非コンパクトなリーマン多様体上における Lane-Emden 方程式の動径対称解の族がなす層構造

早稲田大学基幹理工学部数学科　長谷川 翔一

Shoichi Hasegawa

Department of Mathematics,
School of Fundamental Science and Engineering,
Waseda University

1 Introduction

本講究録では, 非コンパクトな N 次元リーマン多様体 M 上における次の Lane-Emden 方程式を対象に, 動径対称解の族がなす層構造とよばれる性質について述べる:

$$\text{(L)} \qquad -\Delta_g u = |u|^{p-1}u \quad \text{in} \quad M.$$

ただし, $N \geq 3$, $p > 1$ とする. また, M は, 極点 o を有する多様体であり, 極点 o のまわりで極座標表示された以下のような計量 g を有する N 次元多様体である:

$$ds^2 = dr^2 + \psi(r)^2 d\Theta^2, \quad r > 0, \ \Theta \in \mathbb{S}^{N-1}.$$

ここで, $d\Theta^2$ は単位球面 $\mathbb{S}^{N-1}$ における標準的な計量を表し, r は極点 o と点 (r, Θ) の間の測地距離, ψ は $(0, \infty)$ 上正値で, 滑らかな関数とする. ψ の詳しい仮定に関しては後ほど述べるが, 本稿における M の代表的な例としては, N 次元双曲空間 ($\psi(r) = \sinh r$) を考えている. さらに, Δ_g は多様体 (M, g) における Laplace-Beltrami 作用素であり, 具体的には, 関数 $f = f(r, \theta_1, ..., \theta_{N-1})$ に対して, 次のように表される:

$$\begin{aligned}\Delta_g f(r, \theta_1, ..., \theta_{N-1}) =& \frac{1}{(\psi(r))^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (\psi(r))^{N-1} \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta_1, ..., \theta_{N-1}) \right\} \\ &+ \frac{1}{(\psi(r))^2} \Delta_{\mathbb{S}^{N-1}} f(r, \theta_1, ..., \theta_{N-1}).\end{aligned}$$

ただし, $\Delta_{\mathbb{S}^{N-1}}$ は, 単位球面 $\mathbb{S}^{N-1}$ における Laplace-Beltrami 作用素である. また, 本稿では Sobolev 指数を

$$p_s = p_s(N) = \frac{N+2}{N-2}$$

とし, Joseph-Lundgren 指数を

$$p_{JL} = p_{JL}(N) = \begin{cases} +\infty & \text{if} \quad N \leq 10, \\ \dfrac{(N-2)^2 - 4N + 8\sqrt{N-1}}{(N-2)(N-10)} & \text{if} \quad N > 10 \end{cases}$$

と表すことにする.

方程式 (L) に関する既存の結果を述べるために. 始めに, N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ における次の Lane-Emden 方程式を考える:

$$\text{(E)} \qquad -\Delta u = |u|^{p-1}u \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N.$$

ただし, $N \geq 3$, $p > 1$ であり, 方程式 (E) は方程式 (L) の $M = \mathbb{R}^N$ ($\psi(r) = r$) の場合である. 方程式 (E) は Lane-Emden 方程式と呼ばれており, J.H. Lane によって 1869 年に提起され ([36]), 宇宙物理学の研究等において現れる方程式である ([14, 18, 20]). 数学的にも, 現在までに解の存在や定性的性質などの多くの研究がなされている ([12, 13, 19, 21, 22, 24, 31]). 方程式 (E) の動径対称解の解構造に関しては, 非線形項に重み関数を課した方程式を含め, まず [41] において組織的な研究が行われた. 具体的には指数 p に対して, $p = p_s = (N+2)/(N-2)$ のとき, 正値動径対称解の存在, 非存在に関して調べられた. その後, 動径対称解の正値性や漸近挙動といった定性的性質に関して, 様々な研究が行われている ([17, 33, 34, 35, 42, 43, 50, 51, 52, 53]).

Lane-Emden 方程式 (E) の動径対称解の族がなす層構造に関しても, X. Wang [49] によって, 1993 年に解析が行われた. ここで, 動径対称解の族がなす層構造とは, 任意の相異なる二つの動径対称解が互いに交差しないことを表す. [49] においては, 正則な動径対称解と動径対称な特異解に関して, 任意の二つの動径対称解同士の交差・非交差が調べられた. その後, Y. Liu, Y. Li, Y. Deng [37] により, 以下の正則な動径対称解同士の交差・非交差に関する結果が得られている:

Proposition 1.1 (Proposition 3.7 (iv) in [49], Theorem 1 (ii) in [37])**.** $p > 1$ とする.

(i) $p \in (p_s, p_{JL})$ のとき, 任意の相異なる二つの正則な動径対称解は, 無限回交差する.

(ii) $p \geq p_{JL}$ のとき, 任意の相異なる二つの正則な動径対称解は, 互いに交差しない.

Proposition 1.1 は, 指数 p_{JL} が Lane-Emden 方程式 (E) の正則な動径対称解同士の交差・非交差に関して臨界指数であることを示唆している. 動径対称解同士の交差・非交差に関しては, 重み付き Lane-Emden 方程式も対象に, より詳細な研究 ([1, 2, 3, 5, 16, 23, 39, 40]) も行われており, 非線形項を u^p から e^u に変えた方程式に対しても解析が進めらている ([4, 6, 48]). また, 動径対称解の族がなす層構造の性質の応用として, 方程式 (E) の非自明安定解の存在 ([15, 19]) や対応する放物型方程式の解の漸近挙動に関する研究 ([24, 25, 44, 45]) が挙げられる.

一方で, 2000 年代頃から, 考える空間をユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ からリーマン多様体 M に拡張した半線形楕円型方程式を対象とした研究が盛んに行われつつある ([7, 8, 9, 10,

11, 26, 27, 28, 30, 32, 38, 46, 47]). 方程式 (L) に関する解析も行われ, 動径対称解の解構造に対して議論がなされた. ここで, 既存の結果を説明するために, 方程式 (L) の動径対称解を定める. 各正の実数 $\alpha > 0$ に対して, $u_\alpha = u_\alpha(r)$ を原点での値が $u_\alpha(0) = \alpha$ であるような方程式 (L) の動径対称解とする. すなわち, u_α は次の Cauchy 問題の一意解である:

$$
\begin{cases} u''(r) + (N-1)\dfrac{\psi'(r)}{\psi(r)}\, u'(r) + |u(r)|^{p-1}u(r) = 0 \quad \text{for} \quad r \in (0,\infty), \\ u(0) = \alpha. \end{cases} \tag{1.1}
$$

動径対称解の解構造に関しては, まず M が非コンパクトなリーマン多様体の代表的な例である N 次元双曲空間 $\mathbb{H}^N$ の場合 ($\psi(r) = \sinh r$) について, G. Mancini, K. Sandeep [38] により, 議論が行われた. 具体的には, $p < p_s$ のときに, ある $\bar{\alpha} > 0$ が一意に存在し, $u_{\hat{\alpha}}$ が $H^1(\mathbb{H}^N)$ における正値解となることを示した. その後, M. Bonforte, F. Gazzola, G. Grillo, J. L. Vázquez [11] によって, $p < p_s$ のときに, $\bar{\alpha} > 0$ が方程式 (L) の動径対称解の正値性に対する閾値となることが証明された. 実際, $p < p_s$ の場合, $\alpha \le \bar{\alpha}$ ならば u_α は正値, $\alpha > \bar{\alpha}$ ならば u_α は符号変化する. また, [11] では, $p \ge p_s$ の場合も扱われ, 任意の $\alpha > 0$ に対して, u_α は正値となることが示された. さらに, E. Berchio, A. Ferrero, G. Grillo [9] により, $\mathbb{H}^N$ を適切な ψ に対する仮定の下で, 非コンパクトなリーマン多様体 M に一般化した場合でも, 方程式 (L) の動径対称解の解構造が $\mathbb{H}^N$ のときと同様な構造をもつことも調べられた.

方程式 (L) の動径対称解の族がなす層構造に対しても研究が行われている. まず始めに, $M = \mathbb{H}^N$ の場合に, [11] において, 数値計算では次元 N と指数 p が十分大きいときに動径対称解の族が層構造をなしている, とコメントされ, 更なる調査が必要であることも言及されている (Subsection 3.5 (3) in [11]). その後, [9] でも, $\mathbb{H}^N$ を含むより一般の非コンパクトなリーマン多様体 M 上で, 方程式 (L) の動径対称解の族がなす層構造が調べられた. ここで, [9] では, 非コンパクトなリーマン多様体 M に関する仮定として, 関数 ψ に対し, 以下の条件が課されている:

(H_1) $\psi \in C^2([0,\infty))$, $\psi(0) = \psi''(0) = 0$, and $\psi'(0) = 1$;

(H_2) $\psi'(r) > 0$ for $r > 0$;

(H_3) $\ell := \liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{\psi'(r)}{\psi(r)} \in (0,\infty]$.

仮定 (H_1) は, [9] における幾何学的な設定のための必要条件である. 仮定 $(H_2) - (H_3)$ は, 非コンパクトなリーマン多様体 M における $-\Delta_g$ の最小固有値が正となるための十分条件であり, [9] では $-\Delta_g$ の最小固有値が正となることが得られる結果の証明の鍵となっている. ここで, 仮定 $(H_1) - (H_3)$ の下では, 任意の $\alpha > 0$ に対して, Cauchy 問題 (1.1) は $[0,\infty)$ において一意な解 u_α を有することが知られている (Proposition 2.1 of [9], Lemma 4.1 of [11]). また, N 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の場合は $\psi(r) = r$ であるが, 仮定 (H_3) が成立しない. 実際, $\psi(r) = r$ のとき, $\ell = 0$ となる. 一方で, N 次元双曲空間 $\mathbb{H}^N$ の場

合は, $\psi(r)=\sinh r$ であり, 仮定 $(H_1)-(H_3)$ が成立している. 実際, 仮定 (H_3) に関しても, $\psi(r)=\sinh r$ のとき, $\ell=1\in(0,\infty]$ となる. 従って, [9] における空間の一般化は, 双曲空間を中心とした一般化であると考えられる. 上記の設定の下で, [9] では, 方程式 (L) の動径対称解の族がなす層構造に関する次の結果が得られている:

Proposition 1.2 (Theorems 2.11-2.12, Theorem 2.14 in [9])**.** *$N\geq 3$, $p>1$ とする. ψ は $(H_1)-(H_3)$ を満たすと仮定する. $\alpha,\beta\geq 0$ とし, u_α, u_β を (1.1) の解とする. このとき, ある $\alpha_0\in(0,\infty]$ が存在して, 任意の $\alpha,\beta\in[0,\alpha_0]$ に対して, u_α と u_β は互いに交差しない.*

Proposition 1.2 より, 任意の $p>1$ に対して, 原点での値が十分小さければ, 方程式 (L) の動径対称解の族は層構造をなしている, すなわち部分的に層構造が成立していることがわかる. この結果は, 特に $p<p_{JL}$ のときに, 方程式 (E) の動径対称解同士の交差を示した Proposition (i) とは明らかに異なる結果である. さらに, 方程式 (E) においては, 指数 p_{JL} が動径対称解の族がなす層構造に関して臨界指数であったが, 方程式 (L) に対して, 同様の臨界指数が存在するかどうかは得られていない. ここで, Proposition 1.2 において $\alpha_0=\infty$ であれば, 任意の二つの相異なる動径対称解同士が互いに交差しない, すなわち動径対称解の族は層構造をなすことを表す. このとき, [9] において, 動径対称解の族が層構造をなしているかについての議論は行われなかったが, 関連する open problem が挙げられている. 実際, ユークリッド空間の場合と同様に, p が大きいとき動径対称解同士は交差しないか, という問題が挙げられている (Open problems (3) in [9]).

上記のような open problem や動径対称解の族がなす層構造に関する臨界指数の存在を研究動機として, 本研究では 方程式 (E) の動径対称解同士の交差, 非交差に関しての解析を行った. ここで, 方程式 (L) の動径対称解の族が層構造をなすか, を調べる際の技術的な難しさについて述べる. ユークリッド空間の対応する結果である, 方程式 (E) の動径対称解の族がなす層構造は, 例えば Sturm-Liouville の比較定理と方程式 (E) の特異解が陽に表せることを用いて証明が行われる. 実際, 方程式 (E) は $p>N/(N-2)$ のときに, 特異解

$$u^*(r)=Lr^{-\frac{2}{p-1}},\quad L=\left\{\frac{2}{p-1}\left(N-2-\frac{2}{p-1}\right)\right\}^{\frac{1}{p-1}},$$

を有する. 一方で, 方程式 (L) に関しては,特別な場合を除き, 特異解の存在は得られていない. 従って, 特異解を陽に表すこともできず, ユークリッド空間の場合の手法と同様の解析を行うことはできない. 実際, 方程式 (L) の特異解の存在自体も [9] の open problem に挙げられている (Open problems (4) in [9]). このような難しさに対して, 本研究では特異解の代わりとなる適切な関数を用いることで, 方程式 (L) の動径対称解の族がなす層構造に関して解析を行った.

2 Main results

以下では, 本研究の結果を説明する. 最初に主結果を説明するために, ψ に関しての次の仮定を追加する:

(H_4) $\psi \in C^3([0,\infty))$, $(\log \psi'(r))'' > 0$ for $r > 0$.

Remark 2.1. 仮定 $(H_1) - (H_4)$ を満たす典型例は, N 次元双曲空間 $\mathbb{H}^N$ である. 実際, 仮定 (H_4) に関しても, $\psi(r) = \sinh r$ のとき, $r > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}(\log \psi'(r))'' = (\log \cosh r)'' = \left(\frac{\sinh r}{\cosh r}\right)' = (\tanh r)' \\ = \frac{1}{(\cosh r)^2} > 0.\end{aligned}$$

従って, 本研究における空間の一般化も, 双曲空間を中心とした一般化である.

このとき, 方程式 (L) の動径対称解同士の交差, 非交差に関して, 以下の結果が得られた:

Theorem 2.1 (Theorem 1.1 in [29])**.** *ψ は $(H_1) - (H_4)$ を満たし, $N \geq 3$, $p > 1$ とする.*

(i) $p < p_{JL}$ のとき, 次を満たす $\alpha_0 \in (0,\infty)$ が存在する:

- 任意の α, $\beta \in [0, \alpha_0]$ $(\alpha \neq \beta)$ に対して, $u_\alpha - u_\beta$ は $[0,\infty)$ において零点をもたない ;

- 任意の α, $\beta > \alpha_0$ $(\alpha \neq \beta)$ に対して, $u_\alpha - u_\beta$ は $[0,\infty)$ において少なくとも一個零点をもつ.

(ii) $p \geq p_{JL}$ のとき, 任意の α, $\beta > 0$ $(\alpha \neq \beta)$ に対して, $u_\alpha - u_\beta$ は $[0,\infty)$ において零点をもたない.

Theorem 2.1 より, 指数 p_{JL} は方程式 (L) の動径対称解の族がなす層構造に関しての臨界指数でもある. さらに, Theorem 2.1 は, 仮定 $(H_1) - (H_4)$ の下で, 上記の [11] における N 次元双曲空間 $\mathbb{H}^N$ での結果に関するコメント (Subsection 3.5 (3) in [11]) やより一般の空間での open problem (Open problems (3) in [9]) に対して, 肯定的な答えを与えている. また, $p < p_{JL}$ のとき, $\alpha_0 \in (0,\infty)$ は, 動径対称解同士の交差, 非交差に関しての閾値となる. ここで, 閾値となる α_0 の存在自体は, [9] において, 動径対称解の安定性を解析する際に得られていた (Theorem 2.11 in [9]). 定理 2.1 (i) では, 動径対称解の安定性と動径対称解同士の交差, 非交差との関係を調べることで, 閾値である α_0 を導出することができた.

さらに, $p \geq p_{JL}$ のときに方程式 (L) の動径対称解の族が層構造をなすことを用いて, $r = 0$ で発散するような特異解の存在と漸近挙動に関する次の結果も得た:

Theorem 2.2 (Theorem 1.3 in [29])**.** *ψ は $(H_1) - (H_4)$ を満たし, $N \geq 11$, $p \geq p_{JL}$ とする. このとき, 次を満たすような方程式 (L) の特異解 $U = U(r)$ が存在する:*

(i) 任意の $\alpha > 0$ に対して,

$$u_\alpha < U < L\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^{\frac{2}{p-1}} \quad in \quad (0,\infty);$$

(ii) $\displaystyle\lim_{r\to+0} U(r)\psi(r)^{\frac{2}{p-1}} = L.$

ただし, L は次のような定数である:

$$L = \left\{\frac{2}{p-1}\left(N-2-\frac{2}{p-1}\right)\right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Theorem 2.2 (i) は, $p \geq p_{JL}$ のときには, 方程式 (L) の特異解も含めて, 動径対称解の族が層構造をなすことを示唆している. また, Theorem 2.2 は, 仮定 $(H_1)-(H_4)$ の下, $p \geq p_{JL}$ のとき, 上で述べた方程式 (L) の特異解の存在に関する open problem (Open problems (4) in [9]) に対して肯定的な答えを与えている. 一方で, $p < p_{JL}$ のときの方程式 (L) の特異解の存在は open problem のままである. さらに, [37] の Theorem 2 では, $\mathbb{R}^N$ 上の重み付き Lane-Emden 方程式に対し, 動径対称解の族が層構造をなしている状態で, 特異解の一意性も述べている. このとき, Theorem 2.2 における特異解が一意であるかは open problem である.

Theorems 2.1-2.2 の証明は, [29] における Theorem 1.1, Theorem 1.3 の証明を参照されたい.

Acknowledgements

本研究は科研費 (課題番号: 20J01191) の助成を受けたものである.

参考文献

[1] S. Bae, *Separation structure of positive radial solutions of a semilinear elliptic equation in* $\mathbb{R}^n$, J. Differential Equations, **194** (2003), no. 2, 460–499.

[2] S. Bae, *Infinite multiplicity and separation structure of positive solutions for a semilinear elliptic equation in* $\mathbb{R}^n$, J. Differential Equations, **200** (2004), no. 2, 274–311.

[3] S. Bae, T.-K. Chang, *On a class of semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^n$, J. Differential Equations, **185** (2002), no. 1, 225–250.

[4] S. Bae, *Entire solutions with asymptotic self-similarity for elliptic equations with exponential nonlinearity*, J. Math. Anal. Appl., **428** (2015), no. 2, 1085–1116.

[5] S. Bae, Y. Naito, *Existence and separation of positive radial solutions for semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations, **257** (2014), no. 7, 2430–2463.

[6] S. Bae, Y. Naito, *Separation structure of radial solutions for semilinear elliptic equations with exponential nonlinearity*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **38** (2018), no. 9, 4537–4554.

[7] C. Bandle, Y. Kabeya, *On the positive, "radial" solutions of a semilinear elliptic equation in* $\mathbb{H}^N$, Adv. Nonlinear Anal. **1** (2012), no. 1, 1–25.

[8] C. Bandle, M.A. Pozio, A. Tesei, *The Fujita exponent for the Cauchy problem in the hyperbolic space*, J. Differential Equations **251** (2011), 2143–2163.

[9] E. Berchio, A. Ferrero, G. Grillo, *Stability and qualitative properties of radial solutions of the Lane-Emden-Fowler equation on Riemannian models*, J. Math. Pures Appl. (9) **102** (2014), no. 1, 1–35.

[10] M. Bhakta, K. Sandeep, *Poincaré-Sobolev equations in the hyperbolic space*, Calc. Var. Partial Differential Equations **44** (2012), no. 1-2, 247–269.

[11] M. Bonforte, F. Gazzola, G. Grillo, J. L. Vázquez, *Classification of radial solutions to the Emden-Fowler equation on the hyperbolic space*, Calc. Var. Partial Differential Equations **46** (2013), no. 1-2, 375–401.

[12] H. Brézis, *Elliptic equations with limiting Sobolev exponents-the impact of topology*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. S, suppl., S17–S39.

[13] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437–477.

[14] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, New York (1967).

[15] E.N. Dancer, Y. Du, Z. Guo, *Finite Morse index solutions of an elliptic equation with supercritical exponent*, J. Differential Equations **250** (2011), no. 8, 3281–3310.

[16] Y. Deng, Y. Li, F. Yang, *On the positive radial solutions of a class of singular semilinear elliptic equations*, J. Differential Equations, **253** (2012), no. 2, 481–501.

[17] W.-Y. Ding, W.-M. Ni, *On the elliptic equation* $\Delta u + Ku^{(n+2)/(n-2)} = 0$ *and related topics*, Duke Math. J. **52** (1985), no. 2, 485–506.

[18] V.R. Emden, *Gaskugeln, Anwendungen der mechanischen Warmentheorie auf Kosmologie und meteorologische Probleme*, Teubner, Leipzig (1907), Chap. XII.

[19] A. Farina, *On the classification of solutions of the Lane-Emden equation on unbounded domains of* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Pures Appl. (9) **87** (2007), no. 5, 537–561.

[20] R. H. Fowler, *Further studies of Emden's and similar differential equations*, Q. J. Math. (Oxford Series) **2** (1931), 259–288.

[21] B. Gidas, J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **6** (1981), no. 8, 883–901.

[22] B. Gidas, J. Spruck, *Global and local behavior of positive solution of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 525–598.

[23] C. Gui, *Positive entire solutions of the equation* $\Delta u + f(x, u) = 0$, J. Differential Equations, **99** (1992), no. 2, 245–280.

[24] C. Gui, W.-M. Ni, X. Wang, *On the stability and instability of positive steady states of a semilinear heat equation in* $\mathbb{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), no. 9, 1153–1181.

[25] C. Gui, W.-M. Ni, X. Wang, *Further study on a nonlinear heat equation*, J. Differential Equations, **169** (2001), 588–613.

[26] S. Hasegawa, *A critical exponent for Hénon type equation on the hyperbolic space*, Nonlinear Anal. **129** (2015), 343–370.

[27] S. Hasegawa, *A critical exponent of Joseph-Lundgren type for an Hénon equation on the hyperbolic space*, Communications on Pure and Applied Analysis, **16** (2017), no. 4, 1189–1198.

[28] S. Hasegawa, *Classification of radial solutions to Hénon type equation on the hyperbolic space*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **54** (2019), no. 1, 81–108.

[29] S. Hasegawa, *Separation phenomena of radial solutions to the Lane-Emden equation on non-compact Riemannian manifolds*, (2022), Journal of Mathematical Analysis and Applications, **510**, no. 2, Paper No. 126028, 14 pp.

[30] H. He, *The existence of solutions for Hénon equation in hyperbolic space*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **89** (2013), no. 2, 24–28.

[31] D. D. Joseph, T. S. Lundgren, *Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources*, Arch. Rational Mech. Anal., **49** (1972/73), 241–269.

[32] Y. Kabeya, *A unified approach to Matukuma type equations on the hyperbolic space or on a sphere*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 2013, Dynamical systems, differential equations and applications. 9th AIMS Conference. Suppl., 385–391.

[33] N. Kawano, *On bounded entire solutions of semilinear elliptic equations*, Hiroshima Math. J. **14** (1984), no. 1, 125–158.

[34] N. Kawano, J. Satsuma, S. Yotsutani, *Existence of positive entire solutions of an Emden-type elliptic equation*, Funkcial. Ekvac. **31** (1988), no. 1, 121–145.

[35] T. Kusano, M. Naito, *Oscillation theory of entire solutions of second order superlinear elliptic equations*, Funkcial. Ekvac. **30** (1987), no. 2-3, 269–282.

[36] J.H. Lane, *In the theoretical temperature of the Sun under the hypothesis of a gaseous mass maintaining ots volume by its internal heat and depending on the laws of gases known to terrestrial experiment*, Am. J. Sci. Ser. II **50** (1869), 57–74.

[37] Y. Liu, Y. Li, Y. Deng, *Separation property of solutions for a semilinear elliptic equation*, J. Differential Equations, **163** (2000), no. 2, 381–406.

[38] G. Mancini, K. Sandeep, *On a semilinear elliptic equation in* $\mathbb{H}^n$, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **7** (2008), no. 4, 635–671.

[39] Y. Miyamoto, *Intersection properties of radial solutions and global bifurcation diagrams for supercritical quasilinear elliptic equations*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **23** (2016), 1–24.

[40] Y. Miyamoto, K. Takahashi, *Generalized Joseph-Lundgren exponent and intersection properties for supercritical quasilinear elliptic equations*, Arch. Math. (Basel), **108** (2017), no. 1, 71–83.

[41] W.-M. Ni, *On the elliptic equation* $\Delta u + K(x)u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0$*, its generalizations, and applications in geometry*, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), no. 4, 493–529.

[42] W.-M. Ni, S. Yotsutani, *On Matukuma's equation and related topics*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **62** (1986), no. 7, 260–263.

[43] W.-M. Ni, S. Yotsutani, *Semilinear elliptic equations of Matukuma-type and related topics*, Japan J. Appl. Math. **5** (1988), no. 1, 1–32.

[44] P. Poláčik, E. Yanagida, *On bounded and unbounded global solutions of a supercritical semilinear heat equation*, Math. Ann., **327** (2003), 745–771.

[45] P. Poláčik, E. Yanagida, *A Liouville property and quasiconvergence for a semilinear heat equation*, J. Differential Equations, **208** (2005), 194–214.

[46] F. Punzo, *On well-posedness of semilinear parabolic and elliptic problems in the hyperbolic space*, J. Differential Equations **251** (2011), no. 7, 1972–1989.

[47] S. Stapelkamp, *The Brézis-Nirenberg problem on $\mathbb{H}^n$. Existence and uniqueness of solutions*, Elliptic and parabolic problems (Rolduc/Gaeta, 2001), World Sci. Publ., River Edge, NJ, (2002), 283–290.

[48] J.I. Tello, *Stability of steady states of the Cauchy problem for the exponential reaction-diffusion equation*, J. Math. Anal. Appl., **324** (2006), no. 1, 381–396.

[49] X. Wang, *On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **337** (1993), no. 2, 549–590.

[50] E. Yanagida, *Structure of radial solutions to $\Delta u + K(|x|)|u|^{p-1}u = 0$ in $\mathbb{R}^n$*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), no. 4, 997–1014.

[51] E. Yanagida, S. Yotsutani, *Classification of the structure of positive radial solutions to $\Delta u + K(|x|)u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$*, Arch. Rational Mech. Anal. **124** (1993), no. 3, 239–259.

[52] E. Yanagida, S. Yotsutani, *Existence of nodal fast-decay solutions to $\Delta u + K(|x|)|u|^{p-1}u = 0$ in $\mathbb{R}^n$*, Nonlinear Anal. **22** (1994), no. 8, 1005–1015.

[53] E. Yanagida, S. Yotsutani, *Recent topics on nonlinear partial differential equations: structure of radial solutions for semilinear elliptic equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **211** (2003), 121–137.