Sparse tree 上のグラフラプラシアンに付随するスペクトル測度の Hausdorff 次元

九州大学大学院 数理学府 博士課程 宇治野 広大
Kota Ujino
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 導入と主結果

可算集合 V とその部分集合族 E が $E \subset \{p \in 2^V \mid \#p = 2\}$ を満たすとき (V, E) をグラフという．V, E の元をグラフの頂点, 辺という．頂点 a, b が $\{a, b\} \in E$ を満たすとき a, b は隣接するといい, $a \sim b$ と書く．頂点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が $j = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して a_j, a_{j+1} が隣接するとき a_1, a_n は結ばれるといい, $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ を a_1, a_n の道という．任意の頂点が結ばれるときグラフは連結であるという．頂点 a の次数を $\deg(a) = \#\{b \in V \mid a \sim b\}$ とする．$G = (V, E)$ をグラフとし任意の頂点の次数が有限のとき G を局所有限であるという．グラフ $G = (V, E)$ が連結かつ任意の頂点 a, b の道が一意的に定まるとき G は tree という．Tree G の頂点 o を一つ指定したとき G を rooted tree, o を root という．Rooted tree $G = (V, E)$ に対して V 上の距離 $d(\cdot, \cdot)$ を次のように定義する：頂点 a, b に対して

$$d(a, b) = \begin{cases} 0, & a = b, \\ \#p(a, b) - 1, & a \neq b. \end{cases}$$

V の部分集合 $S_n, n = 0, 1, \cdots$ を $S_n = \{a \in V \mid d(o, a) = n\}$ とする．G を rooted tree とし S_n の任意の頂点の次数が等しいとき G を spherically homogeneous tree という．G を spherically homogeneous tree とし S_n の頂点の次数を d_n とする．このとき G は次の数列 $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ で一意的に定まる：

$$g_n = \begin{cases} d_0, & n = 0, \\ d_n - 1, & n \geq 1. \end{cases}$$

定義 1.1. $L_n = 2^{n^n}, n = 1, 2, \cdots, \Gamma \in (0, 1)$ とする．次の数列 $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ で定まる spherically homogeneous tree G を Γ-sparse tree という：

$$g_n = \begin{cases} [n^{\frac{1-\Gamma}{\Gamma}}], & n \in \{L_m \mid m \in \mathbb{N}\}, \\ 1, & n \notin \{L_m \mid m \in \mathbb{N}\}. \end{cases}$$

$G = (V, E)$ を局所有限なグラフとし V 上の二乗可積分関数空間を $l^2(V)$ とする．このとき $l^2(V)$ は次の内積 $(\cdot, \cdot)$ でヒルベルト空間となる：

$$(f, g) = \sum_{u \in V} \overline{f(u)} g(u).$$

$l^2(V)$ の部分空間 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D} = \{f : V \to \mathbb{C} \mid \mathrm{supp} f < \infty\}$ とする．$L, A, D : l^2(V) \to l^2(V)$ を次のように定義

する：$f \in \mathcal{D}$ に対して

$$
\begin{aligned}
Lf(u) &= \sum_{v\sim u}(f(v)-f(u)),\\
Af(u) &= \sum_{v\sim u} f(v),\\
Df(u) &= \sum_{v\sim u} f(u) = \deg(u)f(u).
\end{aligned}
$$

L, A, D をグラフラプラシアン, 隣接行列, 次数行列という．L は本質的自己共役である．

(X, d_X) を距離空間, $\mathcal{B}(X)$ を (X, d_X) のボレル集合族とする． A を X の部分集合とし $d_X(A) = \sup\{d_X(x,y) \mid x, y \in A\}$ とする．X の部分集合族 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ が $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ かつ $\sup_{i=1}^{\infty} d_X(A_i) \le \delta$ を満たすとき $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ は A の δ-cover という．

定義 1.2. $\alpha \in [0,\infty)$ とする．$h_\delta^\alpha, h^\alpha : 2^X \to [0,\infty]$ を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
h_\delta^\alpha(A) &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} d_X(A_i)^\alpha \mid \{A_i\}_{i=1}^{\infty} is\ a\ \delta\text{-cover}\ of\ A\right\},\\
h^\alpha(A) &= \lim_{\delta\to 0} h_\delta^\alpha(A).
\end{aligned}
$$

h^α を X の α 次元 Hausdrff 測度という．実際に h^α を $\mathcal{B}(X)$ に制限したものは測度となる．X の部分集合 A の Hausodrff 次元 $\dim A$ を次のように定義する：

$$
\dim A = \sup\{\alpha \mid h^\alpha(A) \neq 0\}.
$$

測度 $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0,\infty]$ の下側 Hausdorff 次元 $\dim_* \mu$, 上側 Hausodrfff 次元 $\dim^* \mu$ を次のように定義する：

$$
\begin{aligned}
\dim_*\mu &= \inf\{\dim A \mid A \in \mathcal{B}(X)\ such\ that\ \mu(A) \neq 0\},\\
\dim^*\mu &= \inf\{\dim A \mid A \in \mathcal{B}(X)\ such\ that\ \mu(\mathbb{R}\setminus A) = 0\}.
\end{aligned}
$$

$\dim_* \mu = \dim^* \mu = \alpha$ を満たすとき μ は Hausdorff 次元を持つといい, α を μ の Hausdorff 次元という．

補題 1.3 (J.Bruer [2])**.** $G = (V, E)$ を Γ-sparse tree, $H : l^2(V) \to l^2(V)$ を $H = -\overline{L}$ とする．E を H に付随するスペクトル測度, E を $(0,4)$ に制限したものを $\tilde{E}$ とする．このとき次が成り立つ：

(1) $\sigma_{\mathrm{ac}}(H) = \emptyset$, $\sigma_{\mathrm{pp}}(H) \cap (0,4) = \emptyset$, $\sigma_{\mathrm{sc}}(H) \cap (0,4) = (0,4)$,
(2) $\Gamma \le \dim_* \tilde{E} \le \dim^* \tilde{E} \le \frac{2\Gamma}{1+\Gamma}$.

定理 1.4. 補題 1.3 と同じように仮定する．このとき $\Gamma \le \dim_* \tilde{E} \le \dim^* \tilde{E} \le \Gamma$ が成り立つ．$\tilde{E}$ は Hausdorff 次元を持ち $\tilde{E}$ の次元は Γ である．

2 グラフラプラシアンの直和分解

$G = (V, E)$ を数列 $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ で定まる spherically homogeneous tree とする．$\pi_n : l^2(S_n) \to l^2(S_{n+1})$, $n = 0, 1, \ldots,$ を次のように定義する：

$$
\pi_n f(u) = \sum_{v\in S_n : v\sim u} f(v),\ \ u \in S_{n+1}.
$$

このとき $\pi_n^* : l^2(S_{n+1}) \to l^2(S_n)$ は次のようになる：

$$
\pi_n^* g(u) = \sum_{v\in S_{n+1} : v\sim u} g(v),\ \ u \in S_n.
$$

補題 2.1. $f,g\in l^2(S_n)$ に対して $(\pi_n f,\pi_n g)=g_n(f,g)$.

$V=\sqcup_{n=0}^\infty S_n$ なので $l^2(V)=\bigoplus_{n=0}^\infty l^2(S_n)$ が成り立つ. $\Pi: l^2(V)\to l^2(V)$ を $\Pi=\bigoplus_{n=0}^\infty \pi_n$ とする.

補題 2.2. $f\in\mathcal{D}$ に対して $Af=(\Pi+\Pi^*)f$.

数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ を $\alpha_n=\#S_n=\dim(l^2(S_n))$, $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$ を $l^2(S_n)$ の完全正規直交系とする. このとき以下の方法で $l^2(S_{n+1})$ の完全正規直交系 $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_{n+1}}$ が得られる：$e_k^{(n+1)}\in l^2(S_{n+1})$ を $e_k^{(n+1)}=\|\pi_n e_k^{(n)}\|^{-1}\pi_n e_k^{(n)}$, $k=1,2,...,\alpha_n$ とする. 補題 2.1 より $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$ は $l^2(S_{n+1})$ の正規直交系である. もし $\alpha_n=\alpha_{n+1}$ ならば $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$ は $l^2(S_{n+1})$ の完全正規直交系である. もし $\alpha_n<\alpha_{n+1}$ ならばグラム・シュミットの直交化法より $l^2(S_{n+1})$ の正規直交系 $e_k^{(n+1)}\in l^2(S_{n+1})$, $k=\alpha_n+1,...,\alpha_{n+1}$ が得られ, $\{e_k^{(n+1)}\}_{k=1}^{\alpha_n}\cup\{e_k^{(n+1)}\}_{k=\alpha_n+1}^{\alpha_{n+1}}$ は $l^2(S_{n+1})$ の完全正規直交系になる.

$l^2(S_0)$ の完全正規直交系が与えられたとき, 上の方法で $l^2(S_n)$ の完全正規直交系 $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{\alpha_n}, n=0,1,...$ が帰納的に得られる. このとき $\bigcup_{n=0}^\infty\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{\alpha_n}$ は $l^2(V)$ の完全正規直交系である.

$\sup_{n=0,1,\dots}\alpha_n=\infty$ と仮定し $\alpha_{-1}=0$ とする. 数列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ は非減少なので, 与えられた $k\in\mathbb{N}$ に対して $N(k)\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ が存在し $\alpha_{N(k)-1}<k\le\alpha_{N(k)}$ が成り立つ. このとき

$$\bigcup_{n=0}^\infty\{e_k^{(n)}\mid k=1,2,...,\alpha_n\}=\bigcup_{k=1}^\infty\{e_k^{(n)}\mid n=N(k),N(k)+1,...\}.$$

補題 2.3. $l^2(V)$ の閉部分空間 $M_k, k=1,2,...,$ を

$$M_k=\overline{\langle\{e_k^{(n)}\mid n=N(k),N(k)+1,...\}\rangle}$$

とする. このとき M_k は A,D,H で不変である.

補題 2.3 より H,A,D を M_k に制限したものを $H^{(k)},A^{(k)},D^{(k)}:M_k\to M_k, k=1,2,...$ とする. このとき $H^{(k)}$ は自己共役かつ $H=\bigoplus_{k=1}^\infty H^{(k)}$ が成り立つ.

$G=(V,E)$ を Γ-sparse tree とする. $k\ge 2$ のとき次が成り立つ：$n,m\ge N(k)$ に対して

$$\begin{aligned}(e_k^{(n)},H^{(k)}e_k^{(n)})&=(e_k^{(n)},D^{(k)}e_k^{(n)})=g_n+1,\\(e_k^{(n)},H^{(k)}e_k^{(n+1)})&=-(e_k^{(n)},A^{(k)}e_k^{(n+1)})=-\sqrt{g_n},\\(e_k^{(n)},H^{(k)}e_k^{(m)})&=0,\ \text{if } |n-m|\ge 2\ .\end{aligned}$$

更に次が成り立つ：$n,m\ge N(1)=0$ に対して

$$\begin{aligned}(e_1^{(n)},H^{(1)}e_1^{(n)})&=(e_1^{(n)},D^{(1)}e_1^{(n)})=\begin{cases}g_0 & (n=0),\\ g_n+1 & (n\ge 1),\end{cases}\\(e_1^{(n)},H^{(1)}e_1^{(n+1)})&=-(e_1^{(n)},A^{(1)}e_1^{(n+1)})=-\sqrt{g_n},\\(e_1^{(n)},H^{(1)}e_1^{(m)})&=0,\ \text{if } |n-m|\ge 2.\end{aligned}$$

定義 2.4. $k\in\mathbb{N}$ として数列 $d_k=(d_k(n))_{n=1}^\infty, a_k=(a_k(n))_{n=1}^\infty$ を次で定義する：

$$\begin{aligned}d_k(n)&=(e_k^{(n+N(k)-1)},D^{(k)}e_k^{(n+N(k)-1)}),\\a_k(n)&=(e_k^{(n+N(k))},A^{(k)}e_k^{(n+N(k)-1)}).\end{aligned}$$

以降では $H^{(k)} : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$, $k = 1, 2, ...,$ を次の Jacobi 行列と同一視する：

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} d_k(1) & -a_k(1) & & & \\ -a_k(1) & d_k(2) & -a_k(2) & & \\ & -a_k(2) & d_k(3) & -a_k(3) & \\ & & -a_k(3) & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

同様に $A^{(k)}, D^{(k)} : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ を次の Jacobi 行列と同一視する：

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & a_k(1) & & & \\ a_k(1) & 0 & a_k(2) & & \\ & a_k(2) & 0 & a_k(3) & \\ & & a_k(3) & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix}, D^{(k)} = \begin{pmatrix} d_k(1) & & & & \\ & d_k(2) & & & \\ & & d_k(3) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \end{pmatrix}.$$

3 Intermittency 関数と Hausdorff 次元

3.1 Hölder 連続性と Fourier 変換

定義 3.1. $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ を測度，$f \in L^1(\mathbb{R}, d\nu)$, $\alpha \in (0, 1)$ とする．$\widehat{f\nu}(\xi)$ を次のように定義する：$\xi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\widehat{f\nu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \nu(dx).$$

定数 $C > 0$ が存在し，区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{L}(I) < 1$ ならば $\nu(I) < C\mathcal{L}(I)^\alpha$ を満たすとき ν は α-Hölder 連続であるという．ここで $\mathcal{L}(\cdot)$ は一次元 Lebeasgue 測度である．

補題 3.2 (Strichartz, Robert S[5])**.** 有限測度 ν が α-Hölder 連続とする．このとき $C_1 = C_1(\alpha, \nu) > 0$ が存在し，任意の $f \in L^2(\mathbb{R}, d\nu)$ に対して

$$\sup_{T \geq 1} T^{\alpha - 1} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}} |\widehat{f\nu}(t)|^2 dt \leq C_1 \|f\|^2.$$

3.2 Intermittency 関数と上側 Hausdorff 次元

定義 3.3. $\psi \in l^2(\mathbb{N})$, $E^{(k)}$ を $H^{(k)}$ に付随するスペクトル測度とする．有限測度 $\mu_\psi^{(k)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ を次のように定義する：$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して

$$\mu_\psi^{(k)}(A) = (\psi, E^{(k)}(A)\psi).$$

$t\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ に対して $\psi_k(t)=e^{-itH^{(k)}}\psi$, $\psi_k(t,n)=(\delta_n,\psi_k(t))$ とする．$a_\psi^{(k)}(n,T)$, $\langle|X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T)$, $\beta_\psi^{(k)}(p)$ を次のように定義する：$n\in\mathbb{N}, T>0, p>0$ に対して

$$a_\psi^{(k)}(n,T)=\frac{1}{T}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{T}}|\psi_k(t,n)|^2dt,$$
$$\langle|X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T)=\sum_{n=1}^\infty n^p a_\psi^{(k)}(n,T),$$
$$\beta_\psi^{(k)}(p)=\frac{1}{p}\liminf_{T\to\infty}\frac{\log\langle|X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T)}{\log T}.$$

$\beta_\psi^{(k)}$ を intermittency 関数という.

補題 3.2 より次の補題が導かれる.

補題 3.4 (Barbaroux, J. M., J. M. Combes, R. Montcho[1]). $\alpha=\dim^*(\mu_\psi^{(k)}), \epsilon>0$ とする．このとき $C_2=C_2(\epsilon,\psi)>0$ が存在し, 任意の $T>0$ に対して

$$\langle|X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T)\geq C_2T^{p(\alpha-\epsilon)}.$$

特に任意の $p>0$ に対して

$$\dim^*(\mu_\psi^{(k)})\leq\beta_\psi^{(k)}(p).$$

4　Intermittency 関数の評価

この節は Tcheremchantsev, Serguei[6] を参考にしている.

定義 4.1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ を可測関数,$0<l<4, B_l=[l,4-l]\subset\mathbb{R}$ とする．f が第一種関数であるとは $L>0, x_0\in B_L$ が存在し $f\in C_0^\infty(B_L)$ かつ $f(x_0)\neq0$ を満たすことである．f が第二種関数であるとは f は有界かつ $E_0\in(0,4), L>0$ が存在し $[E_0-L,E_0+L]\subset B_L$, $f\in C^\infty([E_0-L,E_0+L])$ かつ $x\in[E_0-\nu,E_0+\nu]$ に対して $|f(x)|\geq c>0$ を満たすことである.

$\psi\in l^2(\mathbb{N})$ とし $m_\psi^{(k)}:\mathbb{C}^+\to\mathbb{C}^+$ を次のように定義する：

$$m_\psi^{(k)}(z)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\mu_\psi^{(k)}(d\lambda)}{\lambda-z}=(\psi,(H^{(k)}-z)^{-1}\psi).$$

$B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}), \epsilon>0$ に対して

$$I_\psi^{(k)}(\epsilon,B)=\epsilon\int_B dE|\mathrm{Im}\,m_\psi^{(k)}(E+i\epsilon)|^2$$

と定義する.

補題 4.2. f を有界な第一種関数,$\psi=f(H^{(k)})\delta_1, p>0$ とする．このとき N を十分大きくすれば定数 $C_3>0$ と数列 $(q_n)_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ が存在して $\lim_{n\to\infty}q_n=0$ かつ $\dfrac{L_N}{4}<T<\dfrac{L_{N+1}}{4}$ に対して

$$\begin{aligned}\langle|X|^p\rangle_\psi^{(k)}(T)\geq{}& C_3I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_L)^{-p}\\&+C_3\left(L_N^{p+1+q_N}+T^{p+1}L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}+q_N}\right)I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1},B_L).\end{aligned}$$

補題 4.3. f を有界な第一種関数, $\psi=f(H^{(k)})\delta_1$ とする. このとき $p>0$ に対して

$$\beta_\psi^{(k)}(p)\geq\frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

証明. 補題 4.2 より $x = I_{\delta_1}^{(k)}(T^{-1}, B_\nu)$ とすると

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C_8 x^{-p} + C_8 \left(L_N^{p+1-q_N} + T^{p+1} L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}-q_N} \right) x.$$

$g(x) = x^{-p} + Kx, x > 0$ とすると $\inf_{x>0} g(x) = c(p) K^{\frac{p}{p+1}}, c(p) = p^{-\frac{p}{p+1}} + p^{\frac{1}{p+1}}$ となる. $\dfrac{L_N}{4} \leq T \leq \dfrac{L_{N+1}}{4}$ とすると $C_3' = C_3'(p) > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) &\geq c(p) C_3 \left(L_N^{p+1-q_N} + T^{p+1} L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}-q_N} \right)^{\frac{p}{p+1}} \\ &\geq C_3' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} \left(L_N^{p+1} + T^{p+1} L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}} \right)^{\frac{p}{p+1}}.\end{aligned}$$

$\dfrac{L_N}{4} \leq T \leq L_N^A, A = \dfrac{p+\frac{1}{\Gamma}}{p+1}$ とすると

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C_3' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} L_N^p \geq C_3' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} T^{\frac{p}{A}}. \tag{1}$$

$L_N^A \leq T \leq \dfrac{L_{N+1}}{4}$ とすると

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C_8' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} T^p L_N^{\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{p}{p+1}} \geq C_8' L_N^{-\frac{p}{p+1}q_N} T^{\frac{p}{A}}. \tag{2}$$

(1), (2) より $T > 0$ を十分大きくすると任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \geq C_8' T^{\frac{p}{A}-\epsilon}$$

が成り立ち, 次が得られる：

$$\beta_\psi^{(k)}(p) = \frac{1}{p} \liminf_{T\to\infty} \frac{\log \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T)}{\log T} \geq \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}} - \frac{\epsilon}{p}.$$

□

補題 4.4. f を第一種関数, $\psi = f(H^{(k)})\delta_1, p > 0$ とする. このとき $C_4 = C_4(p) > 0$ が存在し, N を十分大きくすると $L_N \leq T \leq L_N^{\frac{1}{\Gamma}}$ に対して

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(T) \leq C_4 L_N^p + C_4 T^{p+1} L_N^{-\frac{1}{\Gamma}}.$$

補題 4.5. f を第一種関数, $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$ とする. このとき $p > 0$ に対して

$$\beta_\psi^{(k)}(p) \leq \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

証明. $L_N \leq T = L_N^A \leq L_N^{\frac{1}{\Gamma}}, A = \dfrac{p+\frac{1}{\Gamma}}{p+1}$ とする. 補題 4.4 より

$$\langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(L_N^A) \leq C_4 L_N^p$$

が成り立ち, 次が得られる：

$$\beta_\psi^{(k)}(p) \leq \frac{1}{p} \lim_{N\to\infty} \frac{\log \langle |X|^p \rangle_\psi^{(k)}(L_N^A)}{\log L_N^A} \leq A^{-1} = \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

□

5　定理 1.4 の証明

補題 5.1. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする．このとき $E(A) = 0$ が成り立つための必要十分条件は任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mu^{(k)}_{\delta_1}(A) = 0$ が成り立つことである．

証明. $E(A) = 0$ と仮定すると $E^{(k)}(A) = 0$ であり

$$\mu^{(k)}_{\delta_1}(A) = (\delta_1, E^{(k)}(A)\delta_1) = 0.$$

次に任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mu^{(k)}_{\delta_1}(A) = 0$ と仮定する．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $E^{(k)}(A) = 0$ であることを示せば十分である．p を多項式とすると

$$\mu^{(k)}_{p(H^{(k)})\delta_1}(A) = (p(H^{(k)})\delta_1, E^{(k)}(A)p(H^{(k)})\delta_1) = \int_A |p(\lambda)|^2 \mu^{(k)}_{\delta_1}(d\lambda) = 0.$$

これは $E^{(k)}(A)p(H^{(k)})\delta_1 = 0$ を示している．δ_1 は $H^{(k)} : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ の cyclic vector なので，$\{p(H^{(k)})\delta_1 \in l^2(\mathbb{N}) \mid p$ は多項式$\}$ は $l^2(\mathbb{N})$ で稠密である．よって $E^{(k)}(A) = 0$ である． □

補題 5.2. $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \subset (0,4)$ とする．このとき $\tilde{E}(A) = 0$ が成り立つための必要十分条件は任意の $k \in \mathbb{N}$, 第一種関数 f に対して，$\psi = f(H^{(k)})\delta_1$ としたとき $\mu^{(k)}_{\psi}(A) = 0$ が成り立つことである．更に $\dim_* \tilde{E} = \dim_* \mu^{(k)}_{\psi}, \dim^* \tilde{E} = \dim^* \mu^{(k)}_{\psi}$ が成り立つ．

証明. $\tilde{E}(A) = 0$ と仮定すると補題 5.1 より $E^{(k)}(A) = 0$ なので

$$\mu^{(k)}_{\psi}(A) = (\psi, E^{(k)}(A)\psi) = 0.$$

任意の $k \in \mathbb{N}$ と第一種関数 f に対して $\psi = f(H^{(k)})\delta_1$ としたとき $\mu^{(k)}_{\psi}(A) = 0$ と仮定する．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $E^{(k)}(A) = 0$ であることを示せば十分である．$f_n \in C^{\infty}_0(\frac{1}{n}, 4 - \frac{1}{n})$ は $|f_n| \le 1$ かつ区間 $(\frac{2}{n}, 4 - \frac{2}{n})$ 上で $f_n = 1$ が成り立つとする．$\psi_n = f_n(H^{(k)})\delta_1$ とすると f_n は第一種関数であり, 仮定より

$$\mu^{(k)}_{\psi_n}(A) = (f_n(H^{(k)})\delta_1, E^{(k)}(A)f_n(H^{(k)})\delta_1) = \int_A |f_n(\lambda)|^2 \mu^{(k)}_{\delta_1}(d\lambda) = 0.$$

Lebeasgue の優収束定理より

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu^{(k)}_{\psi_n}(A) = \lim_{n\to\infty} \int_A |f_n(\lambda)|^2 \mu^{(k)}_{\delta_1}(d\lambda) = \mu^{(k)}_{\delta_1}(A).$$

補題 5.1 より $E^{(k)}(A) = 0$. 後半の主張は測度の上側 (下側)Hausdorff 次元の定義より明らかである． □

定理 1.4 の証明. 補題 5.2 より任意の $k \in \mathbb{N}$, 第一種関数 f に対して $\psi = f(H^k)\delta_1$ として $\dim_* \mu^{(k)}_{\psi} = \dim^* \mu^{(k)}_{\psi} = \Gamma$ が成り立つことを示せば十分である. 補題 1.3 より

$$\Gamma \le \dim_* \mu^{(k)}_{\psi} \le \dim^* \mu^{(k)}_{\psi}.$$

補題 3.4, 4.5 より任意の有界な第一種関数 f, $p > 0$ に対して

$$\dim^*(\mu^{(k)}_{\psi}) \le \beta^{(k)}_{\psi}(p) = \frac{p+1}{p+\frac{1}{\Gamma}}.$$

□

謝辞

研究代表者 安藤和典先生, 研究副代表者 森岡悠先生には発表の機会を頂き感謝申し上げます. この研究は JST SPRING, 助成番号 JPMJSP2136 の支援を受けて行われました.

参考文献

[1] Barbaroux, J. M., J. M. Combes, and R. Montcho. ”Remarks on the relation between quantum dynamics and fractal spectra.” Journal of Mathematical Analysis and Applications 213.2 (1997): 698-722.

[2] Breuer, Jonathan. ”Singular continuous spectrum for the Laplacian on certain sparse trees.” Communications in mathematical physics 269.3 (2007): 851-857.

[3] Jitomirskaya, Svetlana, and Yoram Last. ”Power-law subordinacy and singular spectra I. Half-line operators.” Acta Mathematica 183.2 (1999): 171-189.

[4] Simon, Barry, and Günter Stolz. ”Operators with singular continuous spectrum, V. Sparse potentials.” Proceedings of the American Mathematical Society 124.7 (1996): 2073-2080.

[5] Strichartz, Robert S. ”Fourier asymptotics of fractal measures.” Journal of functional analysis 89.1 (1990): 154-187.

[6] Tcheremchantsev, Serguei. ”Dynamical analysis of Schrödinger operators with growing sparse potentials.” Communications in mathematical physics 253.1 (2005): 221-252.