Hrushovskiの強極小構造
(On Hrushovski's strongly minimal structures)

法政大学・経営学部　池田宏一郎*
Koichiro Ikeda
Faculty of Business Administration
Hosei University

強極小構造は「次元」が定義でき，モデル理論的に扱いやすい構造である．典型的な例として

1. 無限集合の構造，$(\mathbb{Z}, S)$,
2. $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\omega}, +)$，　$(\mathbb{Q}, +)$,
3. 代数閉体

などがある．1,2 では次元公式がなりたつが，3 では成り立たない．次元公式が成り立つ強極小構造は完全に分類されているが，次元公式が成り立たない強極小構造は代数閉体以外の例が存在するかどうかは知られていなかった．そこで Zilber は，次元公式が成り立たない強極小構造は代数閉体になるという予想をたてた．この予想に反例を与えたのが Hrushovski である．Hrushovski は，モデルの新しい構成法を開発し，次元公式が成り立たず無限群も定義できない強極小構造を作った．以下，この Hrushovski の結果を解説したい．

1　強極小構造

$M, N, \cdots$ は構造，$A, B, \cdots$ は構造の部分集合，$a, b, \cdots$ は構造の元，$\bar{a}, \bar{b}, \cdots$ は構造の元の有限列を表す．同様に $x, y, \cdots$ は変数，$\bar{x}, \bar{y}, \cdots$ は変数の有限列を表す．$A \cup B$ を AB，$\{\bar{a}\} \cup A$ を $\bar{a}A$ などで表す．$A \subset_{\omega} B$ は，A が B の有限部分集合であることを表す．論理式 $\varphi(\bar{x})$ が A にパラメータをもつとき $\varphi(\bar{x}) \in L(A)$ と書き，$\varphi(\bar{x})$ の B における解集合を $\varphi(B)$ と書く．

定義 1.1 (強極小構造) M を無限構造とする．

*The author is supported by Grants-in-Aid for Scientific Research (No.20K03725). This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

1. M が極小（minimal）とは，任意の論理式 $\varphi(x) \in L(M)$ に対して，$\varphi(M)$ あるいは $\neg\varphi(M)$ が有限になること．

2. M が強極小（strongly minimal）とは，任意の $N \equiv M$ が極小であること．

例 1.2 同値関係 E をもつ構造 M を，各自然数 n に対して濃度 n のクラスをちょうど 1 つもつ構造とする．この M は極小であるが強極小でない．なぜならば，コンパクト性定理より，無限濃度のクラスをもつ M の初等拡大 N が存在し，無限濃度をもつクラスから元 a を取ってきたとき，論理式 $E(x,a)$ は N を 2 つの無限集合に分割できてしまう．

定義 1.3 (代数的) M を構造，$A \subset M$ とし，$\varphi(\bar{x}) \in L(A)$ を解をもつ論理式とする．

1. $\varphi(\bar{x})$ が代数的であるとは，$\varphi(M)$ が有限であること．

2. $\bar{a}$ が A 上代数的であるとは，$\models \varphi(\bar{a})$ となる $\varphi(\bar{x}) \in L(A)$ が存在すること．

3. A 上代数的な元全体を代数閉包といい，$\mathrm{acl}_M(A)$，あるいは省略して $\mathrm{acl}(A)$ と書く．

注意 1.4 $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

補題 1.5 (交換原理) M を極小構造とし，$a, b \in M, A \subset M$ とする．このとき，$a \in \mathrm{acl}(bA) - \mathrm{acl}(A)$ ならば $b \in \mathrm{acl}(aA)$.

証明． $a \in \mathrm{acl}(bA)$ より，a を解にもつ代数的な $\varphi(x,b) \in L(bA)$ が存在．$\varphi(x,b)$ の解の個数を m とすると

$$\exists x\varphi(x,y) \text{ を満たす任意の } b' \in M \text{ に対して，} \varphi(x,b') \text{ の解の個数は } m$$

と仮定できる．$\varphi(a,y)$ が非代数的であるとして矛盾を導く．極小性より

$$\exists y\varphi(x,y) \text{ を満たす任意の } a' \in M \text{ に対して，} \varphi(a',y) \text{ は非代数的}$$

と仮定できる．$a \notin \mathrm{acl}(A)$ より，$\exists y\varphi(x,y)$ は非代数的なので，$(m+1)$ 個の解 $a_1, \cdots, a_{m+1} \in M$ を取ることができる．$\varphi(a_i,y)$ たちは非代数的なので，極小性より，$\bigwedge_i \varphi(a_i,y)$ の解が存在．そのひとつを $b^* \in M$ とする．このとき $\varphi(x,b^*)$ は $(m+1)$ 個以上の解をもってしまい矛盾．

定義 1.6 (次元) M を極小構造，$I, A \subset M$ とする．

1. I が独立であるとは，任意の $a \in I$ に対して $a \notin \mathrm{acl}(I - \{a\})$ が成り立つこと．

2. A の極大独立集合を A の基底という．交換性より，A の基底の濃度は取り方によらず一定である．その濃度を A の次元 $\dim(A)$ という．

定義 1.7 (局所モジュラー) M を極小構造とする．

1. M がモジュラー（modular）であるとは，任意の代数的閉な $A, B \subset M$ に対して，次元公式 $\dim(A \cup B) + \dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B)$ が成り立つこと．

2. M が局所モジュラー（locally modular）であるとは，$\dim(A \cap B) > 0$ を満たす任意の代数的閉な $A, B \subset M$ に対して，次元公式が成り立つこと．

以下では強極小構造の分類について考える．

定義 1.8 (set-like, group-like, field-like) 強極小構造 M に対して，M が set-like であるとは，任意の $A \subset M$ に対して $\mathrm{acl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{acl}(a)$ が成り立つこと．M が group-like であるとは，局所モジュラーであるが set-like でないこと．M が field-like であるとは，局所モジュラーでないこと．強極小構造の例は以下のように分類される．

	set-like	group-like	field-like
可算範疇的	無限集合	$((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega, +)$	$\times$
可算範疇的でない	$(\mathbb{Z}, S)$	$(\mathbb{Q}, +)$	代数閉体

可算範疇的で field-like な強極小構造は存在しないことが知られている（Cherlin-Harrington-Lachlan [2]）．

注意 1.9 代数閉体は field-like.

証明． M を超越次元が無限である代数閉体とする．モジュラーでないことを示せば十分. (局所モジュラーでないことを示すには，1 点を付け加えてからその点上で以下の同じ議論をすればよい.）$\{a, b, x\}$ を M の中の独立集合とし，$y = ax + b$ とする．$A = \mathrm{acl}(a, b), B = \mathrm{acl}(x, y)$ とするとき，$\dim(A) = 2, \dim(A \cup B) = 3$ はあきらか．$\{a, b, x\}$ が独立なので，$\dim(B) = 2$ もほぼあきらか．あとは $\dim(A \cap B) = 0$ を示せば十分．$\dim(A \cap B) > 0$ とすると，$d \in \mathrm{acl}(a, b) \cap \mathrm{acl}(x, y) - \mathrm{acl}(\emptyset)$ となる d が存在．再び $\{a, b, x\}$ の独立性より $d \notin \mathrm{acl}(x)$．よって交換原理より $y \in \mathrm{acl}(x, d)$.

局所モジュラーな強極小構造は，本質的に上の表の例のいずれかになることが知られている．一方，局所モジュラーでない強極小構造は，代数閉体以外は知られていなかった．そこで次の予想があった．

予想 1.10 (Zilber) 局所モジュラーでない強極小構造の理論は，代数閉体の理論と互いに翻訳可能.

2　ジェネリック構造

Hrushovski は 1980 年代後半に，モデル理論における 2 つの有名な予想（Zilber 予想と Lachlan 予想）を，反例を作ることで否定的に解決した [4, 5]．そのとき用いた無限構造を作る方法は，現在ではジェネリック構成法（あるいは Hrushovski 構成法）と呼ばれ，様々な例が作られている [1, 3, 6]．ここではそのジネリック構成法について解説する．

定義 2.1 (超グラフ) R を 3 項関係とする．R-構造 M が

- 対称性：任意の置換 σ に対して，$M \models \forall \bar{x}[R(\bar{x}) \to R(\sigma\bar{x})]$
- 非反射性：$M \models \forall x \forall y \forall z[R(x,y,z) \to (x \neq y \land y \neq z \land z \neq x)]$

を満たすとき，M は 超グラフ（hypergraph）という．

表記 2.2 超グラフ全体のクラスを $\mathbf{K}^*$，有限超グラフ全体のクラスを $\mathbf{K}_{\text{fin}}$ で表す．

定義 2.3 (局所次元) $A, B \in \mathbf{K}_{\text{fin}}$ とする．

1. A の頂点の数を $|A|$，A の超辺全体を R^A で表し，$|R^A|$ を $r(A)$ と書く．
2. A の局所次元（predimension）を $\delta(A) = |A| - r(A)$ で定義する．
3. $\delta(B/A) = \delta(B \cup A) - \delta(A)$ とする．

注意 2.4 $A, B, C \in \mathbf{K}_{\text{fin}}$ とする．

1. $\delta(B \cup C/A) = \delta(C/B \cup A) + \delta(B/A)$.
2. $C \cap A = \emptyset$ のとき，$\delta(C/A) = \delta(C) - r(C, A)$．ここで $r(C, A)$ は X と A の間の超辺の数.
3. 単調性：$A \subset B$ かつ $B \cap C = \emptyset$ のとき，$\delta(C/A) \geq \delta(C/B)$

1,2 は局所次元の定義からあきらか．3 は 2 から求まる．

定義 2.5 (閉部分集合) $A \subset B \in \mathbf{K}^*$ とする．

1. A, B が有限のとき，A が B の中で閉（closed）であるとは，任意の $X \subset B - A$ に対して $\delta(X/A) \geq 0$ が成り立つことである．記号で $A \leq B$ と書く．
2. A, B が有限とは限らない場合，任意の $C \subset_{\text{fin}} B$ に対し $A \cap C \leq C$ が成り立つとき，$A \leq B$ であると定義する．この定義が 1 と整合的であるためには下の注意が必要である．

注意 2.6 $A, B, C \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ に対し，$A \leq B$ かつ $C \subset B$ ならば $A \cap C \leq C$ である．この性質は単調性から導かれる．

定義 2.7 (閉包) $A \subset M \in \mathbf{K}^*$ に対して，A を含む M での最小閉集合を A の M における閉包（closure）といい，$\mathrm{cl}_M(A)$，あるいは省略して $\mathrm{cl}(A)$ と書く．

注意 2.8 閉包の存在は，注意2.6から導かれる性質「$A, B \leq M$ ならば $A \cap B \leq M$」で保証される．

表記 2.9 $\mathbf{K}_0 = \{A \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}} :$ 任意の $A' \subset A$ に対して $\delta(A') \geq 0\}$ とする．

仮定 2.10 $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_0$ を部分構造に関して閉じているクラスとする．

定義 2.11 (融合性) $\mathbf{K}$ は融合性（amalgamation property）をもつとは，$A \leq B \in \mathbf{K}, A \leq C \in \mathbf{K}$ ならば $B', C' \leq B' \cup C' \in \mathbf{K}$ を満たす $B' \cong_A B$ と $C' \cong_A C$ が存在すること．このとき $B' \cup C'$ を B と C の A 上の融合（amalgam）という．

定義 2.12 (ジェネリック構造) 可算構造 M が $\mathbf{K}$-ジェネリック構造であるとは

1. $A \subset_{\mathrm{fin}} M$ ならば $A \in \mathbf{K}$.
2. $A \leq B \in \mathbf{K}$ かつ $A \leq M$ ならば，$B' \leq M$ を満たす B の A 上のコピー B' が存在.
3. $A \subset_{\mathrm{fin}} M$ ならば $|\mathrm{cl}_M(A)|$ が有限.

補題 2.13 (存在) $\mathbf{K}$ が融合性をもつとき，$\mathbf{K}$-ジェネリック構造が存在.

証明. $A \leq B \in \mathbf{K}$ を満たす対 (B, A) をすべて並べたものを $\{(B_j, A_j)\}_{j \in \omega}$ とする．このとき $\mathbf{K}$ の要素の列 $(M_i)_{i \in \omega}$ を

- 各 i に対し，$M_i \leq M_{i+1} \leq \cdots$
- 各 $j \leq i$ に対し，$A_j \cong A \leq M_i$ ならば，$AB \cong A_j B_j$ を満たす B は A 上 M_{i+1} の中に閉集合として埋め込める.

を満たすように構成する．M_i まで作られたとする．A_0 と同型で M_i の中で閉なものをすべて並べてそれらを $A_0^0, \cdots, A_0^k$ とし，B_0 に対応するものを $B_0^0, \cdots, B_0^k$ とする．このとき B_0^0 と M_i の A_0^0 上融合が存在．さらに B_0^1 とその融合の A_0^1 上の融合が存在．この操作を続けてゆき，最後にできた融合を $M_{i,0}$ とする．次に $A_1, \cdots A_i$ に対しても同じ操作を行い，できた融合を $M_{i,1}, \cdots, M_{i,i}$ とする．融合の作り方から $M_i \leq M_{i,0} \leq M_{i,1} \leq \cdots \leq M_{i,i}$ はあきらか．このとき $M_{i+1} = M_{i,i}$ とすれば上の 2 つの条件を満たす.

このとき $M = \bigcup_{i\iota\omega} M_i$ は $\mathbf{K}$-ジェネリック構造である．実際，定義 2.12 の 1 と 3 はあきらか．2 については，$A, B \in \mathbf{K}$ を $A \leq M$ かつ $A \leq B$ を満たすように取る．このとき $A_j \cong A$ となる j が存在．M の作り方より $A \leq M_i$ を満たす i が存在．$i \geq j$ と仮定してもよい．このとき B は A 上 M_{i+1} の中に閉集合として埋め込める．$M_{i+1} \leq M$ であるので，そのコピーは M でも閉集合.

補題 2.14 (一意性) M, N を $\mathbf{K}$-ジェネリック構造とする．A, B をそれぞれ M, N の有限閉部分集合で $A \cong B$ とするならば $\mathrm{tp}(A) = \mathrm{tp}(B)$．特に，ジェネリック構造 M は同型を除いてただひとつ.

証明. 往復論法で示す．$M - A = (a_i)_{i\in\omega}, N - B = (b_i)_{i\in\omega}$ とする．このとき

- $A = A_0 = \mathrm{dom}(\sigma_0)$ かつ $B = B_0 = \mathrm{ran}(\sigma_0)$
- $A_i = \mathrm{dom}(\sigma_i)$ は有限，かつ，$B_i = ran(\sigma_i)$ は有限
- $A_i \leq M$ かつ $B_i \leq N$
- $a_i \in A_i$ かつ $b_i \in B_i$

を満たす M から N への部分同型写像の拡大列 $(\sigma_i)_{i\in\omega}$ を帰納的に構成する．σ_i まで作られたとする．i が奇数ならば，$M - A_i$ から一番順番の小さい a_k を選び，$A_{i+1} = \mathrm{cl}(\{a_k\} \cup A_i)$ とする．定義 2.12 の 3 より A_{i+1} は有限．$A_i A_{i+1} \cong B_i B$ を満たす B は B_i 上 N に閉集合として埋め込める．それを B_{i+1} とし，$\sigma_{i+1} : A_{i+1} \to B_{i+1}$ とする．i が偶数ならば，$N - B_i$ から一番順番の小さい b_k を選び，$B_{i+1} = \mathrm{cl}(\{b_k\} \cup B_i)$ とする．$B_i B_{i+1} \cong A_i A$ を満たす A は A_i 上 N に閉集合として埋め込める．それを A_{i+1} とし，$\sigma_{i+1} : A_{i+1} \to B_{i+1}$ とする．$\sigma = \bigcup_i \sigma_i$ とすれば，σ は M から N への同型写像．よって $\mathrm{tp}(A) = \mathrm{tp}(B)$．また，仮定 2.10 より $\mathrm{cl}_M(\emptyset) = \mathrm{cl}_N(\emptyset) = \emptyset$．よって $A = B = \emptyset$ とすれば $M \cong N$ を得る.

3 Hrushovski の例

ジェネリック構成法を用いて，局所モジュラーでない強極小構造を構成する.

定義 3.1 (極小拡大) $A \subsetneq B \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}$ とする.

1. B が A の極小拡大（記号で $A \leq_{\min} B$）であるとは，$A \leq B$，かつ，$A \subsetneq C \subsetneq B$ を満たす閉な C が存在しないこと.
2. B が A の 0-極小拡大（記号で $A \leq_{0-\min} B$）であるとは，$A \leq_{\min} B$ かつ $\delta(B/A) = 0$ であること.

3. B が A の 1-極小拡大（記号で $A \leq_{1-\min} B$）であるとは，$A \leq_{\min} B$ かつ $\delta(B/A) = 1$ であること．

注意 3.2 1. 極小拡大は，0-極小拡大か 1-極小拡大のいずれか．

2. $A \leq_{1-\min} B$ のとき，$\{b\} = B - A$ かつ $r(b, A) = 0$.

証明. (1) はあきらか．
(2)．$b \in B - A$ とする．B の極小性より $\delta(b/A) \neq 0$．よって $\delta(b/A) = 1$．注意 2.4 より $\delta(b/A) = \delta(b) - r(b, A) = 1$ であるので $r(b, A) = 0$．$A \leq_{1-\min} B$ より，$B - A = \{b\}$.

定義 3.3 (極小対) $X \subset D \in \mathbf{K}^*, X \cup Y \in \mathbf{K}_{\text{fin}}, X \cap Y = \emptyset$ とする．このとき (Y, X) が D の極小対（minimal pair）であるとは

1. $X \leq_{0-\min} X \cup Y$,

2. $X' \subsetneq X$ に対して，$r(Y, X - X') \neq 0$.

を満たすこと．

定義 3.4 $X \subset A$ を満たす極小対 (Y, X) に対して，A における Y の X 上のコピーで互いに素なものの最大数を $\chi_A(Y/X)$ で表す．極小対に対して自然数を対応させる関数 μ を $\mu(Y, X) > \delta(X)$ を満たすように取る．

補題 3.5 $A \leq_{|Y|} B \in \mathbf{K}_{\text{fin}}$ とし，(Y, X) を B の極小対で $\chi_B(Y/X) > \delta(X)$ を満たすとする．このとき次のいずれかが成り立つ．

1. $X \subset A$

2. $Y' \subset B - A$ を満たす $Y' \cong_X Y$ が存在．

証明. $X \not\subset A$ とする．$X_A = X \cap A, X_B = X - A$ とすると，$X_B \neq \emptyset$．$\chi_B(Y/X) = m$ とし，その証拠として，B における Y の X 上のコピー全体を $Y_1, \cdots, Y_m$ とする．さらにその中で，A に入っているものを $Y_1, \cdots, Y_r$，A にも $B - A$ にも入っていないものを $Y_{r+1}, \cdots, Y_{r+s}$ とする．X の極小性より，$i \leq r$ に対し $r(X_B, Y_i) > 0$ であるので，$\delta(X/A) = \delta(X_B/X_A) - r(X_B, A - X_A) \leq \delta(X_B/X_A) - r \leq \delta(X) - r$．$Y$ の極小性より，$\delta(Y_r \cdots Y_{r+s}/AX) \leq -s$．以上のことより，$0 \leq \delta(Y_r \cdots Y_{r+s}X/A) = \delta(X/A) + \delta(Y_s \cdots Y_{r+s}/AX) \leq \delta(X) - (r + s)$．よって $r + s \leq \delta(X)$ となり，$Y' \subset B - A$ を満たす X 上の Y のコピーが存在することになる．

定義 3.6 (自由融合) $A, B, C \in \mathbf{K}^*$ は $A = B \cap C$ を満たすとする．このとき B と C が A 上自由（free）であるとは，$R^{B \cup C} = R^B \cup R^C$ を満たすこと．記号で $B \perp_A C$ と書く．また $B \cup C$ を B と C の A 上の自由融合（free amalgam）といい，$B \oplus_A C$ と書く．

補題 3.7 (0-極小拡大の融合) $A \leq_{0-\min} B \in \mathbf{K}_\mu$ かつ $A \leq_{|B-A|} C \in \mathbf{K}_\mu$ のとき，次のいずれかが成り立つ．

1. $B \oplus_A C \in \mathbf{K}_\mu$
2. $B' \leq C$ を満たす $B' \cong_A B$ が存在

証明． $D = B \oplus_A C \notin \mathbf{K}_\mu$ と仮定．このとき $\chi_D(Y/X) > \mu(Y, X)$ となる D の極小対 (Y, X) が存在．$B \leq_{|B-A|} D$ であるので，補題より次の２つの場合に分けられる．
場合１：$X \subset B$ のとき．$B \in \mathbf{K}_\mu$ より，$Y' \not\subset B$ となる Y の X 上のコピー Y' が C の中に存在．Y' の極小性より $Y' \subset C - A$．X の極小性より $X \subset A$．$D \notin \mathbf{K}_\mu$ より，D の中に $Y'' \not\subset C$ となる Y の X 上のコピー Y'' が存在．Y の極小性より，$Y'' \subset B - A$ となる．B が A の 0-極小拡大なので，$Y'' = B - A$ となる．$B' = Y' \cup A$ とおけば，$B' \cong_A B$ かつ $B' \leq C$ を満たす．
場合２：$Y' \subset B - A$ となる Y の X 上のコピー Y' が存在するとき．X の極小性より $X \subset B$．$D \notin \mathbf{K}_\mu$ より，D の中に $Y'' \not\subset B$ となる Y の X 上のコピー Y'' が存在．Y の極小性より $Y'' \subset C - A$．再び X の極小性より $X \subset A$．よって場合１と同様に，$B' = Y'' \cup A$ とおけば，$B' \cong_A B$ かつ $B' \leq C$ を満たす．

定義 3.8 $A \subset B \in \mathbf{K}_{\mathrm{fin}}, n \leq \omega$ とする．このとき A が B で n-閉（記号で $A \leq_n B$）であるとは，$|X| \leq n$ を満たす任意の $X \subset B - A$ に対して $\delta(X/A) \geq 0$ であること．$n = \omega$ のとき，$A \leq_n B$ と $A \leq B$ は同値になる．

表記 3.9 $\mathbf{K}_\mu = \{A \in \mathbf{K}_0 : A$ の極小対 (Y, X) に対し $\chi_A(Y/X) \leq \mu(Y, X)\}$ とする．

補題 3.10 (融合性) $A \leq B \in \mathbf{K}_\mu, m \leq \omega, A \leq_{|B-C|+m} C \in \mathbf{K}_\mu$ とする．このとき $B \leq_m B'C', C' \leq B'C', B'C' \in \mathbf{K}_\mu$ を満たす $B' \cong_A B$ と $C' \cong_A C$ が存在．特に $\mathbf{K}_\mu$ は融合性をもつ．

証明． $m < \omega$ とする．$|B - A| + m$ に関する帰納法で示す．
場合１：$\delta(B_0/A) = 0$ かつ $A \subsetneq B_0 \subsetneq B$ となる B_0 が存在するとき．$A \leq AB_0 \leq B$ に注意．帰納法の仮定より，$C \leq B_0'C, B_0' \leq_{|B_0-A|+m} B_0'C, B'C \in \mathbf{K}_\mu$ を満たす $B_0' \cong_A B$ が存在．$B'B_0' \cong_A BB_0$ を満たす B' を取る．再び帰納法の仮定より，$B'' \leq_{|B-AB_0|+m} B''C, C \leq B''C, B''C \in \mathbf{K}_\mu$ を満たす $B'' \cong_{AB_0'} B'$ が存在．このとき $A \leq_m B''C, C \leq B''C, B''C \in \mathbf{K}_\mu$ が簡単に確かめられる．

場合2：場合1は成り立たないが $\delta(B/A)=0$ のとき．$A \leq_{0-\min} B$ であるので，補題3.7より求める融合が得られる．
場合3：場合1は成り立たないが $\delta(B/A)>0$ のとき．$A \subset B_0 \subset B$ かつ $A \leq_{\min} B_0$ を満たす B_0 を取る．場合1が成り立たないので $A \leq_{1-\min} B_0$．よって注意3.2より，$B_0 - A = \{b\}$ かつ $r(b,A)=1$．このとき $b'A \leq b'C, C \leq b'C, b'C \in \mathbf{K}_\mu$ となる $b' \cong_A b$ が存在．よって $m<\omega$ のときは示された．$m=\omega$ のときもほぼ同様．

M を $\mathbf{K}$-ジェネリック構造とする．

補題 3.11 M は飽和.

証明. N を M と初等同値な ω-飽和構造とする．補題3.10より，$A \leq B \in \mathbf{K}_\mu$ かつ $A \leq N$ ならば B は A 上 N に閉集合として埋め込める，ことが示せる．よって M と N は $L_{\infty,\omega}$-同値であるので，M も ω-飽和.

定義 3.12 (大域次元) M を構造とし，$\bar{a}, A \subset M$ とする．

1. $d_M(\bar{a}) = \delta(\mathrm{cl}_M(\bar{a}))$.
2. A が有限のとき $d_M(\bar{a}/A) = d_M(\bar{a}A) - d_M(A)$.
3. A が無限のとき，$d_M(\bar{a}/A) = \inf\{d_M(\bar{a}/A_0) : A_0 \subset_\omega A\}$.

補題 3.13 M は強極小.

証明. M が極小であることを示す．$A \leq_{\mathrm{fin}} M$ とする．
主張：$b \in M$ に対して，$d(b/A)=0$ ならば $b \in \mathrm{acl}(A)$.
証明：$B = \mathrm{cl}(bA)$ とすると $\delta(B/A)=0$，そこで $A = B_0 \leq_{0-\min} \cdots \leq_{0-\min} B_n = B$ となるように A 上 B を分解する．$B \in \mathbf{K}_\mu$ であるので，各 i に対し B_{i+1} の B_i 上のコピーは有限個．よって $\mathrm{tp}(B_{i+1}/B_i)$ は代数的なので，$\mathrm{tp}(B/A)$ は代数的．従って $b \in \mathrm{acl}(A)$.

$b_1, b_2 \in M - \mathrm{acl}(A)$ とする．主張より，$d(b_1/A) = d(b_2/A) = 1$．このとき $i=1,2$ に対し $\{b_i\} \cup A \leq M$ かつ $r(b_i, A) = 0$．よって $\mathrm{tp}(b_1/A) = \mathrm{tp}(b_2/A)$ を得る．従って M は極小.

補題 3.14 M は field-like.

証明. 注意1.9と同様，M がモジュラーでないことを示せば十分．$D = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c\}$ を超辺として $R(a_1, b_2, c), R(a_2, b_1, c)$ をもつ超グラフとする．$D \in \mathbf{K}_\mu$ であるので，$D \leq M$ としてよい．$A = \{a_1, a_2\}, B = \{b_1, b_2\}$ とする．$d(A) = d(B) = 2$ はあきらか．$d(A \cup B) = 3$ であるが，$d(A \cap B) = 0$．よってモジュラーでない．

注意 3.15 無限群が M に翻訳できないことをを示すには，さらにいくつかの準備が必要である．よってここでは省略する．詳しくは [8, 7] を参照.

定理 3.16 (Hrushovski [4]) 局所モジュラーでない強極小構造で無限群が翻訳できないものが存在する.

参考文献

[1] John T. Baldwin, An almost strongly minimal non-Desarguesian projective plane, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 342, 1994

[2] G. Cherlin, L. Harrington and A. H. Lachlan, $\aleph_0$-categorical, $\aleph_0$-stable structures, Ann. Pure Appl. Logic 28, 1985

[3] B. Herwig, Weight ω in stable theories with few types, J. Symbolic Logic 60, 1995

[4] E. Hrushovski, A new strongly minimal set, Ann. Pure Appl. Logic 62, 1993

[5] E. Hrushovski, A stable ω-categorical pseudoplane, Preprint, 1988

[6] K. Ikeda, Minimal but not strongly minimal structures with arbitrary finite dimensions, J. Symbolic Logic 66, 2001

[7] K. Tent and M. Ziegler, A course in model theory, Lecture Notes in Logic, Cambridge University Press, Cambridge, 2012

[8] M. Ziegler, An exposition of Hrushovski's new strongly minimal set, Ann. Pure Appl. Logic 164, 2013