\alpha_a}\,\rho\,\frac{Q_1^1(i\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+1}}\,, \tag{2.18}$$

wo $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Für die Berechnung des Feldes werden die folgenden Beziehungen benutzt:

$$\left.\begin{aligned} &Q_0(\lambda)=\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1}, \qquad Q_1(\lambda)=\lambda Q_0(\lambda)-1, \\ &Q_1^1(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-1}\,Q_0(\lambda)-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}; \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

$$\left.\begin{aligned} &Q_0(i\lambda)=\frac{1}{i}\cot^{-1}\lambda, \qquad Q_1(i\lambda)=i\lambda Q_0(i\lambda)-1, \\ &Q_1^1(i\lambda)=i\sqrt{\lambda^2+1}\,Q_0(i\lambda)-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Wenn die Leitfähigkeit σ_2 des Ellipsoides unendlich gross wird, dann wird $\kappa=\infty$, und nehmen Gl. (2.12) und (2.14) die Formen

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_g=Q_0(\lambda_0)-\frac{1}{\lambda_0}, \\ &\alpha_a=Q_0(i\lambda_0)-\frac{1}{i\lambda_0}, \end{aligned}\right\} \quad \kappa=\infty. \tag{2.21}$$

Ist degegen der Körper nichtleitend, so wird $\kappa=0$, und gilt

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_g=Q_0(\lambda_0)-\frac{1}{\lambda_0^2-1}, \\ &\alpha_a=Q_0(i\lambda_0)+\frac{i\lambda_0}{\lambda_0^2+1}, \end{aligned}\right\} \quad \kappa=0. \tag{2.22}$$

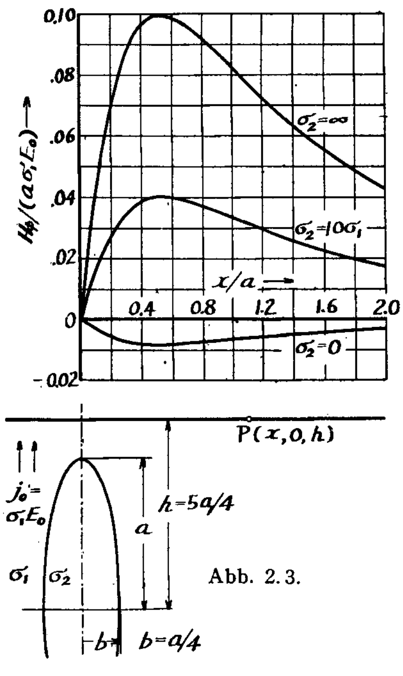


Abb. 2.3.

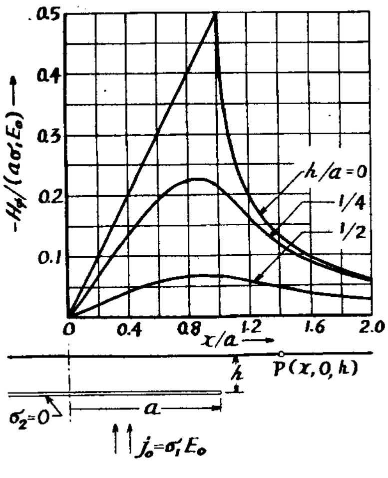


Abb. 2.4.

Wenn das Ellipsoid sehr stark abgeflacht wird, so wird es eine sehr dünne Kreisscheibe ($a=c$, $b=0$, $\lambda_0=0$). Da die gutleitende Scheibe die zur Scheibenfläche normalen Stromlinien nicht stört, so wird $H_\phi=0$. Für die nichtleitende Scheibe dagegen werden die Stromlinien stark gestört. In diesem Falle nimmt α_a der Gl. (2.22) den Wert $i\alpha_a=\pi/2$, und nach Gl. (2.18) ergibt sich

$$H_\phi=-\frac{E_0\sigma_1}{\pi}\rho\frac{Q_1^1(i\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+1}}. \tag{2.23}$$

Abb. 2.3 zeigt den Verlauf des magnetischen Feldes um ein gestrecktes Rotationsellipsoid, und Abb. 2.4 zeigt denselben über einer nichtleitenden Kreisscheibe.

3. Quasistationäres Homogenfeld.

Ein im magnetischen Wechselfelde befindliches Rotationsellipsoid erzeugt das sekundäre magnetische Feld an sich. Wenn die Leitfähigkeit des Ellipsoides unendlich gross ist und das Primärwechselfeld homogen und niederfrequent ist, so wird die Darstellung des Sekundärfeldes an dem Körper ziemlich einfach, und damit kann der Wirbelstrom auf dem Körper leicht berechnet werden.

Das Problem teilt sich in zwei Teile, indem man das Primärfeld in zwei Komponenten H_{0z} und $H_{0\rho}$ zerlegt, die eine parallel und die andere senkrecht zur Symmetrieachse gerichtet ist.

3.1. Rotationssymmetrisches Feld.

(1) Gestrecktes Rotationsellipsoid.

Da es allgemein kein elektromagnetisches Feld innerhalb eines vollkommenes Leiters gibt, ist es notwendig nur das Feld ausserhalb des Ellipsoides zu behandeln. Wirkt das magnetische Primärfeld $H_{0z}e^{-i\omega t}$ auf ein gestrecktes Rotationsellipsoid parallel zur Symmetrieachse, dann hat das entsprechende magnetische Sekundärfeld keine ϕ-Komponente, und das elektrische Sekundärfeld nur die ϕ-Komponente. In diesem Falle lauten die Maxwellschen Gleichungen

$$\frac{\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}}{c(\lambda^2-\mu^2)}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}H_\mu\right)-\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}H_\lambda\right)\right]=(\sigma-i\varepsilon\omega)E_\phi, \tag{3.1a}$$

$$\frac{1}{c\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-1)}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}E_\phi\right]=i\omega\mu_m H_\lambda, \tag{3.1b}$$

$$\frac{1}{c\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(1-\mu^2)}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}E_\phi\right]=-i\omega\mu_m H_\mu, \tag{3.1c}$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante, μ_m die Permeabilität und σ die Leitfähigkeit des Mediums bedeutet.

Durch Einsetzen der Gl. (3.1b) und (3.1c) in Gl. (3.1a), erhält man eine Differentialgleichung für E_ϕ. Setzt man in diese Gleichung

$$A(\lambda,\ \mu)=\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\ E_\phi \tag{3.2}$$

ein, dann folgt

$$(\lambda^2-1)\frac{\partial^2 A}{\partial\lambda^2}+(1-\mu^2)\frac{\partial^2 A}{\partial\mu^2}=-\gamma^2(\lambda^2-\mu^2)\ A\,, \tag{3.3}$$

wo

$$\gamma^2=c^2k^2\,,\qquad k^2=\omega^2\mu_m\varepsilon+i\omega\mu_m\sigma \tag{3.4}$$

gesetzt ist.

Setzt man ferner

$$A(\lambda,\mu)=L(\lambda)\ M(\mu)\ , \tag{3.5}$$

so teilt sich Gl. (3. 3) in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned}(1-\mu^2)\frac{d^2M}{d\mu^2}+(\alpha-\gamma^2\mu^2)\ M=0\,,\\ (\lambda^2-1)\frac{d^2L}{d\lambda^2}-(\alpha-\gamma^2\lambda^2)\ L=0\,,\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

wobei α eine Konstante ist.

Ist das Medium ausserhalb des Ellipsoides die Luft, so $\sigma=0$, $\varepsilon=\varepsilon_0$, $\mu_m=\mu_0$, und wenn die Kreisfrequenz ω so niedrig ist, dass der Verschiebungsstrom in der Luft vernachlässigt werden könnte, dann lauten Gl. (3. 6)

$$\left.\begin{aligned}(1-\mu^2)\frac{d^2M}{d\mu^2}+\alpha M=0\,,\\ (\lambda^2-1)\frac{d^2L}{d\lambda^2}-\alpha L=0\,,\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

mit den Lösungen

$$\left.\begin{aligned}M(\mu)&=\sqrt{1-\mu^2}\ P_n^1(\mu)\,, &\quad -1<\mu<+1\,,\\ L(\lambda)&=\sqrt{\lambda^2-1}\ Q_n^1(\lambda)\,, &\quad \lambda>\lambda_0\,,\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

für die Werte der Konstante

$$\alpha=n(n+1)\,,\qquad n=1,2,\cdots. \tag{3.9}$$

Mittels Gl. (3. 5) und (3. 8) nimmt Gl. (3. 2) die Form

$$E_\phi(\lambda,\ \mu)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nQ_n^1(\lambda)\ P_n^1(\mu)\,,\qquad \lambda>\lambda_0\,. \tag{3.10}$$

Setzt man diese Reihenentwicklung in Gl. (3. 1b) und (3. 1c), dann erhält man für das magnetische Feld

$$H_\lambda=-\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{1}{c\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}\sum_{n=1}^{\infty}a_nn(n+1)\ Q_n^1(\lambda)\ P_n(\mu)\ , \tag{3.11a}$$

$$H_\mu=-\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{1}{c\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n(n+1)\,Q_n(\lambda)\,P_n^1(\mu)\,, \tag{3.11b}$$

hierbei sind die Beziehungen benutzt

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\mu}\left[\sqrt{1-\mu^2}\,P_n^1(\mu)\right]&=-n(n+1)\,P_n(\mu)\,,\\ \frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{\lambda^2-1}\,Q_n^1(\lambda)\right]&=n(n+1)\,Q_n(\lambda)\,.\end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

Auf der Oberfläche des Ellipsoides unendlich grosser Leitfähigkeit muss die Grenzbedingung

$$H_\lambda+H_{0\lambda}=0\,,\qquad \lambda=\lambda_0\,, \tag{3.13}$$

erfüllt werden, wo $H_{0\lambda}$ die λ-Komponente des Primärfeldes, die durch

$$H_{0\lambda}=H_{0z}\mu\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}}=\frac{H_{0z}}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}\,P_1^1(\lambda)\,P_1(\mu) \tag{3.14}$$

ausgedrückt wird, bedeutet. Indem man Gl. (3.11a) und (3.14) in die Bedingung (3.13) einsetzt und die Koeffizienten der Funktionen $P_n(\mu)$ vergleicht, so berechnen sich die Koeffizienten a_n in Gl. (3.11a) und (3.11b) zu

$$\left.\begin{aligned}a_1&=H_{0z}i\omega\mu_0 c\,\frac{\sqrt{\lambda_0^2-1}}{2Q_1^1(\lambda_0)}\,,\\ a_2&=a_3=\cdots=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Damit erhält man die Darstellungen für zwei Komponenten des magnetischen Sekundärfeldes

$$\left.\begin{aligned}H_\lambda&=-H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2-1}}{Q_1^1(\lambda_0)}\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}\,Q_1^1(\lambda)\,,\\ H_\mu&=-H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2-1}}{Q_1^1(\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}}\,Q_1(\lambda)\,.\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Daraus erkennt man, dass die Feldstärke unabhängig von Frequenz ist.

Die Darstellungen (3.16) sind funktionell gleich mit den Sekundärfeldkomponenten um ein ferromagnetisches Rotationsellipsoid im magnetostatischen Homogenfelde H_{0z}, das parallel zur Symmetrieachse gerichtet ist:

$$\left.\begin{aligned}H_\lambda&=-H_{0z}\frac{1}{\alpha_{gm}}\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}\,Q_1^1(\lambda)\,,\\ H_\mu&=-H_{0z}\frac{1}{\alpha_{gm}}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}}\,Q_1(\lambda)\,,\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

hierbei bedeutet

$$\alpha_{gm}=\frac{1}{\lambda_0}\left[Q_1(\lambda_0)+\frac{1}{\mu_r-1}\frac{1}{\lambda_0^2-1}\right], \tag{3.18}$$

wo μ_r die relative Permeabilität des Ellipsoides ist. Und für das vollkommen permeable Ellipsoid gilt

$$\alpha_{gm} = \frac{Q_1(\lambda_0)}{\lambda_0}\,, \qquad \mu_r = \infty\,. \tag{3.19}$$

Da allgemein $Q_1(\lambda_0)$ positiv und $Q_1^1(\lambda_0)$ negativ ist, ist die Koeffizient $H_{0z}\sqrt{\lambda_0^2-1}/Q_1^1(\lambda_0)$ für quasistationäres Feld negativ und die Koeffizient H_{0z}/α_{gm} für magnetostatisches Feld positiv. Dies bedeutet, dass die magnetischen Kraftlinien des quasistationären Feldes und die Kraftlinien des magnetostatischen Induktionsfeldes die gleiche Gestalt zeigen, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Diese Verhältnisse sind physikalisch verständlich und auch experimentell festgestellt.[6]

(2) Abgeplattetes Rotationsellipsoid.

Ähnlich wie im vorigen Falle berechnet sich das rotationssymmetrische Sekundärfeld um ein abgeplattetes Rotationsellipsoid aus den entsprechenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}}{c(\lambda^2+\mu^2)}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}}\,H_\mu\right)-\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2+1}}\,H_\lambda\right)\right]=(\sigma-i\varepsilon\omega)\,E_\phi\,, \tag{3.20a}$$

$$\frac{1}{c\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)(\lambda^2+1)}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}\,E_\phi\right]=i\omega\mu_m H_\lambda\,, \tag{3.20b}$$

$$\frac{1}{c\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)(1-\mu^2)}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}\,E_\phi\right]=-i\omega\mu_m H_\mu\,. \tag{3.20c}$$

Indem man die Funktion

$$A(\lambda,\,\mu)=\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}\,E_\phi\,, \tag{3.21}$$

als das Produkt von $L(\lambda)$ und $M(\mu)$ wie in Gl. (3.5) darstellt, erhält man für quasistationären Fall ($\gamma^2=0$) zwei Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(1-\mu^2)\,\frac{d^2M}{d\mu^2}+\alpha M&=0\,,\\ (\lambda^2+1)\,\frac{d^2L}{d\lambda^2}-\alpha L&=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

Daraus folgt

$$E_\phi=\sum_{n=1}^{\infty}a_n Q_n^1(i\lambda)\,P_n^1(\mu)\,, \tag{3.23}$$

und nach Gl. (3.20b) und (3.20c) ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}H_\lambda&=-\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{1}{c\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n(n+1)\,Q_n^1(i\lambda)\,P_n(\mu)\,,\\ H_\mu&=-\frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{1}{c\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n(n+1)\,Q_n(i\lambda)\,P_n^1(\mu)\,.\end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

Hierfür ist die Beziehung benutzt

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{\lambda^2+1}\,Q_n^1(i\lambda)\right]=n(n+1)\,Q_n(i\lambda)\,. \tag{3.25}$$

Da auch hier die Grenzbedingung (3.13) erfüllt werden soll und nunmehr die Normalkomponente des Primärfeldes die Form hat:

$$H_{0\lambda}=H_{0z}\mu\sqrt{\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\mu^2}}=H_{0z}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}P_1^1(i\lambda)\,P_1(\mu)\,, \tag{3.26}$$

so nehmen die Koeffizienten a_n in Gl. (3.24) die Werte:

$$\left.\begin{aligned} a_1&=H_{0z}i\omega\mu_0 c\,\frac{\sqrt{\lambda_0^2+1}}{2Q_1^1(i\lambda_0)}\,,\\ a_2&=a_3=\cdots=0\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

und nach Gl. (3.24) lauten die Komponenten des Sekundärfeldes

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda&=-H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2+1}}{Q_1^1(i\lambda_0)}\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}Q_1^1(i\lambda)\,,\\ H_\mu&=-H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2+1}}{Q_1^1(i\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}}\,Q_1(i\lambda)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

Diese Darstellungen entsprechen den des magnetostatischen Induktionsfeldes:

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda&=-H_{0z}\frac{1}{i\alpha_{am}}\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}Q_1^1(i\lambda)\,,\\ H_\mu&=-H_{0z}\frac{1}{i\alpha_{am}}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}}\,Q_1(i\lambda)\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

wo

$$\alpha_{am}=\frac{1}{i\lambda_0}\left[Q_1(i\lambda_0)-\frac{1}{\mu_r-1}\frac{1}{\lambda_0^2+1}\right] \tag{3.30}$$

ist, und wenn die Permeabilität des Ellipsoides sehr gross ist, so wird

$$\alpha_{am}=\frac{Q_1(i\lambda_0)}{i\lambda_0}\,,\qquad \mu_r=\infty\,. \tag{3.31}$$

Man beachte auch hier, dass $\sqrt{\lambda_0^2+1}/Q_1^1(i\lambda_0)$ positiv und $1/(i\alpha_{am})$ negativ ist.

Besonders interessant ist der Fall der Kreisscheibe. Für die Grenz $\lambda_0=0$ wird das Rotationsellipsoid eine sehr dünne Scheibe vom Halbmesser $c=a$, und dann nimmt $Q_1^1(i\lambda_0)$ den Wert $\pi/2$. Damit werden die Darstellungen (3.28) geschrieben

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda&=-H_0\frac{2}{\pi}\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}Q_1^1(i\lambda)\,,\\ H_\mu&=-H_0\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}}\,Q_1(i\lambda)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

Dagegen wird für magnetostatischen Fall der Wert von α_{am} unendlich gross nach Gl. (3.30) oder (3.31), wenn λ_0 sehr klein wird, und damit verschwindet das Induktionsfeld über der Scheibe, wie naturgemäss verständlich ist.

3.2. Querfeld.

(1) Gestrecktes Rotationsellipsoid.

Beschränken wir uns auf dem quasistationären Felde im nichtleitenden Medium, lauten die Maxwellschen Gleichungen

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}=0 \quad \text{und} \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H}=0\,, \tag{3.33}$$

oder in den Koordinaten des gestreckten Rotationsellipsoides,

$$\frac{\partial}{\partial\mu}[\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\,H_\phi]=\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}\,H_\mu\right), \tag{3.34a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,H_\lambda\right)=\frac{\partial}{\partial\lambda}[\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\,H_\phi]\,, \tag{3.34b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}\,H_\mu\right)=\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,H_\lambda\right), \tag{3.34c}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-1)}\,H_\lambda]+\frac{\partial}{\partial\mu}[\sqrt{(\lambda^2-\mu^2)(1-\mu^2)}\,H_\mu]$$
$$+\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{\lambda^2-\mu^2}{\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}}\,H_\phi\right]=0\,. \tag{3.35}$$

Durch Elimination der Feldkomponenten H_λ und H_μ aus diesen Gleichungen erhält man die Differentialgleichung für H_ϕ:

$$\frac{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}{\lambda^2-\mu^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{(\lambda^2-1)\frac{\partial}{\partial\lambda}(\sqrt{\lambda^2-1}\,H_\phi)\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}(\sqrt{1-\mu^2}\,H_\phi)\right\}\right]+\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial\phi^2}=0\,. \tag{3.36}$$

Setzt man ferner

$$H_\phi(\lambda,\,\mu,\,\phi)=L(\lambda)\,M(\mu)\,\Phi(\phi)\,, \tag{3.37}$$

dann teilt sich die partielle Differentialgleichung (3.36) in drei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0\,,\\ \frac{d}{d\lambda}\left[(\lambda^2-1)\frac{du}{d\lambda}\right]-\left(\frac{m^2}{\lambda^2-1}+\alpha\right)u=0\,,\\ \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dv}{d\mu}\right]-\left(\frac{m^2}{1-\mu^2}-\alpha\right)v=0\,,\end{aligned}\right\} \tag{3.38}$$

wobei gesetzt sind:

$$\left.\begin{aligned} u(\lambda) &= \sqrt{\lambda^2-1}\, L(\lambda)\,, \\ v(\mu) &= \sqrt{1-\mu^2}\, M(\mu)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.39}$$

Gl. (3.38) besitzen die folgenden Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\phi) &= \cos m\phi;\ \sin m\phi\,, \\ u(\lambda) &= Q_n^m(\lambda)\,, \qquad \lambda > \lambda_0\,, \\ v(\mu) &= P_n^m(\mu)\,, \qquad -1 < \mu < +1\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.40}$$

wenn α und m die Werte haben

$$\begin{aligned} &\alpha = n(n+1)\,, \qquad n = 1, 2, \cdots; \\ &m = 0, 1, 2, \cdots. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Damit muss die Darstellung für H_ϕ die Form nehmen:

$$H_\phi = \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} (a_{nm} \sin m\phi + b_{nm} \cos m\phi)\, Q_n^m(\lambda)\, P_n^m(\mu)\,, \quad \lambda > \lambda_0\,. \tag{3.42a}$$

Da H_ϕ allgemein nicht unabhängig von ϕ sein kann und es für rotationssymmetrischen Fall verschwinden muss, soll die Reihenentwicklung (3.42a) kein Glied von $m=0$ besitzen. Setzt man diese Darstellung in Gl. (3.34a) und (3.34b) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} H_\lambda = -\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[& a_n Q_n'(\lambda)\, P_n(\mu) \\ & + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} (a_{nm} \cos m\phi - b_{nm} \sin m\phi)\, Q_n^{m\prime}(\lambda)\, P_n^m(\mu) \Big]\,, \end{aligned} \tag{3.42b}$$

und

$$\begin{aligned} H_\mu = -\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[& a_n Q_n(\lambda)\, P_n'(\mu) \\ & + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} (a_{nm} \cos m\phi - b_{nm} \sin m\phi)\, Q_n^m(\lambda)\, P_n^{m\prime}(\mu) \Big]\,. \end{aligned} \tag{3.42c}$$

Diese drei Darstellungen sind die allgemeinen Formen für drei Teilfelder in den Koordinaten des gestreckten Rotationsellipsoides. Dass diese auch für den rotationssymmetrischen Fall gelten, kann man einfach feststellen, indem man in Gl. (3.42b) und (3.42c) $a_{nm} = b_{nm} = 0$ setzt, und danach sie mit Gl. (3.11) vergleicht, mit Berücksichtigung darauf, dass die Beziehungen

$$\sqrt{1-\mu^2}\, P_n'(\mu) = P_n^1(\mu) \quad \text{und} \quad \sqrt{\lambda^2-1}\, Q_n'(\lambda) = Q_n^1(\lambda)$$

gelten.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das Primärfeld $H_{0p} e^{-i\omega t}$ parallel zur x-Achse gerichtet sei, d. h. $H_{0p} = H_{0x}$. Die senkrecht zur Fläche $\lambda =$ konst gerichtete Komponente $H_{0\lambda}$ ist gegeben durch

$$H_{0\lambda}=H_{0x}\lambda\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}}\cos\phi=\frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}\lambda P_1^1(\mu)\cos\phi. \tag{3.43}$$

Und auf der Oberfläche des Ellipsoides $\lambda=\lambda_0$, muss das primäre Normalfeld $H_{0\lambda}$ zusammen mit dem sekundären H_λ die Grenzbedingung (3. 13) erfüllen. Daraus folgen

$$\left.\begin{aligned} a_{11}&=H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}, \\ a_{nm}&=0, \qquad (n\neq 1,\ m\neq 1); \\ b_{nm}&=0. \end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

Durch Substitution dieser Werte in Gl. (3. 42a), (3. 42b) und (3. 42c), berechnen sich die drei Komponenten des Sekundärfeldes zu

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda&=-H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\sqrt{\frac{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}{\lambda^2-\mu^2}}\,Q_1^{1\prime}(\lambda)\cos\phi, \\ H_\mu&=H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}Q_1^1(\lambda)\cos\phi, \\ H_\phi&=H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}Q_1^1(\lambda)\sin\phi. \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

Hierbei beachte man, dass die folgende Beziehung gilt:

$$\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda)=Q_1(\lambda)+\frac{1}{\lambda^2-1}. \tag{3.46}$$

Auch hier ist es interessant das quasistationäre Feld mit dem magnetostatischen zu vergleichen. Nach einfacheren Rechnungen erhält man für das Sekundärpotential ausserhalb eines ferromagnetischen Rotationsellipsoides, auf welches magnetisches Querfeld H_{0x} wirkt:

$$U_1=\frac{H_{0x}}{\alpha_{gm}}c\sqrt{1-\mu^2}\,Q_1^1(\lambda)\cos\phi. \tag{3.47}$$

Daraus folgen die Darstellungen der drei Teilfelder

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda&=-\frac{1}{h_1}\frac{\partial U_1}{\partial\lambda}=-\frac{H_{0x}}{\alpha_{gm}}\sqrt{\frac{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}{\lambda^2-\mu^2}}\,Q_1^{1\prime}(\lambda)\cos\phi, \\ H_\mu&=-\frac{1}{h_2}\frac{\partial U_1}{\partial\mu}=\frac{H_{0x}}{\alpha_{gm}}\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}}Q_1^1(\lambda)\cos\phi, \\ H_\phi&=-\frac{1}{h_3}\frac{\partial U_1}{\partial\phi}=\frac{H_{0x}}{\alpha_{gm}}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}Q_1^1(\lambda)\sin\phi, \end{aligned}\right\} \tag{3.48}$$

wo die Konstante α_{gm} durch

$$\alpha_{gm}=\frac{1}{\mu_r-1}\left(\mu_r\frac{Q_1^1(\lambda_0)}{\sqrt{\lambda_0^2-1}}-\frac{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}{\lambda_0}\right) \tag{3.49}$$

gegeben ist, und in dem Grenzfall der vollkommen permeablen Stoffe den Wert nimmt:

$$\alpha_{gm}=Q_1^1(\lambda_0)/\sqrt{\lambda_0^2-1} \qquad \text{für} \quad \mu_r=\infty\,. \tag{3.50}$$

Durch Vergleich der Gl. (3.45) mit (3.48) erkennt man, dass die beiden Darstellungen funktionell gleich sind. Man beachte aber, dass $Q_1^1(\lambda_0)$ negativ und $Q_1^{1\prime}(\lambda_0)$ positiv ist und damit die Koeffizient a_{11} für quasistationäres Feld positiv, während die entsprechende Koeffizient H_{0x}/α_{gm} für magnetostatisches Feld negativ ist.

(2) Abgeplattetes Rotationsellipsoid.

Die Maxwellschen Gleichungen (3.33) lauten in den Koordinaten des abgeplattetes Rotationsellipsoides

$$\frac{\partial}{\partial\mu}[\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}H_\phi]=\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}}\,H_\mu\right), \tag{3.51a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2+1}}\,H_\lambda\right)=\frac{\partial}{\partial\lambda}[\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}\,H_\phi], \tag{3.51b}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}}\,H_\mu\right)=\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2+1}}\,H_\lambda\right), \tag{3.51c}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)(\lambda^2+1)}\,H_\lambda]+\frac{\partial}{\partial\mu}[\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)(1-\mu^2)}\,H_\mu] +\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{\lambda^2+\mu^2}{\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}}\,H_\phi\right]=0\,. \tag{3.52}$$

Die entsprechende Differentialgleichung für H_ϕ wird geführt zu

$$\frac{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}{\lambda^2+\mu^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{(\lambda^2+1)\frac{\partial}{\partial\lambda}(\sqrt{\lambda^2+1}\,H_\phi)\right\}\right. \left.+\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}(\sqrt{1-\mu^2}\,H_\phi)\right\}\right]+\frac{\partial^2 H_\phi}{\partial\phi^2}=0\,. \tag{3.53}$$

Daraus erhalten wir nach den ähnlichen Behandlungen wie im vorigen Falle die allgemeinen Darstellungen für drei Teilfelder:

$$H_\phi=\frac{1}{\sqrt{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(a_{nm}\sin m\phi+b_{nm}\cos m\phi)\,Q_n^m(i\lambda)\,P_n^m(\mu)\,, \tag{3.54a}$$

$$H_\lambda=-\sqrt{\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\mu^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n iQ_n'(i\lambda)\,P_n(\mu)\right. \left.+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}(a_{nm}\cos m\phi-b_{nm}\sin m\phi)\,iQ_n^{m\prime}(i\lambda)\,P_n^m(\mu)\right], \tag{3.54b}$$

$$H_\mu=-\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_nQ_n(i\lambda)\,P_n'(\mu)\right. \left.+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}(a_{nm}\cos m\phi-b_{nm}\sin m\phi)\,Q_n^m(i\lambda)\,P_n^{m\prime}(\mu)\right]. \tag{3.54c}$$

Setzt man $a_{nm}=b_{nm}=0$, stimmen diese Reihenentwicklungen funktionell mit Gl. (3.24) ein.

Das sekundäre Teilfeld H_λ soll die Grenzbedingung (3.13) auf der Oberfläche $\lambda=\lambda_0$ befriedigen, zusammen mit dem normalen Primärfelde:

$$H_{0\lambda}=H_{0x}\lambda\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}}\cos\phi=\frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\lambda P_1^1(\mu)\cos\phi\,. \tag{3.55}$$

Daraus erhält man

$$\left.\begin{aligned}&a_{11}=H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,,\\&a_{nm}=0\,,\qquad (n\neq 1,\ m\neq 1)\,;\\&b_{nm}=0\,.\end{aligned}\right\} \tag{3.56}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (3.54) ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}&H_\lambda=-H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\sqrt{\frac{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}{\lambda^2+\mu^2}}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda)\cos\phi\,,\\&H_\mu=H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}Q_1^1(i\lambda)\cos\phi\,,\\&H_\phi=H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}Q_1^1(i\lambda)\sin\phi\,.\end{aligned}\right\} \tag{3.57}$$

Die hier auftretende Funktion

$$\sqrt{\lambda^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda)=Q_1(i\lambda)-\frac{1}{\lambda^2+1} \tag{3.58}$$

hat immer den reellen und negativen Wert.

Wenn das Rotationsellipsoid sehr stark abgeflacht wird, verschwindet das Sekundärfeld, da dann die Koeffizient

$$\lambda_0/[\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)]=0$$

wird.

Wenn ein abgeplattetes Rotationsellipsoid der Permeabilität μ_r sich im senkrecht zur Rotationsachse gerichteten magnetostatischen Homogenfeld H_{0x} befindet, wird das Sekundärpotential in dem Punkt (λ, μ, ϕ) dargestellt durch:

$$U_1=\frac{H_{0x}}{i\alpha_{am}}c\sqrt{1-\mu^2}\,Q_1^1(i\lambda)\cos\phi\,. \tag{3.59}$$

Daraus folgen

$$\left.\begin{aligned}&H_\lambda=-\frac{H_{0x}}{i\alpha_{am}}\sqrt{\frac{(\lambda^2+1)(1-\mu^2)}{\lambda^2+\mu^2}}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda)\cos\phi\,,\\&H_\mu=\frac{H_{0x}}{i\alpha_{am}}\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}Q_1^1(i\lambda)\cos\phi\,,\\&H_\phi=\frac{H_{0x}}{i\alpha_{am}}\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}Q_1^1(i\lambda)\sin\phi\,,\end{aligned}\right\} \tag{3.60}$$

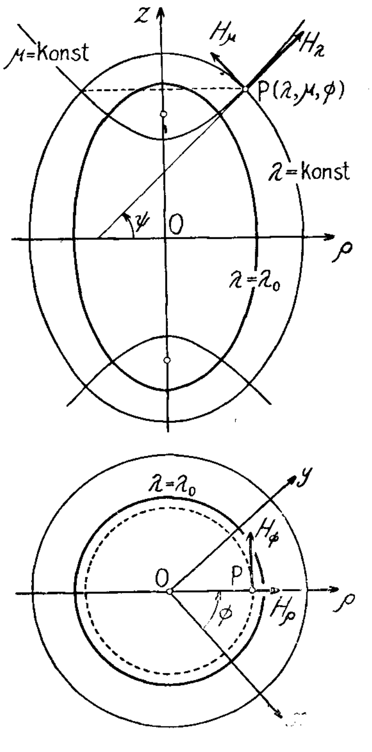


Abb. 3.1.

wo

$$i\alpha_{am}=\frac{1}{\mu_r-1}\left(\mu_r\frac{Q_1^1(i\lambda_0)}{\sqrt{\lambda_0^2+1}}-\frac{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}{\lambda_0}\right), \tag{3.61}$$

und dieser Wert reell und positiv ist. Für das vollkommen permeable Rotationsellipsoid wird der Wert

$$i\alpha_{am}=\frac{Q_1^1(i\lambda_0)}{\sqrt{\lambda_0^2+1}}, \qquad \mu_r=\infty\,. \tag{3.62}$$

3.3. Verlauf des Sekundärfeldes.

Um das Sekundärfeld numerisch zu berechnen, ist es gelegentlich zweckmässig, das Feld in die drei Komponenten nach Achsenrichtungen des kartesischen Koordinatensystems zu zerlegen. Zu diesem Zwecke benutzt man die Beziehungen (vgl. Abb. 3.1):

$$\left.\begin{aligned} H_x&=(H_\lambda\cos\psi-H_\mu\sin\psi)\cos\phi-H_\phi\sin\phi\,,\\ H_y&=(H_\lambda\cos\psi-H_\mu\sin\psi)\sin\phi+H_\phi\cos\phi\,,\\ H_z&=H_\lambda\sin\psi+H_\mu\cos\psi\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

Der hier auftretende Winkel ψ ist gegeben durch

$$\cos\psi=\lambda\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}}, \qquad \sin\psi=\mu\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}}, \tag{3.64}$$

für gestrecktes Rotationsllipsoid,

oder

$$\cos\psi=\lambda\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}}, \qquad \sin\psi=\mu\sqrt{\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+\mu^2}}, \tag{3.65}$$

für abgeplattetes Rotationsellipsoid.

Jede Feldkomponente kann sich in je zwei Teile zerlegen, die eine vom axialen Primärfelde H_{0z} und die andere vom Querfelde H_{0x} verursacht wird:

$$\left.\begin{aligned} H_\lambda&=H_\lambda^{(z)}+H_\lambda^{(x)}\,,\\ H_\mu&=H_\mu^{(z)}+H_\mu^{(x)}\,,\\ H_\phi&=H_\phi^{(z)}+H_\phi^{(x)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.66}$$

Dementsprechend zerlegen sich die x-, y- und z-Komponenten auch in je zwei Teile:

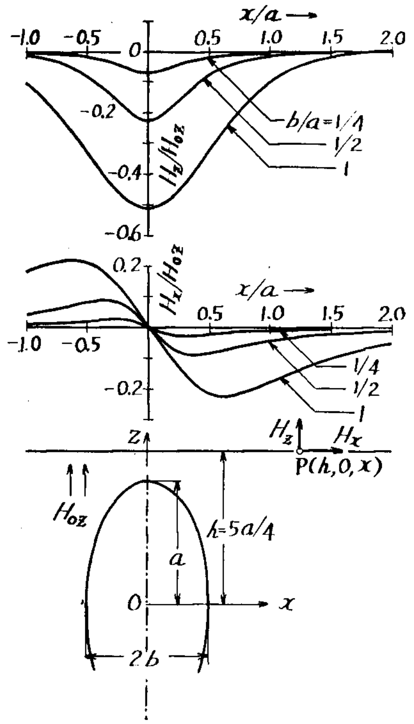


Abb. 3. 2.

$$\left.\begin{aligned} H_x &= H_x^{(z)} + H_x^{(x)}\,, \\ H_y &= H_y^{(z)} + H_y^{(x)}\,, \\ H_z &= H_z^{(z)} + H_z^{(x)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.67}$$

In Gl. (3. 66) ist $H_\phi^{(z)}=0$ wie schon genannt ist.

(1) Gestrecktes Rotationsellipsoid.

(1a) Rotationssymmetrisches Feld.

Durch Substitution der Gl. (3. 16) und (3. 64) in Gl. (3. 63) erhält man

$$\left.\begin{aligned} H_x^{(z)} &= H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2-1}}{Q_1^1(\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,\frac{\mu}{\lambda^2-\mu^2}\cos\phi\,, \\ H_y^{(z)} &= H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2-1}}{Q_1^1(\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,\frac{\mu}{\lambda^2-\mu^2}\sin\phi\,, \\ H_z^{(z)} &= -H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2-1}}{Q_1^1(\lambda_0)}\left[Q_0(\lambda)-\frac{\lambda}{\lambda^2-\mu^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3.68}$$

Abb. 3. 2 zeigt den Verlauf der Teilfelder $H_x^{(z)}$ und $H_z^{(z)}$ längs einer Linie $z=h$, $\phi=0$ über einem gestreckten Rotationsellipsoid. In diesem Bild ist auch die Verteilungen des Sekundärfeldes über einer Kugel eingezeichnet.

(1b) Querfeld.

Mittels der Gl. (3. 45) und (3. 64) werden die Darstellungen (3. 63) ausgedrückt durch

$$\left.\begin{aligned} H_x^{(x)} &= -H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\left[Q_0(\lambda)-\frac{\lambda}{\lambda^2-\mu^2}\left(1-\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}\cos 2\phi\right)\right], \\ H_z^{(x)} &= -H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\,\frac{\lambda}{\lambda^2-\mu^2}\,\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}\sin 2\phi\,, \\ H_z^{(x)} &= -H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\,\frac{2\mu}{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\cos\phi\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.69}$$

Abb. 3. 3 zeigt die Verteilung des Sekundärfeldes längs einer Linie $x=h$, $\phi=0$ an einem gestreckten Rotationsellipsoide unter Wirkung des parallel zur x-Achse gerichteten Primärfeldes. Auch hier sind die Kurven für Kugel eingezeichnet.

(2) Abgeplattetes Rotationsellipsoid.

(2a) Rotationssymmetrisches Feld.

Setzt man Gl. (3. 28) und (3. 65) in Gl. (3. 63) ein, so ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}
H_x^{(z)} &= -H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2+1}}{Q_1^1(i\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+1}}\,\frac{\mu}{\lambda^2-\mu^2}\cos\phi\,,\\
H_y^{(z)} &= -H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2+1}}{Q_1^1(i\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+1}}\,\frac{\mu}{\lambda^2-\mu^2}\sin\phi\,,\\
H_z^{(z)} &= -H_{0z}\frac{\sqrt{\lambda_0^2+1}}{Q_1^1(i\lambda_0)}\left[iQ_0(i\lambda)-\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}\right].
\end{aligned}\right\}\qquad(3.70)$$

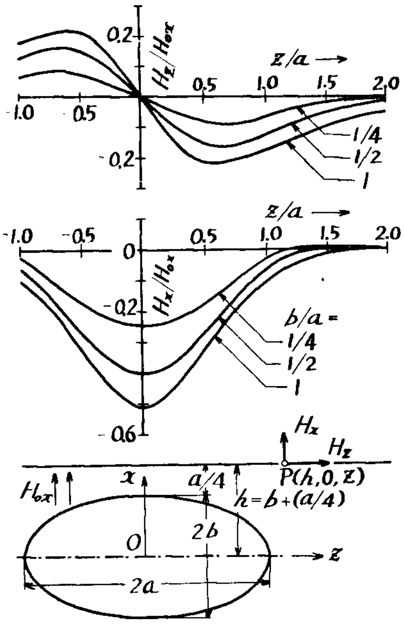


Abb. 3.3.

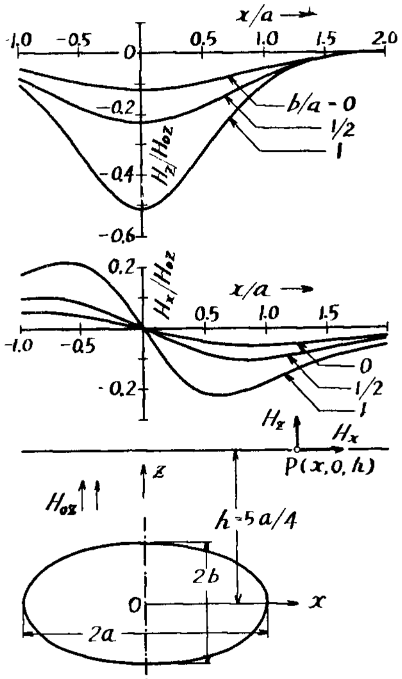


Abb. 3.4.

Für die Kreisscheibe nimmt die Koeffizient $\sqrt{\lambda_0^2+1}/Q_1^1(i\lambda_0)$ den Wert $2/\pi$. Abb. 3.4 zeigt die Feldverteilung längs einer Linie $z=h$, $\phi=0$ über einem abgeplatteten Rotationsellipsoid, einer Kreisscheibe und einer Kugel.

(2b) Querfeld.

Aus Gl. (3.57), (3.65) und (3.63), erhalten wir die Darstellungen:

$$\left.\begin{aligned}
H_x^{(x)} &= -H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\left[iQ_0(i\lambda)-\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}\left(1+\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+1}\cos 2\phi\right)\right],\\
H_y^{(x)} &= H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,\frac{\lambda}{\lambda^2+\mu^2}\,\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+1}\sin 2\phi\,,\\
H_z^{(x)} &= H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,\frac{2\mu}{\lambda^2+\mu^2}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+1}}\cos\phi\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.71)$$

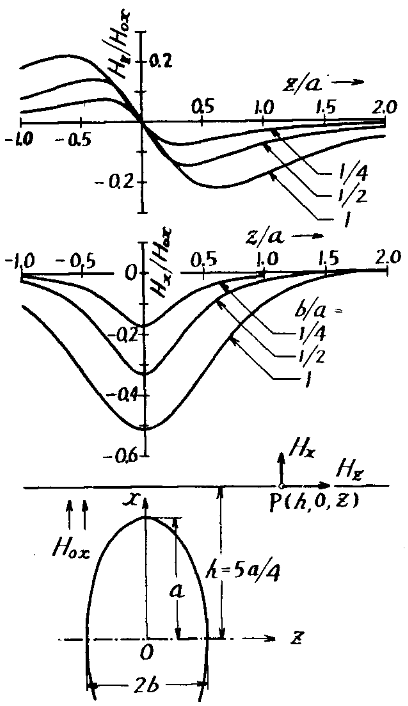


Abb. 3.5.

Abb. 3.5 zeigt den Feldverlauf längs einer parallel zur z-Achse gerichteten Linie für den Fall des senkrecht zur Rotationsachse wirkenden Primärfeldes.

4. Wirbelstrom auf dem Rotationsellipsoide.

Die Flächendichte des Wirbelstromes auf der Oberfläche des Rotationsellipsoides wird gegeben durch[7]:

$$\left.\begin{aligned} -K_\phi &= H_{\mu 1} - H_{\mu 2}\,, \\ K_\mu &= H_{\phi 1} - H_{\phi 2}\,, \end{aligned}\right\} \quad \lambda = \lambda_0, \tag{4.1}$$

wo $H_{\mu 1}$ und $H_{\phi 1}$ die Feldkomponenten ausserhalb des Ellipsoides bedeuten, während $H_{\mu 2}$ und $H_{\phi 2}$ die innerhalb desselben sind. Da in unserem Falle die Leitfähigkeit des Ellipsoides unendlich gross ist, so $H_{\mu 2}=0$ und $H_{\phi 2}=0$. Ferner ist das Feld ausserhalb des Ellipsoides zusammengesetzt aus den Primär- und Sekundärfeldern:

$$\left.\begin{aligned} H_{\mu 1} &= H_{0\mu} + H_\mu\,, \\ H_{\phi 1} &= H_{0\phi} + H_\phi\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Also nach Gl. (4.1) gilt

$$\left.\begin{aligned} K_\phi &= -(H_{0\mu} + H_\mu)\,, \\ K_\mu &= H_{0\phi} + H_\phi\,, \end{aligned}\right\} \quad \lambda = \lambda_0\,. \tag{4.3}$$

Ist das Primärfeld H_0 zur z- oder x-Achse geneigt, so ist es zweckmässig, das Feld in zwei Teilfelder H_{0z} und H_{0x} zu zerlegen. Und ferner können die zwei tangentialen Komponenten $H_{0\mu}$ und $H_{0\phi}$ des Primärfeldes in je zwei Teilfelder zerlegt werden:

$$\left.\begin{aligned} H_{0\mu} &= H_{0\mu}^{(z)} + H_{0\mu}^{(x)}\,, \\ H_{0\phi} &= H_{0\phi}^{(z)} + H_{0\phi}^{(x)}\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

wo $H_{0\mu}^{(z)}$ und $H_{0\phi}^{(z)}$ die dem Felde H_{0z} gehörigen Komponenten bedeuten, während $H_{0\mu}^{(x)}$ und $H_{0\phi}^{(x)}$ die dem Querfelde H_{0x} entsprechenden Komponenten sind. Dementsprechend können auch die Sekundärfeldkomponenten H_μ und H_ϕ nach Gl. (3.66) geteilt werden.

4.1. Gestrecktes Rotationsellipsoid.

Die vier tangentialen Komponenten des Primärfeldes auf der Oberfläche $\lambda=\lambda_0$ sind gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned}
H^{(z)}_{0\mu}&=H_{0z}\lambda_0\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2-\mu^2}}\,,\\
H^{(z)}_{0\phi}&=0\,;\\
H^{(x)}_{0\mu}&=-H_{0x}\mu\sqrt{\frac{\lambda_0^2-1}{\lambda_0^2-\mu^2}}\cos\phi\,,\\
H^{(x)}_{0\phi}&=-H_{0x}\sin\phi\,.
\end{aligned}\right\}\tag{4. 5}$$

Dagegen sind die entsprechenden sekundären Feldkomponenten nach Gl. (3. 16) und (3. 45) gegeben:

$$\left.\begin{aligned}
H^{(z)}_{\mu}&=-H_{0z}\sqrt{\lambda_0^2-1}\,\frac{Q_1(\lambda_0)}{Q_1^1(\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2-\mu^2}}\,,\\
H^{(z)}_{\phi}&=0\,;\\
H^{(x)}_{\mu}&=H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2-1}}\,\frac{Q_1^1(\lambda_0)}{Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\,\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_0^2-\mu^2}}\cos\phi\,,\\
H^{(x)}_{\phi}&=H_{0x}\frac{\lambda_0}{\lambda_0^2-1}\,\frac{Q_1^1(\lambda_0)}{Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\sin\phi\,.
\end{aligned}\right\}\tag{4. 6}$$

Durch Einsetzen dieser Gleichungen in Gl. (4. 3) mit Berücksichtigung der Gl. (4. 4), (4. 5) und (3. 66) erhalten wir

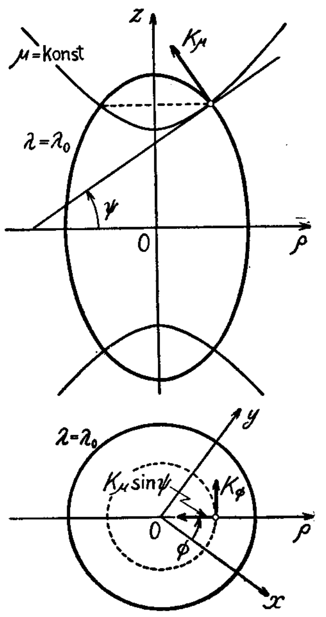


Abb. 4. 1.

$$\left.\begin{aligned}
K^{(z)}_{\phi}&=-\frac{H_{0z}}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^1(\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2-\mu^2}}\,,\\
K^{(z)}_{\mu}&=0\,;
\end{aligned}\right\}\tag{4. 7a}$$

$$\left.\begin{aligned}
K^{(x)}_{\phi}&=\frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\,\frac{2}{\sqrt{\lambda_0^2-1}}\,\frac{\mu\cos\phi}{\sqrt{\lambda_0^2-\mu^2}}\,,\\
K^{(x)}_{\mu}&=-\frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\,\frac{2}{\lambda_0^2-1}\sin\phi\,,
\end{aligned}\right\}\tag{4. 7b}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
K_\phi&=K^{(z)}_\phi+K^{(x)}_\phi\,,\\
K_\mu&=K^{(z)}_\mu+K^{(x)}_\mu
\end{aligned}\right\}\tag{4. 8}$$

gesetzt sind.

Um den Verlauf der Wirbelstromdichte in den kartesischen Koordinaten darzustellen, braucht man die Beziehungen zu benutzen:

$$\left.\begin{aligned}
K_x&=-K_\phi\sin\phi-K_\mu\sin\psi\cos\phi\,,\\
K_y&=K_\phi\cos\phi-K_\mu\sin\psi\sin\phi\,,\\
K_z&=K_\mu\cos\psi\,,
\end{aligned}\right\}\tag{4. 9}$$

(vgl. Abb. 4. 1). Die Darstellungen für den Winkel ψ sind in Gl. (3. 64) gegeben. Mittels der Gl. (4. 7a) und (4. 7b) ergeben sich nach Gl. (4. 9)

$$\left.\begin{aligned} K_x^{(z)} &= \frac{H_{0z}}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\, Q_1^1(\lambda_0)} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2-\mu^2}} \sin\phi\,, \\ K_y^{(z)} &= -\frac{H_{0z}}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\, Q_1^1(\lambda_0)} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2-\mu^2}} \cos\phi\,, \\ K_z^{(z)} &= 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

und

$$\left.\begin{aligned} K_x^{(x)} &= 0\,, \\ K_y^{(x)} &= \frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\, Q_1^{1\prime}(\lambda_0)} \frac{2}{\sqrt{\lambda_0^2-1}} \frac{\mu}{\sqrt{\lambda_0^2-\mu^2}}\,, \\ K_z^{(x)} &= -\frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\, Q_1^{1\prime}(\lambda_0)} \frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2-1} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2-\mu^2}} \sin\phi\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Da für rotationssymmetrisches Feld $K_z^{(z)}=0$ ist, strömen die Wirbelstromfaden horizontal auf der Oberfläche des Ellipsoides und damit werden die Stromlinien kreisförmig. Und da für Querfeld $K_x^{(x)}=0$ ist, so läuft jede Wirbelstromlinie längs einer vertikalen Ellipse, die parallel zur yz-Ebene steht.

Die Gesamtstrommenge des vom Felde H_{0z} verursachten horizontalen Wirbelstromes wird gegeben durch:

$$I^{(z)} = \int_{-1}^{+1} K_\phi^{(z)} h_2(\lambda_0,\, \mu)\, d\mu = -\frac{2cH_{0z}}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\, Q_1^1(\lambda_0)}\,. \tag{4.12}$$

Damit ergibt sich

$$K_\phi^{(z)} = \frac{I^{(z)}}{2c} \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2-\mu^2}}\,, \tag{4.13}$$

oder

$$K_\phi^{(z)} h_2(\lambda_0,\, \mu)\, d\mu = I^{(z)} \frac{dz}{2c\lambda_0}\,. \tag{4.14}$$

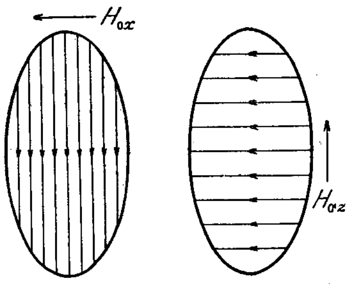


Abb. 4.2.

Berücksichtigt man, dass $h_2(h_0,\, \mu)\, d\mu$ die Breite der horizontalen Kreiszone auf dem Ellipsoide bedeutet, erkennt man aus Gl. (4.14), dass die Strommenge $\Delta I_\phi^{(z)}$ zwischen zwei Kreisen auf der Oberfläche $\lambda=\lambda_0$, $z=z_1$ und $z=z_2$, proportional zum vertikalen Abstand Δz zweier Kreise ist,

$$\Delta I_\phi^{(z)} = I^{(z)} \frac{\Delta z}{2a}\,, \qquad \Delta z = z_2 - z_1\,. \tag{4.15}$$

Also verteilen sich die auf einer vertikalen Ebene projizierten Stromlinien gleichentfernt nebeneinander (vgl. Abb. 4.2).

Ähnlich berechnet sich die Gesamtmenge des vom Querfeld H_{0x} verursachten Wirbelstromes nach

$$I^{(x)} = \int_0^\pi (K_z)_{\mu=0}\, k_3(\lambda_0,\, 0)\, d\phi\,, \tag{4.16}$$

oder

$$I^{(x)}=2\int_0^1 K_y h_2(\lambda_0,\ \mu)\,d\mu\,. \tag{4.16'}$$

Daraus folgt

$$I^{(x)}=-\frac{4cH_{0x}}{(\lambda_0^2-1)\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\,. \tag{4.17}$$

Mittels dieser Darstellung wird die vertikale Komponente der Wirbelstromdichte auf dem horizontalen Kreise $\lambda=\lambda_0$, $\mu=0$, gegeben durch

$$(K_z^{(x)})_{\mu=0}=\frac{I^{(x)}}{2c}\,\frac{\sin\phi}{\sqrt{\lambda_0^2-1}}\,. \tag{4.18}$$

Also berechnet sich die Strommenge zwischen zwei vertikalen Ellipsen $\lambda=\lambda_0$, $x=x_1$ und $x=x_2$ zu

$$\begin{aligned}\Delta I_z^{(x)}&=-\int_{\phi_1}^{\phi_2}(K_z^{(x)})_{\mu=0}\,h_3(\lambda_0,\ 0)\,d\phi\\ &=I^{(x)}\frac{\Delta x}{2b}\,,\qquad \Delta x=x_2-x_1\,.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Dies bedeutet, dass die auf der yz-Ebene projizierten Stromlinien miteinander gleichentfernt laufen (vgl. Abb. 4. 2).

Für den Grenzfall $\lambda_0=1$, wo das Ellipsoid ein dünner Stab von Länge $2a$ wird, verschwindet der Stromteil $I^{(x)}$, doch bleibt der Wert von $I^{(z)}$ endlich, wie aus Gl. (4. 12) geführt wird,

$$I^{(z)}=-2aH_{0z}\,,\qquad \lambda_0=1\,. \tag{4.20}$$

Für den anderen Grenzfall $\lambda_0=\infty$, wo das Ellipsoid eine Kugel vom Halbmesser a wird, ergeben sich

$$\left.\begin{aligned}K_\phi^{(z)}&=-H_{0z}\frac{3}{2}\sin\theta\,,\\ I^{(z)}&=-3aH_{0z}\,,\\ \Delta I_\phi^{(z)}&=I^{(z)}\frac{\Delta z}{2a}\,.\end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

4. 2. Abgeplattetes Rotationsellipsoid.

Die tangentialen Komponenten der Primär- und Sekundärfelder auf der Oberfläche $\lambda=\lambda_0$ des abgeplatteten Rotationsellipsoides werden dargestellt durch

$$\left.\begin{aligned}H_{0\mu}^{(z)}&=H_{0z}\lambda_0\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2+\mu^2}}\,,\\ H_{0\phi}^{(z)}&=0\,;\\ H_{0\phi}^{(x)}&=-H_{0x}\mu\sqrt{\frac{\lambda_0^2+1}{\lambda_0^2+\mu^2}}\cos\phi\,,\\ H_{0\phi}^{(x)}&=-H_{0x}\sin\phi\,,\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
H_\mu^{(z)} &= -H_{0z}\sqrt{\lambda_0^2+1}\,\frac{Q_1(i\lambda_0)}{Q_1^1(i\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2+\mu^2}}\,,\\
H_\phi^{(z)} &= 0\,;\\
H_\mu^{(x)} &= H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+1}}\,\frac{Q_1^1(i\lambda_0)}{iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_0^2+\mu^2}}\cos\phi\,,\\
H_\phi^{(x)} &= H_{0x}\frac{\lambda_0}{\sqrt{\lambda_0^2+1}}\,\frac{Q_1^1(i\lambda_0)}{iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\sin\phi\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.23)$$

Mittels der Gl. (4. 3), (4. 8), (4. 22) und (4. 23) erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
K_\phi^{(z)} &= -\frac{H_{0z}}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,Q_1^1(i\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2+\mu^2}}\,,\\
K_\mu^{(z)} &= 0\,;
\end{aligned}\right\}\qquad(4.24\text{a})$$

und

$$\left.\begin{aligned}
K_\phi^{(x)} &= \frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,\frac{2}{\sqrt{\lambda_0^2+1}}\,\frac{\mu\cos\phi}{\sqrt{\lambda_0^2+\mu^2}}\,,\\
K_\mu^{(x)} &= -\frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,\frac{2}{\lambda_0^2+1}\sin\phi\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.24\text{b})$$

Die Darstellungen der x-, y- und z-Komponenten der Wirbelstromdichte werden geführt aus Gl. (4. 9) und (3. 65) zu

$$\left.\begin{aligned}
K_x^{(z)} &= \frac{H_{0z}}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,Q_1^1(i\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2+\mu^2}}\sin\phi\,,\\
K_y^{(z)} &= -\frac{H_{0z}}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,Q_1^1(i\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2+\mu^2}}\cos\phi\,,\\
K_z^{(z)} &= 0\,;
\end{aligned}\right\}\qquad(4.25)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
K_x^{(x)} &= 0\,,\\
K_y^{(x)} &= -\frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,\frac{2}{\sqrt{\lambda_0^2+1}}\,\frac{\mu}{\sqrt{\lambda_0^2+\mu^2}}\,,\\
K_z^{(x)} &= \frac{H_{0x}}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,\frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2+1}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2+\mu^2}}\sin\phi\,.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.26)$$

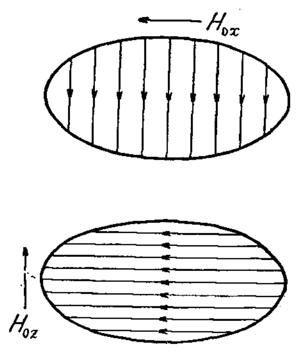


Abb. 4.3.

Abb. 4. 3 zeigt die Verteilung des Wirbelstroms auf dem abgeplatteten Rotationsellipsoide.

Ähnlich wie im vorigen Falle berechnen sich die Gesamt- und Teilstrommengen:

$$\left.\begin{aligned}
I^{(z)} &= -\frac{2cH_{0z}}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,Q_1^1(i\lambda_0)}\,,\\
\Delta I_\phi^{(z)} &= I^{(z)}\frac{\Delta z}{2a}\,;
\end{aligned}\right\}\qquad(4.27)$$

und

$$\left.\begin{aligned} I^{(x)} &= -\frac{4cH_{0x}}{(\lambda_0^2+1)\, iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,, \\ \Delta I_z^{(x)} &= I^{(x)}\,\frac{\Delta x}{2b}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

Für die sehr dünne Kreisscheibe $\lambda_0=0$, d. h. $b=0$, $c=a$, ergibt sich nach Gl. (4.24a)

$$K_\phi^{(z)} = -\frac{2H_{0z}}{\pi}\,\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} = -\frac{2H_{0z}}{\pi}\,\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,, \tag{4.29}$$

mit $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Daraus finden wir, dass die Stromdichte auf den Rande $\rho=a$ unendlich gross wird. Aber die Gesamtstrommenge bleibt endlich, und zwar nach Gl. (4.27) oder (4.29),

$$I^{(z)} = -\frac{4a}{\pi}\,H_{0z}\,, \tag{4.30}$$

wobei den Strom auf beiden Seiten der Scheibe berücksichtigt ist.

Die Strommenge, die innerhalb eines Kreises vom Halbmesser ρ strömt, wird gegeben durch:

$$i^{(z)} = \int_0^\rho K_\phi^{(z)} d\rho = I^{(z)}\,\frac{a-\sqrt{a^2-\rho^2}}{a}\,. \tag{4.31}$$

Setzt man

$$i^{(z)}/I^{(z)} = \eta \quad \text{und} \quad \rho/a = \xi\,,$$

so kann Gl. (4.31) wie folgend umgeformt werden

$$\xi^2 + (1-\eta)^2 = 1\,,$$
$$0 < \xi < 1\,, \qquad 0 < \eta < 1\,.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises auf der $\xi\eta$-Ebene, der den Mittelpunkt in dem Punkt (0, 1) und den Halbmesser 1 besitzt (vgl. Abb. 4.4). Man erkennt daraus, dass 60% vom Gesamtstrom ausserhalb des Kreises vom Halbmesser $0.8a$ fliesst.

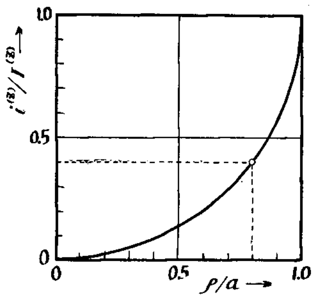


Abb. 4.4.

Dass auch das Qnerfeld einen Wirbelstrom auf sehr dünner Scheibe erzeugt, ist leicht festgestellt, indem man Grenzwert berechnet

$$\lim_{\lambda_0\to 0} \sqrt{\lambda_0^2+1}\;\, iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0) = -2\,.$$

Mittels dieses Werts ergeben sich nach Gl. (4.26),

$$K_y^{(x)} = \mp H_{0x}\,, \qquad K_z^{(x)} = K_x^{(x)} = 0\,, \tag{4.32}$$

und nach Gl. (4.28),

$$I^{(x)} = 2aH_{0x}\,. \tag{4.33}$$

4. 3. Die Richtung des Wirbelstromes.

Wie gezeigt im vorigen Abschnitt, beschreibt jede Wirbelstromlinie auf dem Rotationsellipsoid einen Kreis oder eine Ellipse. In dem rotationssymmetrischen Fall ist der Kreis horizontal, und also ist das Normal zur Ebene, auf welcher ein Stromfaden läuft, parallel zur Primärfeldrichtung gerichtet. Wenn das Querfeld auf ein Rotationsellipsoid wirkt, befindet sich die von einer Wirbelstromlinie beschriebene Ellipse in einer vertikalen Ebene, und daher auch hier ist das Normal zu dieser Ebene zum Primärfelde parallel gerichtet.

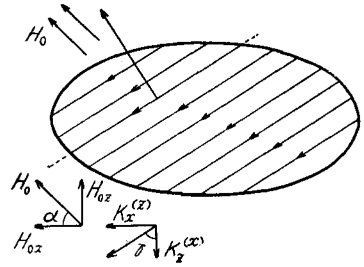


Abb. 4. 5.

Wenn aber das Primärfeld weder vertikal noch horizontal gerichtet ist, stimmt das Normal zur Ebene, die eine Stromlinie enthält, nicht mehr mit der Primärfeldrichtung ein (vgl. Abb. 4. 5). Dies kommt daraus hervor, dass die Wirbelstromkomponente in horizontaler Ebene und die in vertikaler Ebene verschiedenartig von den Rotationssymmetrie- und Querkomponenten des Primärfeldes abhängig sind. Und zwar auf gestrecktem Rotationsellipsoide ist die von der Querkomponente H_{0x} erzeugte Wirbelstromdichte $K^{(x)}$ stärker als die von der axialen Komponente H_{0z} erzeugte Stromdichte $K^{(z)}$. Dagegen ist auf abgeplattetem Rotationsellipsoide $K^{(x)}$ schwächer als $K^{(z)}$.

Projiziert man den Vektor der Wirbelstromdichte, die von dem parallel zur zx-Ebene gerichteten Primärfelde H_0 erzeugt wird, auf die zx-Ebene, so ergeben sich

für gestrecktes Rotationsellipsoid:

$$\left.\begin{aligned} K_z &= K_z^{(x)} = -\frac{H_0\cos\alpha}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^{1\prime}(\lambda_0)}\,\frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2-1}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2-\mu^2}}\sin\phi\,, \\ K_x &= K_x^{(z)} = \frac{H_0\sin\alpha}{\sqrt{\lambda_0^2-1}\,Q_1^1(\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2-\mu^2}}\sin\phi\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

und

für abgeplattetes Rotationsellipsoid:

$$\left.\begin{aligned} K_z &= K_z^{(x)} = \frac{H_0\cos\alpha}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,iQ_1^{1\prime}(i\lambda_0)}\,\frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2+1}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2+\mu^2}}\sin\phi\,, \\ K_x &= K_x^{(z)} = \frac{H_0\sin\alpha}{\sqrt{\lambda_0^2+1}\,Q_1^1(i\lambda_0)}\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda_0^2+\mu^2}}\sin\phi\,, \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

wo

$$\tan\alpha = H_{0z}/H_{0x} \tag{4.36}$$

gesetzt ist.

Die Neigung des Noamals zur Ebene, auf der eine Stromlinie sich befindet, ist gegeben durch

$$\cot\gamma = K_z/K_x . \tag{4.37}$$

Daraus folgt,

für gestrecktes Rotationsellipsoid:

$$\cot\gamma = 2\frac{1-(\lambda_0^2-1)\,Q_1(\lambda_0)}{1+(\lambda_0^2-1)\,Q_1(\lambda_0)}\cot\alpha , \tag{4.38}$$

und

für abgeplattetes Rotationsellipsoid:

$$\cot\gamma = 2\frac{1+(\lambda_0^2+1)\,Q_1(i\lambda_0)}{1-(\lambda_0^2+1)\,Q_1(i\lambda_0)}\cot\alpha . \tag{4.39}$$

Für die Kugel ist es leicht erkannt, dass die Wirbelstromebene stets senkrecht zum Primärfelde gerichtet ist, so

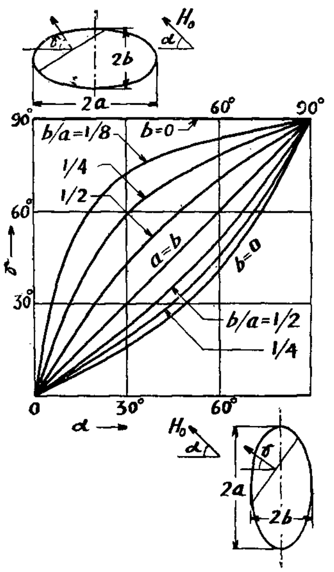


Abb. 4.6.

$$\gamma = \alpha . \tag{4.40}$$

Auf der Scheibe muss der Wirbelstrom stets horizontal fliessen, unabhängig von der Primärfeldrichtung. Dies wird auch aus Gl. (4.39) erkannt, indem man den Grenzwert von γ für $\lambda_0 = 0$ berechnet,

$$\lim_{\lambda_0\to 0}\cot\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma = \pi/2 . \tag{4.41}$$

Dagegen, für einen sehr dünnen Stab, wird der Wert von $\cot\gamma$ nach Gl. (4.38),

$$\lim_{\lambda_0\to 1}\cot\gamma = 2\cot\alpha ,$$

oder

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\tan\alpha\right) . \tag{4.42}$$

Abb. 4.6 zeigt die Abhängigkeit des Winkels γ von dem Winkel α für einige Rotationsellipsoide. Aus diesem Bild ist es deutlich erkannt, dass für abgeplattetes Rotationsellipsoid γ grösssr als α ist und für gestrecktes Rotationsellipsoid γ kleiner als α ist.

5. Zusammenfassung.

1. Das magnetische Feld, das um ein Rotationsellipsoid von endlicher Leitfähigkeit im axialen stationären Stromfelde erzeugt wird, ist mittels Ampèresches Durchflutungsgesetzes und elektrisches Potentials berechnet.

2. Die allgemeinen Darstellungen für quasistationäres magnetisches Feld des Rotationsellipsoides sind geführt. Die Sekundärfelder um ein unendlich gutleitendes

Rotationsellipsoid im homogenen Primärfelde sind als Randwertsaufgaben berechnet.

3. Einige Probleme über den Wirbelstrom auf einem Rotationsellipsoide sind betrachtet und zahlenmässige Beispiele sind gezeigt.

Zum Schluss möchte ich Herrn K. Kimura für seine Unterstützung meinen Dank aussprechen.

Schrifttum

1) F. Möglich: Beugungserscheinungen an Körpern von ellipsoidischer Gestalt, Ann. d. Phys., **83** (1927) 609-743.
2) F. Ollendorff: Potentialfelder der Elektrotechnik (1932), 278-325.
3) L. Page and N. L. Adams, Jr.: Electrodynamics (1940), 349-369.
4) T. Kiyono, K. Kimura and K. Kobayashi: Theoretical Study on the Electromagnetic Induction Method (I), (III), Geophysical Exploration (Japan), **7** (Sept. 1954) 121-127; **8** (March 1955) 16-19.
5) T. Kiyono, K. Kimura and K. Kobayashi: Study on the Induction Method of Electrical Prospecting, Memoirs of the Faculty of Eng., Kyoto Univ., **16** (July 1954) 147-156.
6) T. Kiyono and K. Sorachi: On the Electromagnetic Prospecting by Measuring the Phase Difference and Amplitude Ratio (3), Suiyokwai-Shi, **12** (June 1955) 623-628.
7) J. A. Stratton: Electromagnetic Theory (1941), 37.