環境プロジェクト策定に関わる非標準的なジャンプ過程
(Non-standard jump processes arising in environmental project planning)

島根大学　吉岡秀和
Shimane University, Hidekazu Yoshioka
同志社大学　辻村元男
Doshisha University, Motoh Tsujimura

1. はじめに：オルンシュタイン＝ウーレンベック過程

本稿では，京都大学数理解析研究所の共同研究（公開型）として 2022 年 9 月 7-9 日に開催された研究集会「ファイナンスの数理解析とその応用」での著者らの講演発表内容の一部，とりわけ河川流量の長記憶性のモデル化に焦点を絞って概説する．本稿の目的は，このモデル化のアイデアを紹介することである．本稿は河川流量という固有の対象に関わるものであるが，ファイナンスや保険等，全く異なる研究分野に現れる長記憶過程についても数理的に深く通じるものがあると期待できる．例えば，長記憶性が議論となるファイナンス分野の例としては，資産価格のボラティリティ等が挙げられる[1-3].

環境プロジェクトの策定においては，環境を支配する変数に対して数学的記述を与えて観測データからモデルを同定する，すなわち情報から知識を導くことが重要である．著者らは，河川という人間にとって身近であり持続可能な開発において欠かすことができない役割を担う固有の環境を対象として，環境プロジェクトの策定や最適化に関する研究に従事してきた．河川の環境を支配する変数のひとつが流量（単位時間あたりに河川断面を通過する水量）である．河川における流量の増減は降雨等の確率論的な擾乱に駆動されることから，既往研究では流量を確率過程として解釈した数理モデル化が行われてきた[4-5].

多くの既存モデルでは, 流量をジャンプ駆動の確率過程と見なしている. 最も簡素なモデルは, 1 次元の定常オルンシュタイン＝ウーレンベック（OU）過程として理解できる：

$$X_t = \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\rho\left(t-s\right)\right) \mathrm{d}L_s\,,\ \ t \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

ここに，X は流量，t は時刻，$\rho > 0$ は回帰速度，L は実軸上に拡張されたレヴィ過程[2]である．流量が非負値，すなわち河道における水の逆流を想定しない場合は，L としては正のジャンプのみを持つレヴィ過程を考えることが自然である．OU 過程については，様々な統計量を解析的に得ることができる．例えば，X の自己相関係数は以下のように指数関数として与えられる：

$$\mathrm{Cor}\left(X_t, X_{t+h}\right) = \exp\left(-\rho h\right),\ \ h \ge 0\,. \tag{2}$$

ここに，h は遅れ時間である．しかしながら，実際に得られる流量の時系列データは指数関数よりも遅く[6-7]，例えば以下のように代数的に減衰することが確認されている：

$$\mathrm{Cor}\left(X_t, X_{t+h}\right) = \left(\frac{1}{1+\beta h}\right)^{\alpha-1},\ \ h \ge 0\,. \tag{3}$$

ここに，$\alpha > 1$ および $\beta > 0$ は定数パラメータである．とくに，自己相関係数の $h \geq 0$ についての積分が発散する場合，その確率過程は長記憶性を持つという[8]：

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Cor}\left(X_t, X_{t+h}\right) \mathrm{d}h = +\infty \ \rightarrow \ X \text{ は長記憶性を持つ．} \tag{4}$$

すなわち，積分が発散するほどに自己相関係数の遠方 $h = +\infty$ での減衰が遅い確率過程は長記憶的である．式(3)では $\alpha \in (1,2]$ の場合に長記憶性が発現する一方, 式(2)ではこれが一切生じない．このことから, OU 過程は長記憶性を有する時系列データに適用できないことがわかる．実際に, 日本の山地河川における 1 時間毎の流量時系列データからは $\alpha = 1.75$ が得られている[7].

OU 過程は解析的な取り扱いが容易なモデルであることから，その利便性を確保しつつも長記憶性を有するモデルへと拡張することは工学的に重要性が高い．次節で論じる OU 過程の拡張が，まさにその事例に該当する．

2.　重ね合わせオルンシュタイン＝ウーレンベック過程

本節では，自己相関係数(3)を事例として OU 過程を拡張する方法論を紹介する．本来は数学的に込み入った議論が必要になるが，前述のように本稿の目的は方法論のアイデアを紹介することである．そのため，数学的な詳細については文献を参照されたい[2, 8-10].

式(3)の右辺は完全一様（Completely monotone）であることから，ラプラス変換の要領で指数関数を用いた積分

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+\beta h}\right)^{\alpha-1} &= \left(\int_0^{+\infty} \rho^{\alpha-2} \exp\left(-\frac{\rho}{\beta}\right) \mathrm{d}\rho\right)^{-1} \int_0^{+\infty} \rho^{\alpha-2} \exp\left(-\frac{\rho}{\beta}\right) \exp(-\rho h) \mathrm{d}\rho \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} p_{\alpha,\beta}(\rho) \mathrm{d}\rho\right)^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} p_{\alpha,\beta}(\rho) \exp(-\rho h) \mathrm{d}\rho\end{aligned} \tag{5}$$

として書き直すことができることに加えて，有限個の指数関数の重ね合わせとして任意の精度で近似することができる：

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+\beta h}\right)^{\alpha-1} &= \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} p_{\alpha,\beta}(\rho) \mathrm{d}\rho\right)^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} p_{\alpha,\beta}(\rho) \exp(-\rho h) \mathrm{d}\rho \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} b_i \exp(-a_i \rho)\end{aligned} . \tag{6}$$

ここに，$p_{\alpha,\beta}(\rho)$ は次数 α かつ形状パラメータ β であるガンマ分布の確率密度関数, n は自然数, $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ および $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ は正数列であり, 一般性を失わずに前者は狭義単調増加であると仮定する.

OU 過程の自己相関係数が単一の指数関数(2)で与えられること, ならびに自己相関係数の減衰速度が回帰速度に一致することに注意しながら式(6)を眺めると「代数的な減衰に対応する自己相関係数(3)を再現するためには, 互いに独立した OU 過程を足し合わせれば良いのではないか」という発想に辿り着く．さらに，足し合わせる OU 過程の数 n を無限大に飛ばすことで，長記憶性を有する新しい確率過程が得られることが期待される．その際，無限個の足し合わせをどのように数学的に解釈するべきかが肝要となる．

上述したモデル化の発想を数学的に実現するための道具が，（可算）無限次元の Lévy 過程に対応する数理概念となる Lévy bases である[10]．本稿では Lévy bases をレヴィ基底と訳す．本稿

で論じるような 1 変数レヴィ過程に基づく場合，レヴィ基底は以下で与えられる．ただし，以下で示す定義は文献[10]の DEFINITION 2.1 に基づく．$\mathbb{B}\left(\left(0,+\infty\right)\times\mathbb{R}\right)$ は $\left(0,+\infty\right)\times\mathbb{R}$ 上のボレル σ 代数をあらわす．

定義（レヴィ基底）

性質(a)-(c)を満足する実数値確率変数の族 $\Lambda=\left\{\Lambda\left(B\right):B\in\mathbb{B}\left(\left(0,+\infty\right)\times\mathbb{R}\right)\right\}$ をレヴィ基底と呼ぶ．

(a) $\Lambda\left(B\right)$ の分布は任意の $B\in\mathbb{B}\left(\left(0,+\infty\right)\times\mathbb{R}\right)$ に対して無限分解可能である．

(b) 任意の $n\in\mathbb{N}$ と任意の互いに素な集合 $B_1,B_2,...,B_n\in\mathbb{B}\left(\left(0,+\infty\right)\times\mathbb{R}\right)$ に対して，確率変数 $\Lambda\left(B_1\right),\Lambda\left(B_2\right),...,\Lambda\left(B_n\right)$ は互いに独立である．

(c) 任意の互いに素な集合 $\left\{B_i\right\}_{i=1,2,3,...}$ であり条件 $B_i\in\mathbb{B}\left(\left(0,+\infty\right)\times\mathbb{R}\right)$ （$i\in\mathbb{N}$）および $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\in\mathbb{B}\left(\left(0,+\infty\right)\times\mathbb{R}\right)$ を満足するものについて，$\sum_{i=1}^{+\infty}\Lambda\left(B_i\right)$ がほとんど確実に収束するとともに $\Lambda\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)=\sum_{i=1}^{+\infty}\Lambda\left(B_i\right)$ となる．

上記定義の性質(a)について「無限分解可能」とは，誤解を恐れずに述べると測度としての自分自身をある測度の畳み込みとして再現できることを意味する．これは，レヴィ過程が有する顕著な性質のひとつである．性質(a)により，性質(b)から互いに素な集合 $B_1,B_2,...,B_n\in\mathbb{B}\left(\left(0,+\infty\right)\times\mathbb{R}\right)$ に対して $\Lambda\left(B_1\right),\Lambda\left(B_2\right),...,\Lambda\left(B_n\right)$ を互いに独立したレヴィ過程のように理解できる．その際，性質(c)が $\Lambda\left(B_1\right),\Lambda\left(B_2\right),...,\Lambda\left(B_n\right)$ の総和の収束性を個数 n が無限大の場合においても保証している．

以上のように，レヴィ基底は加算個の互いに独立したレヴィ過程の和をあらわす数理モデルの候補である．ただし，無限分解可能な確率過程はレヴィ過程よりも広範囲の確率過程を含むために未だ抽象的であり，応用上は不便である．レヴィ基底についてさらに次式の性質[10]を要求すれば，レヴィ基底がレヴィ過程の性質を踏襲するものであることがより具体化される：

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\mathrm{i}u\Lambda\left(B\right)\right)\right]=\exp\left(\varphi\left(u\right)\Pi\left(B\right)\right),\quad u\in\mathbb{R},\quad B\in\mathbb{B}\left(\left(0,+\infty\right)\times\mathbb{R}\right). \tag{7}$$

ここに，i は $\mathrm{i}^2=-1$ を満たす虚数単位，$\mathbb{E}$ は期待値，Π はある正値確率変数の確率測度 π と 1 次元ルベーグ測度の直積である．また，φ は 1 次元の有界変動で正のジャンプのみを持つジャンプ型レヴィ過程 L の特性関数の指数部に対応し，次式で与えられる：

$$\varphi\left(u\right)=\int_0^{+\infty}\left(\exp\left(\mathrm{i}uz\right)-1\right)v\left(\mathrm{d}z\right),\quad u\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

ここに，v は L のレヴィ測度である．以下では，式(7)を満足するレヴィ基底のみを考える．

以上の準備のもとで，supOU 過程（superposition of OU processes）を定義することができるとともに，これが前節で述べた長記憶性を有し，なおかつ OU 過程の利便性を兼備するモデルであることを示すことができる．著者らが知る限り supOU 過程の日本語訳が無いが，例えば「重ね合わせオルンシュタイン＝ウーレンベック過程」と訳すことができよう．

さて，まずは次式で有限次元版の supOU 過程を定義する．

$$X_t=\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\rho_i\left(t-s\right)\right)\mathrm{d}L_{i,s},\quad t\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

ここに，正数列$\{\rho_i\}_{1\le i\le n}$は回帰速度に対応する狭義単調増加な正数列，$L_1, L_2, ..., L_n$は互いに独立したレヴィ過程であり，L_iのレヴィ測度は正数列$\{c_i\}_{1\le i\le n}$ただし$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$を用いて$c_i \nu$で与えられる．レヴィ基底の定義ならびに式(7)を鑑みると，正数列$\{c_i\}_{1\le i\le n}$が確率測度πに対応し，正数列$\{\rho_i\}_{1\le i\le n}$は集合列$\{B_i\}_{1\le i\le n}$（の一部分）に対応することが示唆される．式(9)で与えられるXは確率 1 で非負であり，その定常統計モーメントは線型常微分方程式系を解くことで解析的に得ることができる．例えば，

$$\text{平均：}\ \mathbb{E}[X_t] = M_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\rho_i} \quad \text{および} \quad \text{分散：}\ \mathbb{E}\left[\left(X_t - \mathbb{E}[X_t]\right)^2\right] = \frac{M_2}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\rho_i} \tag{10}$$

である．ただし，$M_k = \int_0^{+\infty} z^k \nu(dz) < +\infty$（$k = 1,2,3,...$）を仮定している．より高次のモーメントについては，例えば文献[7]を参照されたい．また，式(9)で与えられるXの自己相関係数は

$$\mathrm{Cor}(X_t, X_{t+h}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\rho_i}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\rho_i} \exp(-\rho_i h), \quad h \ge 0 \tag{11}$$

である．

さて，式(11)にあるとおり，式(6)最右辺のように指数関数の有限和の形となる自己相関係数を得ることができた．そのため，正数列$\{\rho_i\}_{1\le i\le n}$および$\{c_i\}_{1\le i\le n}$を適切に選択することで，式(6)最左辺にある代数的な減衰に対応する自己相関係数が得られるのではないかと期待できる．すなわち, 有限次元 supOU 過程が$n \to +\infty$の極限で何らかの自明ではない確率過程に収束することが期待できる．実際に，正数列$\{\rho_i\}_{1\le i\le n}$および$\{c_i\}_{1\le i\le n}$を適切に選択することで，式(9)のXが次式で与えられる確率過程Z，すなわち supOU 過程に法則の意味で収束するようにできる．

$$Z_t = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{t} \exp(-\rho(t-s)) \Lambda(\mathrm{d}\rho, \mathrm{d}s),\ t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

ここに，式(12)右辺における外側の積分は回帰速度ρ，内側の積分は時間sを対象としたものである．式(12)右辺は，レヴィ基底の性質から無限次元確率過程の積分として理解できる．すなわち，形式的には測度値の OU 過程

$$Z_t(\mathrm{d}\rho) = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\rho(t-s)) \Lambda(\mathrm{d}\rho, \mathrm{d}s),\ t \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

を回帰速度$\rho > 0$について積分したものとして理解できる，ただし，ここでの積分の意味は通常の実数値関数の積分ではなくレヴィ基底の意味である[10].

supOU 過程の有限次元近似は応用上有用である．そのためには，式(9)と式(12)の特性関数が厳密に得られることに注意しつつ，確率測度πを離散測度$\sum_{i=1}^{n} c_i \delta(\rho - \rho_i)$で近似すればよい[11-12]. ただし，正数列$\{\rho_i\}_{1\le i\le n}$は任意に決定しても良いわけではない．また，確率測度πも任意には取ることは許されず，少なくとも条件

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} \pi(\mathrm{d}\rho) < +\infty \tag{14}$$

を満足する必要がある．すなわち，原点$\rho = 0$近傍で確率測度πがある程度強い正則性を有して

いる必要がある．このことは，有限近似の統計モーメントの表現式(10)からも示唆される．

以上のように無限次元確率過程を有限次元確率過程で近似する方法は，マルコフリフト（Markovian lift）と呼ばれる．確率測度としてとくにガンマ分布$\pi = p_{\alpha,\beta}$を選ぶと，自己相関係数(3)が得られる：

$$\mathrm{Cor}\left(Z_t, Z_{t+h}\right) = \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} p_{\alpha,\beta}\left(\rho\right) \mathrm{d}\rho\right)^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} \exp\left(-\rho h\right) p_{\alpha,\beta}\left(\rho\right) \mathrm{d}\rho = \left(\frac{1}{1+\beta h}\right)^{\alpha-1}, \quad h \geq 0. \qquad (15)$$

ここでも，条件(14)の必要性を理解できよう．本稿には示さないが，各次統計的モーメントも解析的に得られる．

さいごに，注意すべき事項として <u>supOU 過程はそれ単体ではマルコフ過程とはならない</u>．supOU 過程を構成する各 OU 過程の値がわからなければ，その重ね合わせである前者の値もわからない．また，supOU 過程の値がわかったとしても，これを構成する各 OU 過程の値はわからない．有限次元近似の場合（$n > 1$）にも同様の問題が生じる．supOU 過程をマルコフ過程の見地から論じるためには，supOU 過程そのものに加えてその構成要素となる OU 過程すべてを考慮した連立確率微分方程式系を考える必要がある．

3. おわりに：課題と展望

本稿では，重ね合わせオルンシュタイン＝ウーレンベック過程（supOU 過程）について，著者らの研究バックグラウンドに依拠する限られた立場からではあるが概説した．supOU 過程によれば，河川の流量に限ることなく長記憶性を有する確率過程を解析的に取り扱うことができる．とくに, supOU 過程の各次統計的モーメントや自己相関係数の厳密な表現式が得られることが，実データからモデルを同定する際に大いに役立つであろう．本稿には示さなかったが, supOU 過程の特性関数が厳密に得られることから，その確率密度関数を特性関数のフーリエ変換により得ることができる．実用上, 差分法的な離散化を経たのちに離散フーリエ変換を行えばよい[12].

上述した利便性の一方，supOU 過程は既存の確率制御問題の枠組みに必ずしも上手く適合しないことに注意する必要がある．まず, supOU 過程は無限個の OU 過程の重ね合わせであることから，確率制御問題の最適性方程式であるハミルトン＝ヤコビ＝ベルマン方程式や前進後退確率微分方程式の空間次元は，一般に無限大となる．この場合，最適性方程式の数学解析はできても工学的な問題における数値計算が困難となり得る．ただし，マルコフリフトのような無限次元の確率微分方程式を有限次元近似する方法論を応用すれば，ある程度は問題を解決することができる．その際は，前節のように近似の意味について注意する必要がある．2 次制御問題等，最適性方程式の解の形状があらかじめ想定できる場合は，方程式の次元を有次元にまで縮約できるようである．

マルコフリフトについては, supOU 過程のサンプルパス生成に応用することが可能である．具体的には，互いに独立しており所定の回帰速度を有する OU 過程のサンプルパスを生成し，それらを足し合わせればよい[12]．その際のサンプルパス生成には，既存の汎用的な数値計算手法を用いることができる．ただし, 数値計算コストはマルコフリフトの自由度nに比例して増加する．そのため，サンプルパスの時間方向の離散化誤差およびパス数が有限に留まることに起因する統計誤差がバランスしたマルコフリフトの自由度選択が有効であろう．

さいごに, supOU 過程は OU 過程という線型の確率微分方程式の重ね合わせで得られている．

この重ね合わせについては，パラメータの適切なスケーリングを行ったうえで，アフィン過程（とくに連続時間の移入あり分岐過程：Continuous-time branching process with immigration）にも応用できることが確認されている[13]．マルコフリフトについても同様に応用が可能である．

謝辞

本研究は，京都大学数理解析研究所「共同利用・共同研究拠点事業」，ヤンマー資源循環機構助成事業（番号 KI0212021），住友財団環境研究助成（番号 203160），JSPS 科研費（番号 22K14441 および 22H02456）の支援を受けた．

引用文献

[1] Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. & Ebens, H. (2001). The distribution of realized stock return volatility. Journal of Financial Economics, 61(1), 43-76.

[2] Barndorff-Nielsen, O. E., & Stelzer, R. (2013). The multivariate supOU stochastic volatility model. Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics. Statistics and Financial Economics, 23(2), 275-296.

[3] Garnier, J., & Sølna, K. (2019). Option pricing under fast-varying long-memory stochastic volatility. Mathematical Finance, 29(1), 39-83.

[4] Botter, G., Basso, S., Rodriguez-Iturbe, I., & Rinaldo, A. (2013). Resilience of river flow regimes. Proceedings of the National Academy of Sciences, 110(32), 12925-12930.

[5] Yoshioka, H., & Yoshioka, Y. (2022). Stochastic streamflow and dissolved silica dynamics with application to the worst-case long-run evaluation of water environment. Optimization and Engineering, In press.

[6] Habib, A. (2020). Exploring the physical interpretation of long-term memory in hydrology. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 34(12), 2083-2091.

[7] Yoshioka, H. (2022). Fitting a superposition of Ornstein–Uhlenbeck processes to time series of discharge in a perennial river environment. ANZIAM Journal, 63, C84-C96.

[8] Fasen, V., & Klüppelberg, C. (2007). Extremes of supOU processes. In Stochastic Analysis and Applications (pp. 339-359). Springer, Berlin, Heidelberg.

[9] Barndorff-Nielsen, O. E. (2001). Superposition of Ornstein–Uhlenbeck type processes. Theory of Probability & Its Applications, 45(2), 175-194.

[10] Barndorff-Nielsen, O. E., & Stelzer, R. (2011). Multivariate supOU processes. The Annals of Applied Probability, 21(1), 140-182.

[11] Yoshioka, H., Tsujimura, M., Tanaka, T., Yoshioka, Y., & Hashiguchi, A. (2022). Modeling and computation of an integral operator Riccati equation for an infinite-dimensional stochastic differential equation governing streamflow discharge. Computers and Mathematics with Applications, In press.

[12] Yoshioka, H., Tanaka, T., Yoshioka, Y., & Hashiguchi, A. (2022). Statistical computation of a superposition of infinitely many Ornstein–Uhlenbeck processes, 20th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2022), September 19-25, 2022, Sheraton Hotel, Rhodes, Greece and Online, Oral presentation. 4pp article will appear in the conference proceedings.

[13] Yoshioka, H. (2022). A superposition of CBI processes: application to streamflow time series with matrix analytic methods. In The Eleventh International Conference on Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models (MAM11) Proceedings pp. 34-37. http://mam11.org/download/program/MAM11proceedingsV5.pdf#page=39