連続時間モデルに基づく業績連動ストック・オプションの価値評価

Valuation of Performance-Vested Stock Options
Based on a Continuous-Time Models

京セラコミュニケーションシステム株式会社
Kyocera Communication Systems Corporation
呂　思南　LYU Shinan

大和大学 政治経済学部
Faculty of Political Science and Economics, Yamato University
大阪大学 Osaka University
大西匡光　OHNISHI Masamitsu

EY 新日本有限責任監査法人
EY Ernst & Young ShinNihon LLC
田中寧々　TANAKA Nene [1]

1．はじめに

松本，大西，田中［1］では，売上げや利益などの業績に権利行使の条件を付したストック・オプションに対して，連続時間の株価と業績（強度）［率］との結合確率過程に基づく価値評価モデルを提案し，そのもとで，通常の金融オプションの価値評価のためのブラック・ショールズ価格式に業績条件を組み入れた形式を持つ価格式を導出した．本報告では，業績強度過程をドリフト付きブラウン運動からオルンシュタイン＝ウーレンベック過程へ，業績連動関数を断崖型から段階型へ，と拡張した上で，(a) 株価と業績との相関がストック・オプションの価値に与える影響についての比較静学の解析結果，(b) モデルに含まれるパラメータの推定方法について報告する．

2．業績条件付ストック・オプションの評価モデル

リスク中立確率測度 $\mathbb{Q}$ が導入された適当な確率空間の上で，下記の確率モデルを考える：

連続時間 $\mathbb{R}_+ \coloneqq [0,\infty)$上で企業活動がなされ，離散時間 $\mathbb{Z}_+ \coloneqq \{0,1,\dots\} \subset \mathbb{R}_+$において会計・財務上の報告・開示がなされるものとする．ただし，簡単のため，単位時間を 1（年）として，時点 $T-1$ から時点 Tまでの時間区間 $(T-1,T]$を第 T 期（間）と呼ぶ．ストック・オプションが付与される時刻を時点 0 とする．

[1] 本論文は，第３著者の田中寧々が大阪大学経済学部に提出した懸賞論文，第１著者の呂　思南が大阪大学大学院経済学研究科に提出した修士論文に依っているが，彼らの現在の所属での業務との関わりは無い．

２．１　株価モデル $(S_t, t \geq 0)$：

ブラック・ショールズ・モデルと同様，時点 t での株価 S_t は幾何ブラウン運動に従うと仮定する：

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma_S S_t \mathrm{d}W_t^S,\quad t \geq 0 \tag{1}$$

すなわち，

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^S\right\} = S_0 \mathrm{e}^{X_t},\quad t \geq 0 \tag{2}$$

あるいは，対数株価 $X_t \coloneqq \ln S_t - \ln S_0$は

$$\mathrm{d}X_t = \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma_S^2\right)\mathrm{d}t + \sigma^S \mathrm{d}W_t^S,\quad t \geq 0 \tag{3}$$

すなわち，

$$X_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma_S^2\right)t + \sigma_S W_t^S = \mu_X t + \sigma_S W_t^S,\quad t \geq 0 \tag{4}$$

ここで $(W_t^S, t \geq 0)$は標準ブラウン運動，$r \geq 0$は連続複利での無リスク利子率，$\sigma_S > 0$はボラティリティ・パラメータであり，$\mu_X \coloneqq r - \frac{1}{2}\sigma_S^2$ としている．このとき，$W_t^S \sim N(0,t)$により，$X_t \sim N(\mu_X t, \sigma_S^2 t)$ となる．

２．２　業績モデル $(C_n, n = 1, 2, \dots)$：

企業の業績は，通常，年度ごとや四半期ごとに開示される．この非連続的［離散時間的］な業績を連続時間モデルによって表現するために，まず，日々の業績よりもさらに小さい微小区間での業績強度［率］過程を考える．時点 $s \geq 0$での業績強度をY_sとする．

松本，大西，田中［1］では，まずはドリフト付きブラウン運動を用いて，

$$\mathrm{d}Y_s = \mu_Y \mathrm{d}s + \sigma_Y \mathrm{d}W_s^Y,\quad s \geq 0 \tag{5}$$

すなわち，

$$Y_s = Y_0 + \mu_Y s + \sigma_Y W_s^Y,\quad s \geq 0 \tag{6}$$

とモデル化した．ただし$(W_s^Y, s \geq 0)$は標準ブラウン運動，Y_0は初期値，μ_Y，σ_Yはパラメータである．また 2 つの標準ブラウン運動 $(W_t^S, t \geq 0), (W_s^Y, s \geq 0)$の相関を $\rho_{SY} \in [-1,1]$とする，すなわち$\mathrm{d}W_t^S \cdot \mathrm{d}W_t^Y = \rho_{SY}\mathrm{d}t$と仮定する．

つぎに，この業績強度過程 $(Y_s, s \geq 0)$ から累積業績過程を，

$$I_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}s = \int_0^t (Y_0 + \mu_Y s + \sigma_Y W_s^Y)\mathrm{d}s,\quad t \geq 0 \tag{7}$$

で定義し，$(Y_s, s \geq 0)$ に基づいて，第 n 期の業績 C_nを以下のように定義した：

$$C_n \coloneqq I_n - I_{n-1} = \int_{n-1}^n Y_s \mathrm{d}s,\quad n \geq 1 \tag{8}$$

一方，本報告では業績強度過程として，ドリフト付きブラウン運動を（形式的には）拡張して，下記のオルンシュタイン＝ウーレンベック過程（ＯＵ課程，短期金利のバシチェック・モデル）で記述する：

$$\mathrm{d}Y_s = (a - bY_s)\mathrm{d}s + \sigma_Y \mathrm{d}W_s^Y = b \cdot \left(\frac{a}{b} - Y_s\right)\mathrm{d}s + \sigma_Y \mathrm{d}W_s^Y,\quad s \geq 0 \tag{9}$$

ただし，a, b, σ_Yはパラメータである（$b = 0$ の場合が，形式的には，ドリフト付きブラウン運動となる）．

この確率微分方程式は簡単に解くことができて,

$$Y_s = \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \mathrm{e}^{-bs} + \sigma_Y \int_0^s \mathrm{e}^{-b\cdot(s-u)} \mathrm{d}W_u^Y = \mu_Y(s) + \sigma_Y \int_0^s \mathrm{e}^{-b\cdot(s-u)} \mathrm{d}W_u^Y, \quad s \geq 0 \tag{10}$$

を得る.ただし,

$$\mu_Y(s) \coloneqq \mathbb{E}[Y_s] = \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \mathrm{e}^{-bs}, \quad s \geq 0 \tag{11}$$

とする.先と同様,この業績強度過程 $(Y_s, s \geq 0)$から累積業績過程を求めれば,

$$\begin{aligned} I_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}s &= \int_0^t \left(\mu_Y(s) + \sigma_Y \int_0^s \mathrm{e}^{-b\cdot(s-u)} dW_s^Y\right) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \mu_Y(s) \mathrm{d}s + \sigma_Y \int_0^t \left(\int_0^s \mathrm{e}^{-b\cdot(s-u)} dW_u^Y\right) \mathrm{d}s, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{12}$$

を得る.ここで,確率的フビニ公式を用いれば,(12)式の最右辺の第 2 項は

$$\int_{s=0}^t \left(\int_{u=0}^s \mathrm{e}^{-b\cdot(s-u)} \mathrm{d}W_u^Y\right) \mathrm{d}s = \int_{u=0}^t \left(\int_{s=u}^t \mathrm{e}^{-b\cdot(s-u)} \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}W_u^Y = \int_{u=0}^t \beta(t-u) \mathrm{d}W_u^Y \tag{13}$$

と書ける,ただし,

$$\beta(t) \coloneqq \int_0^t \mathrm{e}^{-bs} \mathrm{d}s = \frac{1}{b}(1 - \mathrm{e}^{-bt}), \qquad t \geq 0 \tag{14}$$

と置いた.この関数 $\beta(\cdot)$ を用いれば,

$$\int_0^t \mu_Y(s) \mathrm{d}s = \int_0^t \left\{\frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \mathrm{e}^{-bs}\right\} \mathrm{d}s = \frac{a}{b} t + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \beta(t) \tag{15}$$

と計算されるので,累積業績過程 $(I_t, t \geq 0)$の表現:

$$\begin{aligned} I_t = \int_0^t Y_s \mathrm{d}s &= \int_0^t \mu_Y(s) \mathrm{d}s + \sigma_Y \int_0^t \left(\int_0^s \mathrm{e}^{-b\cdot(s-u)} \mathrm{d}W_u^Y\right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{a}{b} t + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \beta(t) + \sigma_Y \int_0^t \beta(t-u) \mathrm{d}W_u^Y, \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

を得る.

最後に,この累積業績過程 $(I_s, s \geq 0)$を使って,第 n 期の業績 C_nを以下のように定義する:

$$\begin{aligned} C_n \coloneqq I_n - I_{n-1} &= \int_{n-1}^n Y_s \mathrm{d}s \\ &= \int_{n-1}^n \mu_Y(s) \mathrm{d}s + \sigma_Y \left[\int_0^n \beta(n-u) \mathrm{d}W_u^Y - \int_0^{n-1} \beta\big((n-1)-u\big) \mathrm{d}W_u^Y\right] \\ &= \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \{\beta(n) - \beta(n-1)\} \\ &\quad + \sigma_Y \left[\int_0^n \beta(n-u) \mathrm{dW_u^Y} - \int_0^{n-1} \beta\big((n-1)-u\big) \mathrm{d}W_u^Y\right], \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{17}$$

業績強度過程 $(Y_s, s \geq 0)$はガウス過程であり,従って累積業績過程 $(I_s, s \geq 0)$も同様であるので,その確率法則は,平均関数:

$$\mu_I(t) \coloneqq \mathbb{E}[I_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t Y_s \mathrm{d}s\right] = \int_0^t \mathbb{E}[Y_s] \mathrm{d}s = \int_0^t \mu_Y(s) \mathrm{d}s = \frac{a}{b} t + \left(Y_0 - \frac{a}{b}\right) \beta(t), \quad t \geq 0 \tag{18}$$

と自己共分散関数:

$$\begin{aligned} \sigma_I(s,t) \coloneqq \mathrm{Cov}[I_s, I_t] &= \sigma_Y^2 \int_0^{\min\{s,t\}} \beta(s-u) \cdot \beta(t-u) \mathrm{d}u = \sigma_Y^2 \int_0^s \beta(s-u) \cdot \beta(t-u) \mathrm{d}u \\ &= \sigma_Y^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \left[s - \big(\beta(s) + \beta(t)\big) + \frac{1}{2}\big(\beta(t-s) + \beta(s+t)\big)\right], \quad 0 \leq s \leq t < \infty \end{aligned} \tag{19}$$

によって完全に記述される．とくに，分散関数は

$$\sigma_I^2(t) \coloneqq \sigma_I(t,t) \coloneqq \mathrm{Cov}[I_t, I_t] = \mathrm{Var}[I_t] = \sigma_Y^2 \int_0^t \beta(t-u)^2 \mathrm{d}u \\ = \sigma_Y^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \left[t - 2\beta(t) + \frac{1}{2}\beta(2t) \right], \quad t \geq 0. \tag{20}$$

また，対数株価過程（$X_s, s \geq 0$）と累積業績過程（$I_t, t \geq 0$）との（交差）共分散関数は

$$\sigma_{XI}(s,t) \coloneqq \mathrm{Cov}[X_s, I_t] = \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y \int_0^{\min\{s,t\}} \beta(t-u)\mathrm{d}u = \rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y \int_0^{\min\{s,t\}} \frac{1-\mathrm{e}^{-b\cdot(t-u)}}{b} \mathrm{d}u \\ = \begin{cases} \dfrac{\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y}{b}\left\{ s - \dfrac{\mathrm{e}^{-b\cdot(t-s)} - \mathrm{e}^{-b\cdot t}}{b} \right\} = \dfrac{\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y}{b}\{ s - \mathrm{e}^{-b\cdot(t-s)}\beta(s) \}, & 0 \leq s \leq t < \infty; \\ \dfrac{\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y}{b}\left\{ t - \dfrac{1-\mathrm{e}^{-b\cdot t}}{b} \right\} = \dfrac{\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y}{b}\{ t - \beta(t) \}, & 0 \leq t \leq s < \infty \end{cases} \tag{21}$$

と計算される．

これらから離散時間のガウス過程となる業績過程（$C_n, n \geq 1$）の平均関数，自己共分散関数，分散関数は，それぞれ

$$\mu_C(n) \coloneqq \mathbb{E}[C_n] = \mathbb{E}[I_n] - \mathbb{E}[I_{n-1}] = \mu_I(n) - \mu_I(n-1) \\ = \frac{a}{b} + \left(Y_0 - \frac{a}{b} \right)\{\beta(n) - \beta(n-1)\}, \quad n \geq 1 \tag{22}$$

$$\sigma_C(m,n) \coloneqq \mathrm{Cov}[C_m, C_n] = \mathrm{Cov}[I_m - I_{m-1}, I_n - I_{n-1}] \\ = \mathrm{Cov}[I_m, I_n] - \mathrm{Cov}[I_m, I_{n-1}] - \mathrm{Cov}[I_{m-1}, I_n] + \mathrm{Cov}[I_{m-1}, I_{n-1}] \\ = \sigma_Y^2 \cdot \frac{1}{b^2} \\ \cdot \left[-\frac{1}{2}\beta(n-m-1) + \beta(n-m) - \frac{1}{2}\beta(n-m+1) + \frac{1}{2}\beta(n+m-2) \right. \\ \left. - \beta(n+m-1) + \frac{1}{2}\beta(n+m) \right], \quad 0 \leq m-1 < m \leq n-1 < n < \infty \tag{23}$$

$$\sigma_C^2(n) \coloneqq \sigma_C(n,n) = \mathrm{Var}[C_n] = \mathrm{Var}[I_n - I_{n-1}] = \mathrm{Cov}[I_n - I_{n-1}, I_n - I_{n-1}] \\ = \mathrm{Var}[I_n] - 2\mathrm{Cov}[I_{n-1}, I_n] + \mathrm{Var}[I_{n-1}] \\ = \sigma_I^2(n) - 2\,\sigma_I(n-1,n) + \sigma_I^2(n-1) \\ = \sigma_Y^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \left[1 - \beta(1) + \frac{1}{2}\beta(2n-2) - \beta(2n-1) + \frac{1}{2}\beta(2n) \right], \quad n \geq 1. \tag{24}$$

と表現される．

最後に，対数株価過程($X_s, s \geq 0$)と業績過程（$C_n, n \geq 1$）の（交差）共分散関数は

$$\sigma_{XC}(s,t) \coloneqq \mathrm{Cov}[X_s, C_t] = \mathrm{Cov}[X_s, I_t - I_{t-1}] = \mathrm{Cov}[X_s, I_t] - \mathrm{Cov}[X_s, I_{t-1}] \\ = \sigma_{XI}(s,t) - \sigma_{XI}(s,t-1), \quad 0 \leq s < \infty;\ 1 \leq t < \infty \tag{25}$$

を計算することで求められる．とくに，$s = t = T$のときは，

$$\sigma_{XC} \coloneqq \sigma_{XC}(T,T) = \mathrm{Cov}[X_T, C_T] = \mathrm{Cov}[X_T, I_T - I_{T-1}] = \mathrm{Cov}[X_T, I_T] - \mathrm{Cov}[X_T, I_{T-1}] \\ = \sigma_{XI}(T,T) - \sigma_{XI}(T,T-1) = \frac{\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y}{b}\{1 - (\beta(T) - \beta(T-1))\} \\ = \frac{\rho_{SY}\sigma_S\sigma_Y}{b}\left\{ 1 - \frac{\mathrm{e}^{-b\cdot(T-1)} - \mathrm{e}^{-b\cdot T}}{b} \right\}, \quad 1 \leq T < \infty \tag{26}$$

と計算される．

２．３　リスク中立オプション評価 $P_T, T \geq 1$：

まず，満期（行使日）T を持ち，業績 C_Tに下限 L の条件の付けられた断崖型業績連動ストック・

オプションの価格 $P_T(L)$ は，リスク中立評価公式により，下記の通りに計算される．

$$P_T(L) \coloneqq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT} g(S_T)\cdot h(C_T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-rT}[S_T - K]_+ \cdot 1_{\{C_T>L\}}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}[S_T-K]_+; C_T > L], \quad (27)$$

ただし，

$$g(S_T) \coloneqq [S_T - K]_+ \coloneqq \max\{S_T - K, 0\} \quad (28)$$

は通常のコール・オプションのペイオフ関数で

$$h(C_T) \coloneqq 1_{\{C_T>L\}} \coloneqq \begin{cases} 1, & C_T > L; \\ 0, & C_T \le L \end{cases} \quad (29)$$

は（断崖（cliff）型）業績連動関数である，ここで，

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X;A]$：事象 A上に制限された確率変数 Xの期待値，[2]

r：無リスク利子率，

T：満期，

S_T：時点 Tにおける株価，

K：権利行使価格，

C_T：第 T期における業績，

L：ストック・オプション行使のための業績の下限，

e^{-rT}：現在価値への割引率．

３．業績条件付ストック・オプションの価格式の導出

第 2 節でのモデルのもとでは対数株価 X_Tと業績 C_Tとは 2 変量正規分布に従うことに注意する：

$$\begin{pmatrix} X_T \\ C_T \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \sigma_{XC} \\ \sigma_{XC} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right] = N\left[\begin{pmatrix} \mu_X T \\ \mu_C \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_S^2 T & \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} \\ \rho_{XC}\sigma_S\sigma_C\sqrt{T} & \sigma_C^2 \end{pmatrix}\right] \quad (30)$$

ただし，σ_{XC}，ρ_{XC}も所与の諸パラメータから導出される．そこで，式(27)を以下のように書き換える．

$$P_T(\mathrm{L}) = S_0 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{X_T - rT}; X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right] - K\mathrm{e}^{-rT}\mathbb{Q}\left(X_T > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right), C_T > L\right) \quad (31)$$

式(31)の最右辺を業績 C_T について条件付け，標準正規分布の累積分布関数 $\Phi(z)$ を用いて表現すれば，ブラック・ショールズ・モデルによるオプション価格式と対比的に，

$$\begin{aligned} P_T(L) = \int_{c_T=L}^{\infty} \Bigg\{ & S_0 \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X T + (1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T + \rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T}\left(\frac{c_T-\mu_C}{\sigma_C}\right)}{\sqrt{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}}\right) \\ & \times \exp\left((\mu_X - r)T + \frac{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}{2} + \rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T}\left(\frac{c_T-\mu_C}{\sigma_C}\right)\right) \\ & - K\mathrm{e}^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mu_X T + \rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T}\left(\frac{c_T-\mu_C}{\sigma_C}\right)}{\sqrt{(1-\rho_{XC}{}^2)\sigma_S^2 T}}\right)\Bigg\} f_{C_T}(c_T)\mathrm{d}c_T \end{aligned} \quad (32)$$

と表される，ただし，

[2] 期待値演算がリスク中立確率測度 $\mathbb{Q}$ のもとでなされることを協調したいときにのみ $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\cdot]$ と明示的に表記する．

$$f_{C_T}(c_T) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_C^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{c_T-\mu_C}{\sigma_C}\right)^2\right\} \tag{33}$$

あるいは，相関 ρ_{XC} の 2 変量標準正規分布関数 $\Phi_2(x,y;\rho_{XC})$ を用いて，以下のようにも整理される [3]：

$$\begin{aligned} P_T(L) = {} & S_0\Phi_2\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\mu_X T}{\sigma_S\sqrt{T}}+\sigma_S\sqrt{T}, \frac{\mu_C-L}{\sigma_C}+\rho_{XC}\sigma_S\sqrt{T}; \rho_{XC}\right) \\ & -K\mathrm{e}^{-rT}\Phi_2\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\mu_X T}{\sigma_S\sqrt{T}}, \frac{\mu_C-L}{\sigma_C}; \rho_{XC}\right) \end{aligned} \tag{34}$$

一般的な業績連動関数 $h(\cdot)$ を持つ業績連動のストック・オプション価値評価公式：

$$P_T = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT} g(S_T)\cdot h(C_T)]. \tag{35}$$

において，段階的業績連動関数 $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が，例えば，

(i)　上下に有界;

(ii)　単調非減少;

(iii)　$h(-\infty) := \lim_{C\to-\infty} h(C) = 0$;

(iv)　右連続,

であれば，ルベーグ＝スティルチェス積分を用いて，

$$h(C) = \int_{-\infty}^{C} \mathrm{d}h(L) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{C>L\}}\mathrm{d}h(L) = \int_{\mathbb{R}} 1_{\{C>L\}}\mathrm{d}h(L) \tag{36}$$

と書けることから，フビニの定理を用いて，下記の価格式を得ることができる：

$$P_T = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT} g(S_T)\cdot h(C_T)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} g(S_T)\cdot 1_{\{C_T>L\}}\right]\mathrm{d}h(L) = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(L)\mathrm{d}h(L). \tag{37}$$

4．パラメータの統計的推定

評価モデルにおける諸パラメータについては, まずは対数株価 $(X_t, t \geq 0)$ の（準）連続時間観測, あるいは離散時間観測によってパラメータ σ_S を推定したのち，離散時間での対数株価・業績 $((X_n, C_n), n = 1,2,\ldots)$ の同時観測により，業績強度過程の初期値 Y_0，パラメータ a, b, σ_Y，そして ρ_{SY} を，原則，最尤推定法によって（数値的最適化手法を用いて）推定すれば良いが，実務上は，より簡便な方法の開発は今後の課題である．

5．ストック・オプション価格 P_T の相関係数 ρ_{SY} への依存性

一般的なペイオフ関数 $g(\cdot)$ と段階的業績連動関数 $h(\cdot)$ のもとでの業績連動のストック・オプション価値評価公式：

$$P_T = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT} g(S_T)\cdot h(C_T)]. \tag{38}$$

に対して，下記の比較静学結果を得る．

---

[3] 吉羽要直氏（東京都立大学教授）より，相関を持つ 2 変量正規分布の累積分布関数を用いた，積分を含まない，簡潔な表現（34）が可能であることを御教示頂いた．ここに記して感謝の意を表する．

定理

可積分性に関する適当な正則条件のもとで，段階的業績連動のストック・オプション価格 P_T は，ペイオフ関数 $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$，段階的業績連動関数 $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ がともに非負値の単調非減少関数ならば, 株価過程 $(S_t, t \geq 0)$ と業績強度過程 $(Y_s, s \geq 0)$ とをそれぞれを駆動する 2 つのブラウン運動間の相関係数 ρ_{SY} の単調非減少関数である．

証明： 付録参照.

□

注： さらに一般的には，各期ごとの業績 $C_1, C_2, \ldots, C_T$ について，段階的業績連動関数 $h_1, h_2, \ldots, h_T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ が設定されて，満期において

$$g(S_T) \cdot h_1(C_1) \cdot h_2(C_2) \cdot \cdots \cdot h_T(C_T) \tag{39}$$

が支払われる業績連動のストック・オプションのリスク中立価値評価式：

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT} g(S_T) \cdot h_1(C_1) \cdot h_2(C_2) \cdot \cdots \cdot h_T(C_T)]$$

においても同様の比較静学結果を得る．

6.　数値計算例

業績条件付きストック・オプションの価値評価ついて，実データを用いた数値計算結例を得ているが，紙面の制約上，省略する．

7．謝辞

本研究は国際共同利用・共同研究拠点京都大学数理解析研究所の支援を受けている．また，日本学術振興会科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）課題番号：21H04399，課題番号：22K01573による支援も受けている．ここに記して感謝の意を表する．

参考文献

[1] 大西匡光，田中寧々（2021),「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価の方法」，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2021 年度春季研究発表会アブストラクト集，2021.

[2] 株式会社プルータス・コンサルティング編（2020),「新株予約権等・種類株式の発行戦略と評価：資金調達、インセンティブ、M＆A、事業承継での活用」，中央経済社.

[3] 椎葉　淳，瀧野一洋（2010),「ストック・オプションの評価誤差：理論・実証研究からの示唆」，名古屋商科大学総合経営・経営情報論集，第 54 巻 2 号, pp. 89-107.

[4] 田中寧々（2020),「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」，大阪大学経済学部，懸賞論文，2020 年 1 月.

[5] 中村慎二「新しい株式報酬制度の設計と活用ー有償ストック・オプション＆リストリクテッド・ストックの考え方」中央経済社，2017.

[6] 中村慎二「ストック・オプション評価上の問題～業績条件の取扱い」ディスクロージャー ＆ IR，Vol. 15，pp. 1—10，2020 年 11 月.

[7] 松本敏幸，大西匡光，田中寧々「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」日本オペレーションズ・リサーチ学会 2020 年度春季研究発表会アブストラクト集，2020.

[8] 松本敏幸，大西匡光，田中寧々（2021),「連続時間モデルに基づく業績条件付きストック・オプションの価値評価」,「ファイナンスの数理解析とその応用」，京都大学数理解析研究所講究録，No. 2173，pp. 73―94，2021.

[9] Bettis, J. C. , Bizjak, J. , Coles, J. , & Kalpathy, S. . (2018), Performance-Vesting Provisions in Executive Compensation, *Journal of Accounting and Economics*, 66 (1), pp. 194―211.

[10] Hull, John C. (2015), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 9th Ed., Pearson, 2015.

[11] Lyu Shinan (2022), *Pricing of Performance-Vesting Employee Stock Options: Based on Variable Performance Conditions*, Master Thesis, Graduate School of Economics, Osaka University, January, 2022.

[12] Müller, A. (2001), Stochastic Ordering of Multivariate Normal Distributions, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **53** (3), pp. 567―575.

[13] Ross, S. M. (1996), *Stochastic Processes*, 2nd Ed., Wiley.

[14] Rüschendorf, L. (2013), *Mathematical Risk Analysis: Dependence, Risk Bounds, Optimal Allocations and Portfolios*, Springer.

[15] Tong, Y. L. (1990), *The Multivariate Normal Distribution*, Springer.

[16] Wainwright, M. J. (2019), *High-Dimensional Statistics; A Non-Asymptotic Viewpoint*, Cambridge University Press.

A. 付録 [4]

下記の共分散不等式は良く知られている（例えば，Ross [12]）.

補題 A.1［共分散不等式］

X を実数値確率変数とし，$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を単調非減少関数，$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を単調非減少（非増加）関数とする．このとき，

$$\mathrm{Cov}\,[g(X), h(X)] \geq (\leq)\ 0,$$

すなわち，

$$\mathbb{E}[g(X)\, h(X)] \geq (\leq)\ \mathbb{E}[g(X)]\, \mathbb{E}[h(X)]$$

が成り立つ，ただし，上記のすべての期待値は存在するものと仮定する．

上記の補題から直接的に下記の系を得る．

[4] 付録で採用する記法（例えば，X, Y,等）は本文とは異なるので注意されたい．

系 A.1

確率ベクトル (X,Y) が相関 $\rho_{XY} \in [-1,1]$ を持つ 2 変量の正規分布:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right]$$

に従うものとし，$g,\ h$: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$を単調非減少関数とすると，

$$\rho_{XY} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 \text{ のとき } \mathbb{E}[g(X)\,h(Y)] \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} \mathbb{E}[g(X)]\,\mathbb{E}[h(Y)]$$

が成り立つ［複号同順］.

証明：標準化

$$X' := \frac{X-\mu_X}{\sigma_X};\ Y' := \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$$

を行えば,

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho_{XY} \\ \rho_{XY} & 1 \end{pmatrix}\right],$$

すなわち，確率ベクトル (X',Y') は相関 ρ_{XY} を持つ 2 変量の標準正規分布に従う．そこで，確率ベクトル (U,V)を無相関な 2 変量の標準正規分布：

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

に従うものとすれば,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} =_d \begin{pmatrix} \sigma_X U + \mu_X \\ \sigma_Y\left\{\rho_{XY}U + \sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\} + \mu_Y \end{pmatrix}$$

が成り立つ．したがって，$\rho_{XY}\begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix}0$ のとき,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X)\cdot h(Y)] &= \mathbb{E}\left[g(\sigma_X U+\mu_X)\cdot h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[g(\sigma_X U+\mu_X)\cdot h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\middle| V\right]\right] \\
&\begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(\sigma_X U+\mu_X)|V]\cdot\mathbb{E}\left[h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\middle| V\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[g(\sigma_X U+\mu_X)]\cdot\mathbb{E}\left[h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\middle| V\right]\right] \\
&= \mathbb{E}[g(\sigma_X U+\mu_X)]\cdot\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\middle| V\right]\right] \\
&= \mathbb{E}[g(\sigma_X U+\mu_X)]\cdot\mathbb{E}\left[h\left(\sigma_Y\left\{\rho_{XY}U+\sqrt{1-\rho_{XY}^2}V\right\}+\mu_Y\right)\right] = \mathbb{E}[g(X)]\cdot\mathbb{E}[h(Y)].
\end{aligned}$$

ただし，第 3 の等号（不等号）［複号同順］は補題 4.1［共分散不等式］から成り立つ.

□

上記の系から，満期 T における対数株価 X_T と業績 C_Tとが確率的に独立［無相関］であるとした際のストック・オプションの価値評価

$$P_T = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}g(S_T)\cdot h(C_T)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathrm{e}^{-rT}g(S_T)]\cdot\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(C_T)],$$

すなわち，ブラック＝ショールズ式に連動業績の期待値を乗じた値は，それらの相関係数 ρ_{XC} が正（負）のとき，したがって，遡って，株価過程と業績強度過程それぞれを駆動する2つのブラウン運動間の相関係数 ρ_{SY} が正（負）のときには，過小評価（過大評価）となることが分かる．

つぎの象限順序（orthant orderings）の概念を準備する（例えば, Rüschendorf [13], Tong [14]）．これらの確率順序概念は，信頼性理論，極値理論，等の応用確率論，数理統計学の分野で，多変量の確率ベクトルにおいて，それらを構成する確率変数間の（正の）確率的依存性の強さを比較する際に用いられてきた．

定義 A.1［象限順序］

$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} = \{1,2,\dots\}$ とする．n 変量の確率ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)$，$\boldsymbol{Y} = (Y_1,\dots,Y_n)$ に対して：

(1)　［上方象限順序（Upper Orthant Order)］$\boldsymbol{X} \le_{uo} \boldsymbol{Y}$ が成り立つとは,

$$\mathbb{P}(X_1 > z_1,\dots,X_n > z_n) \le \mathbb{P}(Y_1 > z_1,\dots,Y_n > z_n),\ \forall \mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^n;$$

(2)　［下方象限順序（Lower Orthant Order)］$\boldsymbol{X} \le_{lo} \boldsymbol{Y}$ が成り立つとは,

$$\mathbb{P}(X_1 \le z_1,\dots,X_n \le z_n) \ge \mathbb{P}(Y_1 \le z_1,\dots,Y_n \le z_n),\ \forall \mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{R}^n;$$

(3)　［諧調順序（Concordance order)］$\boldsymbol{X} \le_c \boldsymbol{Y}$ が成り立つとは, $\boldsymbol{X} \le_{uo} \boldsymbol{Y}$ かつ $\boldsymbol{X} \le_{lo} \boldsymbol{Y}$, すなわち,

$$\left.\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_1 > z_1,\dots,X_n > z_n) \le \mathbb{P}(Y_1 > z_1,\dots,Y_n > z_n);\\ &\mathbb{P}(X_1 \le z_1,\dots,X_n \le z_n) \ge \mathbb{P}(Y_1 \le z_1,\dots,Y_n \le z_n),\end{aligned}\right. \quad \forall \mathbf{z} = (z_1,\dots,z_n) \in R^n.$$

注 A.1

(1) $n = 1$ の場合（$X = \boldsymbol{X} = X_1$，$Y = \boldsymbol{Y} = Y_1$ とすれば）

$$X \le_{uo} Y \Leftrightarrow X \le_{lo} Y \Leftrightarrow X \le_c Y (\Leftrightarrow X \le_{st} Y);$$

(2) $n = 2$ で，$\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ と $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ の周辺分布が等しい，すなわち，

$$X_1 =_d Y_1,\quad X_2 =_d Y_2$$

が成り立つ場合,

$$\boldsymbol{X} \le_{uo} \boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} \le_{lo} \boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} \le_c \boldsymbol{Y}.$$

下記の補題も直接的に示すことができる．

補題 A.2

$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} = \{1,2,\dots\}$ とする．n 変量の確率ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1,\dots,X_n)$，$\boldsymbol{Y} = (Y_1,\dots,Y_n)$ に対して，下記の条件は等価である：

(1) $\boldsymbol{X} \le_{uo} \boldsymbol{Y}$;

(2) すべての非負値の単調非減少関数 $h_i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $i = 1,\dots,n$ に対して,

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} h_i(X_i)\right] \le \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} h_i(Y_i)\right].$$

証明：

（a）（2）$\Longrightarrow$（1）：$h_i\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$，$i = 1,\ldots,n$を，$\boldsymbol{z} = (z_1,\ldots,z_n) \in \mathbb{R}^n$ を任意に定めて，

$$h_i(z) \coloneqq 1_{(z_i,\infty)}(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

と定義すれば，非負値の単調非減少関数で，

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} h_i\,(X_i)\right] = \mathbb{E}\left[1_{\{X_1>z_1,\ldots,X_n>z_n\}}\right] = \mathbb{P}(X_1 > z_1,\ldots,X_n > z_n).$$

（b）（1）$\Longrightarrow$（2）：任意の非負値の単調非減少関数 $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ は，（$\alpha_j \geq 0, a_j \in \mathbb{R}, j = 1,\ldots,m$ から構成される）非負値の単調非減少単関数：

$$\tilde{h}(z) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{(a_j,\infty)}(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

の増加列の各点収束極限として表現できることから，示すことができる．

□

つぎの補題は，Slepian の不等式（例えば，Wainwright [15]）としてよく知られるタイプの不等式の 1 バージョンである．

補題 A.3［Slepian 型の不等式］

$n \in \mathbb{N} = \mathbb{Z}_{++} = \{1,2,\ldots\}$ とする．n 変量の確率ベクトル $\boldsymbol{X} = (X_1,\ldots,X_n)$，$\boldsymbol{Y} = (Y_1,\ldots,Y_n)$ がいずれも n 変量正規分布に従うとする：

$$\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu_X}, \Sigma_X);\ \boldsymbol{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu_Y}, \Sigma_{\boldsymbol{Y}}),$$

ただし，

$$\boldsymbol{\mu_X} = \left(\mu_{X_i}, i = 1,\ldots,n\right),\ \Sigma_{\boldsymbol{X}} = \left(\sigma_{X_iX_j}, i,j = 1,\ldots,n\right) = \left(\rho_{X_iX_j}\sigma_{X_i}\sigma_{X_j}, i,j = 1,\ldots,n\right);$$
$$\boldsymbol{\mu_Y} = \left(\mu_{Y_i}, i = 1,\ldots,n\right),\ \Sigma_{\boldsymbol{Y}} = \left(\sigma_{Y_iY_j}, i,j = 1,\ldots,n\right) = \left(\rho_{Y_iY_j}\sigma_{Y_i}\sigma_{Y_j}, i,j = 1,\ldots,n\right).$$

このとき，

（1）$\mu_{X_i} = \mu_{Y_i}$，$i = 1,\ldots,n$;

（2）$\sigma_{X_i} = \sigma_{Y_i}$，$i = 1,\ldots,n$

を仮定する（すなわち，周辺分布が同じであると仮定する）と，

$$\sigma_{X_iX_j} \leq \sigma_{Y_iY_j}\ 1 \leq i < j \leq n \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{X} \leq_{uo} \boldsymbol{Y}$$
$$\left(\Longleftrightarrow \quad \rho_{X_iX_j} \leq \rho_{Y_iY_j},\ 1 \leq i < j \leq n \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{X} \leq_{uo} \boldsymbol{Y}\right)$$

が成り立つ．

証明：Müller [11] を参照．

□

とくに 2 変量正規分布に従う確率ベクトルについては下記が成り立つ．

系 A.2

確率ベクトル (X, Y) が相関 $\rho_{XY} \in [-1,1]$ を持つ 2 変量の正規分布:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N\left[\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right]$$

に従うものとする．このとき，

(1) (X, Y) は，相関 ρ_{XY} が増加すれば，上方象限順序 $\leq_{uo}$，下方象限順序 $\leq_{lo}$，階調順序 $\leq_c$ に関して単調非減少になる；

(2) したがって，g, h: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$をともに非負値の単調非減少関数とすると，

$$\mathbb{E}[g(X)\, h(Y)]$$

は相関 ρ_{XY} について単調非減少となる．