Radon plane でのいくつかの幾何学的定数

関西大学システム理工学部 特別任用准教授 水口洋康
Hiroyasu Mizuguchi
Faculty of Engineering Science, Kansai University

概 要

内積空間では直交が非常に重要な意味を持ち, ノルム空間にも一般化された直交の概念がいくつも定義, 研究されている. その 1 つである Birkhoff 直交は一般に対称性を持っておらず, 空間の次元が 3 以上ならば Birkhoff 直交が対称であることは空間が内積を持つことと同値である. 2 次元の場合においては Birkhoff 直交が対称でありながらも内積空間ではない平面が無数に存在し, それらは Radon plane と呼ばれる. 著者が近年得られた, Radon plane での幾何学的定数の値域に関する結果をまとめさせて頂きたい.
MSC: 46B20, 51B20, 52A21.

1 Introduction

内積空間では直交が重要な意味を持ち多くの数学者によって幅広く研究されている. 内積空間においては内積 $\langle x, y\rangle$ が 0 になる事によって直交 $x \perp y$ が定義されるが, 一般のノルム空間においては内積が存在しているとは限らないので, 内積空間において内積が 0 になることと同値なノルム等式やノルム不等式により, 一般化された直交が定義される. 例えば, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $\|x\| \leq \|x + ty\|$ が成り立つとき x が y に Birkhoff 直交すると言い, $x \perp_B y$ と表す ([6]). $\|x + y\| = \|x - y\|$ が成り立つとき x が y に Isosceles 直交すると言い, $x \perp_I y$ と表す ([10]). 他にも多くの一般化された直交が定義され, 上記 2 つと共に数多くの論文で研究されている ([1, 2, 17] 等を参照).

$x \perp y$ ならば $y \perp x$ も成立するとき, その直交 $\perp$ は対称であると言われる. 内積空間における通常の直交が対称であるほか, 定義よりノルム空間における Isosceles 直交も対称である. しかし Birkhoff 直交は一般的に直交であるとは限らない.

Theorem 1. ([6, 8, 11]) 3 以上の次元を持つノルム空間 X に対し, X において Birkhoff 直交が対称であることは, X が内積空間であることと同値である.

この定理において次元に関する仮定は取り除く事ができない. Birkhoff 直交が対称になる 2 次元平面は Radon plane と呼ばれている. 近年も Radon plane について研究が行われている ([1, 2, 4] 等を参照). [15] では Radon plane の特徴付けが与え

られており, Radon plane は無数に存在することが分かる.

ノルム空間の幾何学的構造について研究する際には幾何学的定数が重要な役割を持ち, こちらも多くの数学者によって研究が行われている. 空間 X の単位球を B_X, 単位球面を S_X と表す. X が uniformly non-square であるとは, 正の数 δ が存在し, $x, y \in S_X$ ならば常に $\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq 2(1-\delta)$ となることを意味する. [9] において James 定数

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in S_X\}$$

が定義された. James 定数は以下の性質を持つことが知られている.

- 任意のノルム空間 X に対し $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$ ([9]).
- $J(X) < 2$ は空間 X が uniformly non-square であることと同値である.
- X が内積空間ならば $J(X) = \sqrt{2}$ である. 更に, 3 以上の次元を持つノルム空間 X に対しては, $J(X) = \sqrt{2}$ は X が内積空間であることと同値である.

内積空間に関する上記の特徴付けでも次元に関する仮定は除去できない. $J(X) = \sqrt{2}$ を満たす 2 次元平面に関し [16] 等で研究されている. Isosceles 直交を用いると James 定数は

$$J(X) = \sup\{\|x+y\| : x, y \in S_X, x \perp_I y\}$$

とも表現される.

空間 X の von Neumann-Jordan 定数 $C_{NJ}(X)$ は

$$\begin{aligned} C_{NJ}(X) &= \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)} : x, y \in X, (x, y) \neq (0, 0)\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|x+ty\|^2 + \|x-ty\|^2}{2\left(1+t^2\right)} : x, y \in S_X, 0 \leq t \leq 1\right\} \end{aligned}$$

で定義される ([12]). von Neumann-Jordan 定数は以下の性質を持つ.

- 任意のノルム空間 X に対し $1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$ ([12]).
- $C_{NJ}(X) = 1$ は, ノルム空間 X が内積空間であることと同値である ([12]).
- $C_{NJ}(X) < 2$ は空間 X が uniformly non-square であることと同値である ([24]).
- 任意のノルム空間 X と共役空間 X^* に対し, $C_{NJ}(X) = C_{NJ}(X^*)$ ([24]).

James 定数と von Neumann-Jodan 定数を含む複数の幾何学的定数について Radon plane での値を考え, 一般の空間に対するものより狭い値域を得た.

2 preliminaries

内積空間において, $x, y \in X$ の間の sine 関数は

$$s(x,y) = \sqrt{1 - \left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|} \right)^2}$$

で定義されるが, $x, y \in S_X$ に対しては $\inf_{t \in \mathbb{R}} \|x + ty\|$ に等しい.

Definition 2. ([5, 23]) X をノルム空間とする. sine 関数 $s : S_X \times S_X \to \mathbb{R}$ を

$$s(x,y) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \|x + ty\|$$

で定義する. 一般の 0 でない $x, y \in X$ に対しては

$$s(x,y) = s\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right)$$

で sine 関数が定義される.

V. Balestro, H. Martini and R. Teixeira は次の結果を得ている.

Theorem 3. ([5]) ノルム空間 X が Radon plane であることは, その空間における sine 関数が対称であることと同値.

Theorem 4. (正弦定理, [5]) X を Radon plane とし, $x, y, z \in X$ は同一直線上にないとする. このとき三角形 Δxyz において

$$\frac{\|x-y\|}{s(z-x, z-y)} = \frac{\|y-z\|}{s(x-y, x-z)} = \frac{\|z-x\|}{s(y-z, y-x)}$$

が成立する. また, 互いに異なる単位球面の元から構成されるあらゆる三角形に対しこの比率が 2 に等しいならば, X は内積を持つ.

ノルム空間における一般化された直交は各空間のノルムに依存し, またそれぞれの直交概念は同値ではない. そのため [3, 13, 22] など各空間での 2 つの直交の違いを計量する幾何学的定数が研究されている. 水口は [18] で

$$IB(X) = \inf \left\{ \frac{\inf_{t \in \mathbb{R}} \|x + ty\|}{\|x\|} : 0 \neq x, y \in X, X \perp_I y \right\}$$

$$= \inf \left\{ s(x,y) : 0 \neq x, y \in X, X \perp_I y \right\}$$

を定義, 研究した. 任意のノルム空間 X に対して, 不等式 $1/2 \leq IB(X) \leq 1$ が成立し, $IB(X) = 1$ は内積空間を特徴付ける. Dunkl-Williams 定数 ([14])

$$DW(X) = \sup \left\{ \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x - y\|} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| : 0 \neq x, y \in X, x \neq y \right\}$$

との間に等式 $IB(X)DW(X) = 2$ が成立して，$1/2 < IB(X)$ は uniformly non-square を特徴付ける．

[7] では, 幾何学的定数

$$A_2(X) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2} : x, y \in S_X\right\}$$

が定義されている．$t \in (0,2)$ に対して定義される modulus of smoothness

$$\rho_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+ty\|+\|x-ty\|}{2} - 1 : x, y \in S_X\right\}$$

との間に，$A_2(X) = \rho_X(1) + 1$ が容易に見て取れる．この $A_2(X)$ は以下の性質を持つ．

- 任意のノルム空間 X に対して $\sqrt{2} \le A_2(X) \le 2$.
- X が内積空間であれば $A_2(X) = \sqrt{2}$.
- $A_2(X) < 2$ は空間 X が uniformly non-square であることと同値.

必ずしも $A_2(X)$ と $J(X)$ は一致しない．

3 Results

まず, Theorem 3 を利用して次が得られた．

Proposition 5. ([19]) X を Radon plane とし, $x, y \in S_X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $x \perp_I \alpha y$ であるとする．$\|x+ky\| = \inf_{t\in\mathbb{R}} \|x+ty\| = \inf_{s\in\mathbb{R}} \|y+sx\| = \|y+\ell x\|$ を満たす $k, \ell \in \mathbb{R}$ をとると, $IB(X)$ の評価に関連し, $0 \le \alpha \le 1$, $0 \le k, \ell$ を考えれば十分である．このとき, $k \le \min\{1/2, \alpha\}$ および $\ell \le 1/2$ が成り立つ．

Proposition 6. ([19]) X を Radon plane とし, $x, y \in S_X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $x \perp_I \alpha y$ であるとする．$\|x+ky\| = \inf_{t\in\mathbb{R}} \|x+ty\| = \inf_{s\in\mathbb{R}} \|y+sx\| = \|y+\ell x\|$ を満たす $k \in [\min\{1/2, \alpha\}]$ および $\ell \in [0, 1/2]$ をとる．このとき

$$\max\left\{\frac{(\alpha+k)(1-k\ell)}{(\alpha+k)(1-k\ell)+k(1-\ell)(\alpha-k)}, \frac{(1+\alpha\ell)(1-k\ell)}{(1+\alpha\ell)(1-k\ell)+\ell(1-k)(1-\alpha\ell)}\right\}$$

$$\le \|x+ky\|.$$

$$\begin{aligned} IB(X) &= \inf\{s(x,y) : 0 \ne x, y \in X, X \perp_I y\} \\ &= \inf\left\{\inf_{t\in\mathbb{R}} \|x+ty\| : 0 \ne x, y \in X, X \perp_I y\right\} \end{aligned}$$

であるので, 微分により次を得た．

Theorem 7. ([19]) X を Radon plane とする．このとき $9/8 \le IB(X) \le 1$.

Theorem 4, 7 を用いて次を得る．

Proposition 8. ([20, 21]) X を Radon plane, $x, y \in S_X$ とする．このとき

$$\|x+y\|\|x-y\| \le \frac{2}{s(x+y)(x-y)} \le \frac{9}{4}.$$

Proof. Theorem 4 で $z = -x$ とおけば

$$\frac{\|x-y\|}{s(2x, x+y)} = \frac{\|x+y\|}{s(x-y, 2x)} = \frac{\|2x\|}{s(x+y, x-y)}$$

が成立する．$x+y \perp_I x-y$ であるから $8/9 \le IB(X) \le s(x+y, x-y)$ であり，

$$\frac{\|x+y\|}{s(x-y, x)} = \frac{2}{s(x+y, x-y)} \le \frac{9}{4}.$$

一方で

$$s(x-y, x) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} + \lambda x \right\| \le \left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} - \frac{1}{\|x-y\|} x \right\| = \frac{1}{\|x-y\|}$$

である． □

$$J(X) = \sup\{\|x+y\| : x, y \in S_X, x \perp_I y\}$$

なので，$\|x+y\| = \|x-y\| = \sqrt{\|x+y\|\|x-y\|}$ と考えて以下を得る．

Theorem 9. ([20]) X を Radon plane とする．このとき $\sqrt{2} \le J(X) \le 3/2$.

$A_2(X)$ の値域を考え，$C_{NJ}(X)$ の値域を得て行く．$x, y \in S_X$ に対し $x+y \perp_B x-y$ と仮定すると，$s(x+y, x-y) = 1$ と Proposition 8 から

$$\begin{aligned} 3 - (\|x+y\| + \|x-y\|) &\ge 3 - \left(\|x+y\| + \frac{2}{\|x+y\|} \right) \\ &= \frac{(2 - \|x+y\|)(\|x+y\| - 1)}{\|x+y\|} \ge 0 \end{aligned}$$

となり $\|x+y\| + \|x-y\| \le 3$ を得る．

$x, y \in S_X$, $x+y \not\perp_B x-y$, $\|x+y\| \le \|x-y\|$ を考え

$$\begin{aligned} \left\| \frac{x+y}{\|x+y\|} + k \frac{x-y}{\|x-y\|} \right\| &= s(x+y, x-y) \\ &= s(x-y, x+y) = \left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} + \ell \frac{x+y}{\|x+y\|} \right\| \end{aligned} \tag{1}$$

を満たす k, ℓ を取る. [11] より $|k\ell| \le 1$ である. Birkhoff 直交

$$\frac{x+y}{\|x+y\|} + k\frac{x-y}{\|x-y\|} \perp_B \frac{x-y}{\|x-y\|},$$

$$\frac{x-y}{\|x-y\|} + k\frac{x+y}{\|x+y\|} \perp_B \frac{x+y}{\|x+y\|}$$

と Radon plane における Birkhoff 直交の対称性より以下を得る.

Lemma 10. ([21]) X が Radon plane, $x, y \in S_X$, $x+y \not\perp_B x-y$ だとする. 等式 (1) を満たす k, ℓ を取る. このとき, $1 - k\ell \le s(x+y, x-y)$.

Lemma 11. ([21]) X が Radon plane, $x, y \in S_X$, $x+y \not\perp_B x-y$ だとする. 等式 (1) を満たす k, ℓ を取る. このとき, $0 < \max\{k, \ell\} \le s(x+y, x-y)/2$.

Lemma 12. ([21]) X が Radon plane, $x, y \in S_X$, $x+y \not\perp_B x-y$ だとする. 等式 (1) を満たす k, ℓ を取る. このとき, $\|x-y\|+k\|x+y\| \le 2$ および $\|x+y\|+\ell\|x-y\| \le 2$.

Proof. Birkhoff 直交

$$\frac{x-y}{\|x-y\|} \perp_B \frac{x+y}{\|x+y\|} + k\frac{x-y}{\|x-y\|}$$

より

$$\begin{aligned} 1 &\le \left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} - \frac{\|x+y\|}{\|x-y\| + k\|x+y\|}\left(\frac{x+y}{\|x+y\|} + k\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) \right\| \\ &= \left\| \frac{-2y}{\|x-y\| + k\|x+y\|} \right\| \end{aligned}$$

なので $\|x-y\| + k\|x+y\| \le 2$ が成立. $\|x+y\| + \ell\|x-y\| \le 2$ も同様である. □

上記の Lemma 10, 11, 12 と Proposition 8 を組み合わせ実数として考察すると, $x+y \not\perp_B x-y$ の場合にも $\|x+y\| + \|x-y\| \le 3$ を得る. 従って

Theorem 13. ([21]) X を Radon plane とする. このとき $A_2(X) \le 3/2$.

これにより次が得られた.

Theorem 14. ([21]) X を Radon plane とする. このとき

$$C_{NJ}(X) \le \frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

Proof. X を Radon plane とし, $x, y \in S_X$ と $t \in [0,1]$ を取る. [25] に倣って, $0 \leq (2-\|x+y\|)(2-\|x-y\|)$ から

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 \leq (\|x+y\|+\|x-y\|)^2-4(\|x+y\|+\|x-y\|)+8$$

なので

$$\begin{aligned}
&\|x+ty\|^2+\|x-ty\|^2 \leq (t\|x+y\|+1-t)^2+(t\|x-y\|+1-t)^2 \\
&= \left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)t^2+2(\|x+y\|+\|x-y\|)t(1-t)+2(1-t)^2 \\
&\leq 4\left\{(A_2(X))^2-2A_2(X)+2\right\}t^2+4A_2(X)t(1-t)+2(1-t)^2 \\
&= \left\{4(A_2(X))^2-12A_2(X)+10\right\}t^2+4\left(A_2(X)-1\right)t+2.
\end{aligned}$$

Theorem 13 より $\|x+ty\|^2+\|x-ty\|^2 \leq t^2+2t+2$ が得られ

$$\frac{\|x+ty\|^2+\|x-ty\|^2}{2\left(1+t^2\right)} \leq 1+\frac{-t^2+2t}{2\left(1+t^2\right)}$$

となる. t に関する微分から

$$\frac{\|x+ty\|^2+\|x-ty\|^2}{2\left(1+t^2\right)} \leq \frac{3+\sqrt{5}}{4}.$$

$\square$

Best possible に関しては, 単位球面 S_X が affine regular hexagon である場合に $IB(X)=9/8$, $J(X)=A_2(X)=3/2$, $C_{NJ}(X)=(3+\sqrt{5})/4$ が得られる.

参考文献

[1] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces, Aequationes Math., 83 (2012), 153–189.

[2] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, Orthogonality types in normed linear spaces. Surveys in geometry I, 97–170, Springer, Cham, 2022.

[3] V. Balestro, H. Martini and R. Teixeira, Geometric constants for quantifying the difference between orthogonality types, Ann. Funct. Anal. 7 (2016), 656–671.

[4] V. Balestro, H. Martini and R. Teixeira, A new construction of Radon curves and related topics. Aequationes Math. 90 (2016), 1013–1024.

[5] V. Balestro, H. Martini and R. Teixeira, Geometric properties of a sine function extendable to arbitrary normed planes, Monatsh. Math., 182 (2017), 781–800.

[6] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math. J., 1 (1935), 169–172.

[7] M. Baronti, E. Casini and P. L. Papini, Triangles inscribed in a semicircle, in Minkowski planes, and in normed spaces, J. Math. Anal. Appl., 252 (2000), 124–146.

[8] M. M. Day, Some characterization of inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947), 320–337.

[9] J. Gao and K.-S. Lau, On geometry of spheres in normed linear spaces, J. Austral. Math. Soc. Ser., A 48 (1990), 101–112.

[10] R. C. James, Inner product in normed linear spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 559–566.

[11] R. C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947), 265–292.

[12] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear, metric spaces, Ann. Math. (2), 36 (1935), 719–723.

[13] D. Ji and S. Wu, Quantitative characterization of the difference between Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality, J. Math. Anal. Appl., 323 (2006), 1–7.

[14] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster and E. M. Mazcuñán-Navarro, The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure, J. Math. Anal. Appl., 342 (2008), 298–310.

[15] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, A characterization of Radon planes using generalized Day–James spaces, Ann. Funct. Anal., 11 (2020), 62–74.

[16] N. Komuro, K.-I. Mitani, K.-S. Saito, R. Tanaka and Y. Tomizawa, A comparison between James and von Neumann–Jordan constants, Mediterr. J. Math, 14 (2017), Art. 168, 13p.

[17] H. Martini and K. J. Swanepoel, The geometry of Minkowski spaces – a survey. II. , Expo. Math., 22 (2004), 93–144.

[18] H. Mizuguchi, The constants to measure the differences between Birkhoff and isosceles orthogonalities, Filomat, 30 (2016), 2761–2770.

[19] H. Mizuguchi, The differences between Birkhoff and isosceles orthogonalities in Radon plane., Extracta Math., 32 (2017), 173–208.

[20] H. Mizuguchi, The James constant in Radon planes, Aequationes Math., 94 (2020), 201–217.

[21] H. Mizuguchi, The von Neumann—Jordan and another constants in Radon planes., Monatsh. Math. 195 (2021), 307–322.

[22] P. L. Papini and S. Wu, Measurements of differences between orthogonality types, J. Math. Aanl. Appl., 397 (2013) 285–291.

[23] T. Szostok, On a generalization of the sine function, Glas. Mat. Ser. III 38 (2003), 29–44.

[24] Y. Takahashi and M. Kato, von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces, Nihonkai Math. J., 9 (1998), 155–169.

[25] Y. Takahashi and M. Kato, A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 359 (2009), 602–609.