

三角形の頂点や辺からの距離の冪乗の和について
 The sum of powered distances from vertices or edges
 of a triangle

東邦大学・理学部 木村泰紀

Yasunori Kimura

Department of Information Science

Toho University

玉川大学・工学部 佐藤健治

Kenzi Satô

Faculty of Engineering

Tamagawa University

Abstract

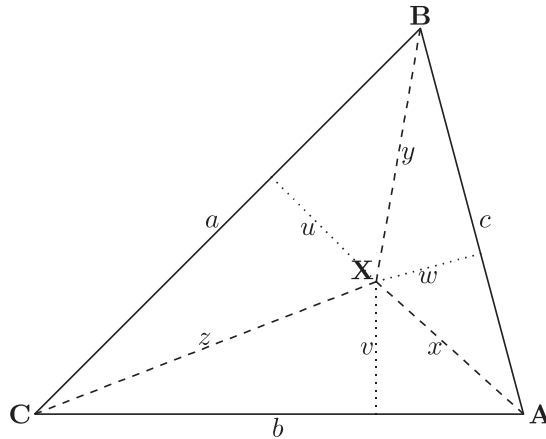
平面三角形の内部で、頂点からの距離の冪乗の和や辺からの距離の冪乗の和を最小にする点はどこか、という問題について、ここでは辺からの距離の方を考察する。

1 問題

平面三角形 $\triangle ABC$ (辺長 $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$, 面積 $\frac{S}{2} = |\triangle ABC|$) の内部 (または境界) の点 X について、頂点 A, B, C からの距離を x, y, z とし、辺 BC, CA, AB からの距離を u, v, w とする。実数 q を定めるとき、

$$x^q + y^q + z^q \quad \text{と} \quad (h_q \equiv) u^q + v^q + w^q$$

を最小にする点 X はそれぞれどこか、という問題を考える。



2 恒等式

x, y, z と u, v, w はそれぞれつねに

$$(b^2 + c^2 - a^2)(y^2 z^2 + a^2 x^2) + (c^2 + a^2 - b^2)(z^2 x^2 + b^2 y^2) + (a^2 + b^2 - c^2)(x^2 y^2 + c^2 z^2) - a^2 b^2 c^2 - (a^2 x^4 + b^2 y^4 + c^2 z^4) = 0$$

と

$$(\phi \equiv) au + bv + cw - S = 0$$

を満たす. x, y, z についての恒等式よりも u, v, w についての恒等式の方が単純であり, x, y, z についての考察は困難なので, ここでは u, v, w についてのみ考察する.

3 Lagrange の未定係数法

最小となる点を見つけるために Lagrange の未定係数法 (条件

$$\begin{aligned} \phi^0(u^0, \dots, u^{n-1}) &= 0 \\ &\vdots \\ \phi^{m-1}(u^0, \dots, u^{n-1}) &= 0 \end{aligned}$$

のもとで関数 $h(u^0, \dots, u^{n-1})$ が極値をとる点は

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u^0}, \dots, \frac{\partial h}{\partial u^{n-1}} \right) \in \mathbb{R} \cdot \left(\frac{\partial \phi^0}{\partial u^0}, \dots, \frac{\partial \phi^0}{\partial u^{n-1}} \right) + \dots + \mathbb{R} \cdot \left(\frac{\partial \phi^{m-1}}{\partial u^0}, \dots, \frac{\partial \phi^{m-1}}{\partial u^{n-1}} \right)$$

を満たす) を用いる. この場合は

$$\left(\frac{\partial h_q}{\partial u}, \frac{\partial h_q}{\partial v}, \frac{\partial h_q}{\partial w} \right) \in \mathbb{R} \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial \phi}{\partial w} \right)$$

つまり

$$(qu^{q-1}, qv^{q-1}, qw^{q-1}) \in \mathbb{R} \cdot (a, b, c)$$

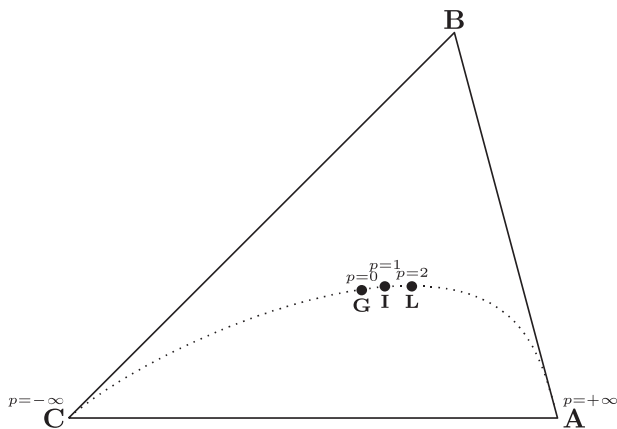
を満たすということなので、解くと (p を $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ なる数として)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{S}{a^{\frac{q}{q-1}} + b^{\frac{q}{q-1}} + c^{\frac{q}{q-1}}} \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{q-1}} \\ b^{\frac{1}{q-1}} \\ c^{\frac{1}{q-1}} \end{pmatrix} = \frac{S}{a^p + b^p + c^p} \begin{pmatrix} a^{p-1} \\ b^{p-1} \\ c^{p-1} \end{pmatrix} \left(\equiv \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix} \right)$$

となる (手法は異なるが, [K] に同じ結果がある). 軌跡上の主な点は

| | | | |
|---------------|-----------------|----------|-----------|
| $p = -\infty$ | $q = 1-$ | C | 最小角頂点 |
| $p = 0$ | $q = 0$ | G | 重心 |
| $p = 1$ | $q = \pm\infty$ | I | 内心 |
| $p = 2$ | $q = 2$ | L | Lemoine 点 |
| $p = +\infty$ | $q = 1+$ | A | 最大角頂点 |

などである.



4 最大・最小

$(u_p, v_p, w_p)^T$ は $p < 0$ (つまり $q(q-1) < 0$) のとき h_q の最大値をとり, $p > 0$ (つまり $q(q-1) > 0$) のとき h_q の最小値をとる. $q = \pm\infty$ のとき h_q は定義されておらず $q = 0$ のとき定数であるが, 内心 **I** と重心 **G** をある関数の最大または最小をとる点とみなすことはできる. $p \rightarrow 1+$ ($q \rightarrow +\infty$) のとき

$$\begin{aligned} \underline{h}_q \equiv h_q^{\frac{1}{q}} &= (u^q + v^q + w^q)^{\frac{1}{q}} \rightarrow \max\{u, v, w\} \equiv \underline{h}_{+\infty} \quad (\text{各点収束}) \\ \operatorname{argmin} \underline{h}_q &= \operatorname{argmin} h_q \rightarrow \mathbf{I} = \operatorname{argmin} \underline{h}_{+\infty} \end{aligned}$$

であり, $p \rightarrow 1-$ ($q \rightarrow -\infty$) のときも

$$h_q = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{u}\right)^{-q} + \left(\frac{1}{v}\right)^{-q} + \left(\frac{1}{w}\right)^{-q}\right)^{\frac{1}{-q}}} \rightarrow \frac{1}{\max\{\frac{1}{u}, \frac{1}{v}, \frac{1}{w}\}} = \min\{u, v, w\} \equiv \underline{h}_{-\infty} \quad (\text{各点収束})$$

$$\operatorname{argmax} h_q = \operatorname{argmin} h_q \rightarrow \mathbf{I} = \operatorname{argmax} \underline{h}_{-\infty}$$

であり, $p \rightarrow 0+$ ($q \rightarrow 0-$) のとき

$$\underline{h}_q \equiv \frac{h_q - 3}{q} = \frac{u^q - 1}{q} + \frac{v^q - 1}{q} + \frac{w^q - 1}{q} \rightarrow \log(uvw) \equiv \underline{h}_0 \quad (\text{各点収束})$$

$$\operatorname{argmax} \underline{h}_q = \operatorname{argmin} h_q \rightarrow \mathbf{G} = \operatorname{argmax} \underline{h}_0$$

であり, $p \rightarrow 0-$ ($q \rightarrow 0+$) のときも

$$\underline{h}_q \rightarrow \underline{h}_0 \quad (\text{各点収束})$$

$$\operatorname{argmax} \underline{h}_q = \operatorname{argmax} h_q \rightarrow \mathbf{G} = \operatorname{argmax} \underline{h}_0$$

である. また $p \rightarrow \pm\infty$ のときは頂点に近づく. $\angle \mathbf{A} > \angle \mathbf{B} > \angle \mathbf{C}$ (つまり $a > b > c$) であるならば, $p \rightarrow +\infty$ ($q \rightarrow 1+$) のとき

$$\operatorname{argmin} h_q \rightarrow \mathbf{A} \quad (\text{辺 AB に沿って})$$

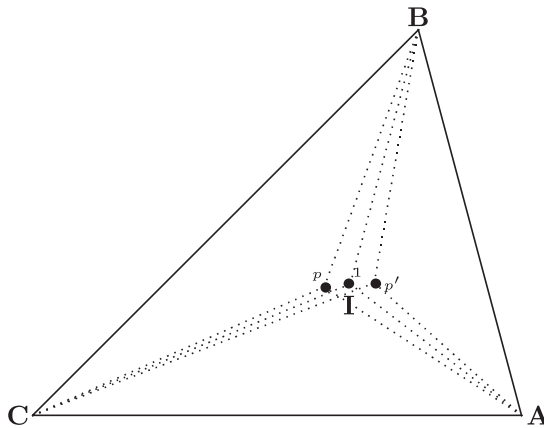
であり, $p \rightarrow -\infty$ ($q \rightarrow 1-$) のとき

$$\operatorname{argmax} h_q \rightarrow \mathbf{C} \quad (\text{辺 BC に沿って})$$

である. いろいろな関数が現れたが, 統一して扱うこともできる.

5 等角共役点

$p + p' = 2$ のとき, $(u_p, v_p, w_p)^T$ と $(u_{p'}, v_{p'}, w_{p'})^T$ の表す点は等角共役点である (これも [K] に記述がある).



6 変曲点

パラメータ p についての曲線 $(u_p, v_p, w_p)^T$ の曲率は (左曲がりを正として)

$$\rho = Sa^p b^p c^p (\log \frac{b}{c}) (\log \frac{c}{a}) (\log \frac{a}{b}) (a^p + b^p + c^p)^3 \cdot \left(\begin{aligned} &a^2 b^{2p} c^{2p} (\log \frac{b}{c})^2 - a^{2p} b^p c^p (b^2 + c^2 - a^2) (\log \frac{c}{a}) (\log \frac{a}{b}) - \\ &+ a^{2p} b^2 c^{2p} (\log \frac{c}{a})^2 - a^p b^{2p} c^p (c^2 + a^2 - b^2) (\log \frac{a}{a}) (\log \frac{b}{c}) - \\ &+ a^{2p} b^{2p} c^2 (\log \frac{a}{b})^2 - a^p b^p c^{2p} (a^2 + b^2 - c^2) (\log \frac{b}{c}) (\log \frac{c}{a}) \end{aligned} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

である. $a > b > c$ または $b > c > a$ または $c > a > b$ のときつねに $\rho < 0$ であり, $c > b > a$ または $b > a > c$ または $a > c > b$ のときつねに $\rho > 0$ である. よってどちらの場合も変曲点は持たない (二等辺三角形のとき軌跡は頂角の二等分線である).

謝辞. 本研究は科研費 (課題番号: 21K03316) の助成を受けたものである. 参考文献 [A] と [P] を教えていただいた広島大学名誉教授の阿賀岡芳夫先生に感謝したい.

参考文献

- [A] E. Abboud, *Minimal Sum of Powered Distances from the Sides of a Triangle*, arXiv:1707.01853 [math.OA], 7pages.
- [K] C. Kimberling, *Trilinear Distance Inequalities for the Symmedian Point, the Centroid, and Other Triangle Centers*, Forum Geometricorum 10 (2010) 135–139.
- [P] P. Penning, *Expoints*, Nieuw Arch. Wiskd. IV. Ser. 4 (1986), no. 1, 19–31.