行列係数をもつ線形微分方程式のウラム安定性について

岡山理科大学・理学部　鬼塚　政一
Masakazu Onitsuka
Okayama University of Science
Department of Applied Mathematics

1　序文

ウラム安定性の概念は，1940 年にウィスコンシン大学で開催された数学コロキウムにおける Ulam [29] の講話の中で提唱された関数方程式の近似解と真の解の差に関する問題を起源とする．1941 年に，Hyers [13] によって，初めてウラム安定性の結果が得られたことから，ハイヤーズ–ウラム安定性と呼ばれることもあるが，本稿では，ウラム安定性と呼ぶ．ウラム安定性は，近年においても関数方程式の分野で盛んに研究されており，例えば，文献 [1, 8, 9, 14, 16] を挙げることができる．1990 年代になり，Obłoza [18, 19] や Alsina–Ger [2] によって，ウラム安定性の概念は常微分方程式へと導入された．大雑把には，任意の ε-近似解に対して，ある真の解が存在し，それらの差が有限にとどまるとき，ウラム安定と呼ばれる．これは摂動問題の一種であるが，摂動が十分小さいとする必要はない．$I \subset \mathbb{R}$ を区間とし，非線形常微分方程式

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{1.1}$$

を考える．ただし，$\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は連続とする．ウラム安定性の定義は以下に示す通りである．方程式 (1.1) が，I 上で**ウラム安定**であるとは，ある $L > 0$ が存在し，任意の $\varepsilon > 0$ と

$$\sup_{t \in I} \|\mathbf{v}' - \mathbf{f}(t, \mathbf{v})\| \le \varepsilon \tag{1.2}$$

を満たす任意の $\mathbf{v} : I \to \mathbb{R}^n$（近似解）に対して，方程式 (1.1) の解 $\mathbf{x} : I \to \mathbb{R}^n$（真の解）が存在し，

$$\sup_{t \in I} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{x}(t)\| \le L\varepsilon$$

を満たすときを言う．ここで，L を方程式 (1.1) に対する（一つの）**ウラム定数**と呼び，(1.2) を満たす $\mathbf{v}$ を方程式 (1.1) の **ε-近似解**と呼ぶ．

さて，常微分方程式のウラム安定性の研究は，近年において徐々に注目を浴びている．例えば，2 階線形微分方程式のウラム安定性については，文献 [6, 11, 12] などを，行列係数をもつ微分方程式のウラム安定性については，文献 [10, 7, 15, 17] などを参照せよ．その一方で多くの先行研究において，以下の問題点を指摘できることも分かってきた．

---

e-mail: onitsuka@ous.ac.jp; 本研究は JSPS 科研費 JP20K03668 の助成を受けたものである．

(i) 区間 I を有界区間に限定して解析している．

(ii) ウラム定数 L が明示的でない．

(iii) 初期条件や境界条件において，都合の良い条件が課されている．また，多くの非線形常微分方程式の問題については，区間 I での解の存在性を仮定している．

では，なぜこれらが難点と呼べるのか？まず，(i) については，例えば，区間を $I=[0,T]$ とするとき，多くの研究でウラム定数 L が区間の幅 T に依存して決められており，$T\to\infty$ としたとき，$L(T)\to\infty$ となっていた．これでは非有界区間 $[0,\infty)$ での近似解の近くに真の解が常に存在するとは言えない．次に，(ii) については，ある定数 L の存在を示すことで定性的性質の調査としては十分とも考えられるが，ウラム安定性の概念を他分野へ応用することを見据えれば，近似解と真の解の誤差を見積もることも重要である．したがって，区間の幅に依存しないウラム定数を明示的に与え，さらにそれがどの程度小さいかを評価することは，重要な問題となる．ウラム定数の定義から，あるウラム定数 $L_0>0$ を得れば，L_0 よりも大きい値は何れもウラム定数と呼べる．では，最小のウラム定数は存在するのか？もし，そのような定数が存在すれば，**最良ウラム定数**と呼ぶことにする．最良ウラム定数については，文献 [3, 4, 12, 26, 27, 28] を参照せよ．最後に，(iii) については，解析手法に依存して初期条件や境界条件が課されており，限定された近似解を考察している場合が多いことを指摘する．先述のウラム安定性の定義では，$\mathbf{v}:I\to\mathbb{R}^n$ が満たす初期条件や境界条件は任意でよいため，これらに条件を課すことで特別な解に対してだけウラム安定性を議論していることになる．しかしながら，単に線形微分方程式のウラム安定性を議論する際，初期値や境界値を限定することは不要であることが知られている．一方で，非線形微分方程式については，初期条件が限定されなければウラム安定性を議論できない場合もあることに注意しておく．例えば，[5, 21, 22, 23, 25] を見よ．ここで言う都合の良い条件とは，解析手法に依存し，別の手法なら外すことができる条件という意味である．加えて，非線形微分方程式のウラム安定性を考察する際には，解の存在性を仮定していることが多く，ロジスティック方程式のような時間大域解と有限時刻で爆発する解が混在する方程式を扱えない難点があった．著者の知る限り，多くの先行研究がこれらの (i)–(iii) の問題点を抱えており，改善の余地があることが判明している．

さて，上記の (i)–(iii) を踏まえて，スカラー線形微分方程式

$$x'=\lambda x \tag{1.3}$$

のウラム安定性について考察してみる．ここで，$\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ とし，I は非有界区間 $I=\mathbb{R}$ とする．$c_1\in\mathbb{R}$ を任意定数とすれば，方程式 (1.3) の一般解は $x(t)=c_1e^{\lambda t}$ である．これが真の解の候補になる．では，$\varepsilon>0$ とし，方程式

$$z'=\lambda z-\varepsilon \tag{1.4}$$

を考える．この方程式の特殊解は，$\tilde{z}(t) = \varepsilon/\lambda$ だから，方程式 (1.4) の一般解として，$z(t) = c_2 e^{\lambda t} + \varepsilon/\lambda$ を得る．ただし，$c_2 \in \mathbb{R}$ は任意定数である．ここで，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$|z'(t) - \lambda z(t)| = \varepsilon$$

に注意すれば，$z(t)$ は (1.2) を満たす方程式 (1.3) のある ε-近似解である．もし，c_1 を $c_1 = c_2$ として選べば，すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$|z(t) - x(t)| = \left|(c_2 - c_1)e^{\lambda t} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\right| = \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

が成り立つ．これで方程式 (1.3) は非有界区間 $I = \mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，ウラム定数は $L = 1/\lambda$ であって，さらにこれは最良ウラム定数と言えそうである．しかしながら，上記の議論は，方程式 (1.3) のある ε-近似解に対してのみ成り立つものであって，任意の ε-近似解に対して議論されているわけではない．それでは，方程式 (1.4) の中の $-\varepsilon$ を $+f(t)$ などと置き，$|f(t)| \le \varepsilon$ と仮定して，任意定数 c_2 を含む一般解を求め，上記で行ったように，方程式 (1.3) の一般解 $x(t) = c_1 e^{\lambda t}$ との差を導出してから，$c_1 = c_2$ とすればよいのではないか？残念ながら，単にこの手続きでは，$|z(t) - x(t)|$ が，$t \to \infty$ または $t \to -\infty$ のとき発散し，$I = \mathbb{R}$ 上でウラム安定と言えなくなるのである．つまり，単に $z(t)$ から $x(t)$ を引くだけでは，c_1 を上手く決定することはできないことが分かる．とは言いつつも，実は，上記の結論はあながち嘘ではなく，任意の ε-近似解 $z(t)$ に対しても $\mathbb{R}$ 上で $|z(t) - x(t)| \le \varepsilon/\lambda$ が得られるが，より詳細な解析が必要となる．それについては，[20, 24] を参照せよ．

さて，本研究では，行列係数をもつ線形微分方程式

$$\mathbf{y}' = B\mathbf{y} \tag{1.5}$$

を考える．ただし，$B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ である．もし，$\det B = 0$ ならば，B が少なくとも一つ 0 である固有値をもつことになる．この場合については，Anderson–Onitsuka [3, Lemma 4.1] によって，方程式 (1.5) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定でないことが示されている．したがって，今後は $\det B \neq 0$ を仮定する．ある正則行列 M を用いて，方程式 (1.5) に変数変換 $\mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{y}$ を導入すれば，線形微分方程式

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \tag{1.6}$$

を得る．ただし，$A = M^{-1}BM$ である．線形代数学の知識から，仮定 $\det B \neq 0$ より，適切な正則行列 M を選ぶことによって，行列 A は標準形として知られる行列

$$\text{(i)} \quad \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \quad \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \quad \begin{pmatrix} \rho & \phi \\ -\phi & \rho \end{pmatrix}$$

のいずれかになる．ただし，$\mu, \nu, \phi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\rho \in \mathbb{R}$ である．この変数変換は多くの定性的性質を保持することがよく知られている．例えば，方程式 (1.5) と方程式 (1.6) の原

点における漸近安定性について同値であることは，変数変換の形から明らかである．では，ウラム安定性についてはどうであろうか？実は，方程式 (1.6) が I 上でウラム安定であることと，方程式 (1.5) は I 上でウラム安定であることは同値であることが示される（後述の定理 2.3 を参照）．加えて，方程式 (1.6) が I 上でウラム安定であり，そのときのウラム定数が L としてすでに分かっているならば，方程式 (1.5) は I 上でウラム安定であるだけではなく，そのときのウラム定数が $\|M^{-1}\|\|M\|L$ であることも判明する（後述の定理 2.1 を参照）．ただし，M は上記の正則行列であり，$\|M\|$ は行列 M の行列のノルムを意味する．したがって，方程式 (1.6) のウラム安定性とウラム定数を調査することは，変数変換する前の方程式 (1.5) のウラム安定性とウラム定数を調査することにつながる．そこで本研究では，方程式 (1.6) のウラム安定性に焦点を絞り，具体的なウラム定数を導出することを目標とする．

ここで，これから記載することについて注意をしておく．本稿で得られる第 3 節の結果は，何れも Anderson–Onitsuka [3] で与えられた定理を使用すれば導出可能である．しかしながら，本稿では標準形の問題に単純化することで，証明を簡略化でき，新たな知見につながることが期待できるため，一部について証明を記載する．すなわち，文献 [3] とは別証明になることに注意しておく．また，本稿の内容は，著者が 2022 年の夏に岐阜大学で集中講義を行ったときの講義ノートを基にしている．実はその後，2022 年の 11 月〜12 月の間に，Anderson 氏および O'Regan 氏と本稿で扱う方程式よりも一般的な非自励方程式を対象として共同研究を行い，本稿の証明のアイディアを利用し，証明を改善・改良することで，本稿記載の結果よりもシャープな結果を得ている．2023 年の 1 月時点で，Anderson–Onitsuka–O'Regan [4] として投稿中である．したがって，文献 [4] の定理からも本稿の結果は得られることに注意しておくが，ウラム安定性の初学者にとって，読み易さと理解し易さを優先して，単純な方程式 (1.5) と (1.6) を扱い，上述の講義ノートのまま，すなわち，改善・改良を加える以前の簡潔な証明を記述する．

2　ウラム安定性の遺伝

本節では，一般的な定数係数線形微分方程式と標準形の線形微分方程式との間に成立するウラム安定性における同値関係について考察する．得られた結果は以下の通りである．

定理 2.1. 方程式 (1.6) が I 上でウラム安定であり，そのときのウラム定数が L ならば，方程式 (1.5) は I 上でウラム安定であり，そのときのウラム定数は $\|M^{-1}\|\|M\|L$ である．

証明. 方程式 (1.6) が I 上でウラム安定であり，そのときのウラム定数が L であると仮定する．いま，$\varepsilon > 0$ とし，$\mathbf{p} : I \to \mathbb{R}^n$ は不等式

$$\sup_{t\in I} \|\mathbf{p}' - B\mathbf{p}\| \le \varepsilon$$

を満たすと仮定する．このとき，方程式 (1.5) のある解 $\mathbf{q} : I \to \mathbb{R}^n$ が存在し，

$$\sup_{t \in I} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t)\| \leq \|M^{-1}\| \|M\| L\varepsilon$$

であることを示すのが目標となる．以後，文献 [4] を参照せよ． □

以下の結果も得られる．

定理 2.2. 方程式 (1.5) が I 上でウラム安定であり，そのときのウラム定数が L ならば，方程式 (1.6) は I 上でウラム安定であり，そのときのウラム定数は $\|M^{-1}\| \|M\| L$ である．

証明． 方程式 (1.5) が I 上でウラム安定であり，そのときのウラム定数が L であると仮定する．いま，$\varepsilon > 0$ とし，$\mathbf{p} : I \to \mathbb{R}^n$ は不等式

$$\sup_{t \in I} \|\mathbf{p}' - A\mathbf{p}\| \leq \varepsilon$$

を満たすと仮定する．このとき，方程式 (1.6) のある解 $\mathbf{q} : I \to \mathbb{R}^n$ が存在し，

$$\sup_{t \in I} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t)\| \leq \|M^{-1}\| \|M\| L\varepsilon$$

であることを示すのが目標となる．以後，文献 [4] を参照せよ． □

定理 2.1 と定理 2.2 より，直ちに以下の結果が得られる．

定理 2.3. 方程式 (1.6) が I 上でウラム安定であることと，方程式 (1.5) が I 上でウラム安定であることは同値である．

3 標準形のウラム安定性

まず，序文で登場した (i) のタイプの標準形の定数係数線形微分方程式

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{3.1}$$

のウラム安定性を考察する．得られた結果は以下の通りである．

定理 3.1. $I = \mathbb{R}$ かつ $\mu \neq 0 \neq \nu$ とする．このとき，方程式 (3.1) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，以下が成立する．

(i) もし，$\mu \geq \nu > 0$ ならば，一つのウラム定数は，$1/\nu$ である．

(ii) もし，$0 > \mu \geq \nu$ ならば，一つのウラム定数は，$1/(-\mu)$ である．

(iii) もし，$\mu > 0 > \nu$ ならば，一つのウラム定数は，$(\mu - \nu)/(-\mu\nu)$ である．

定理の証明の前に，いくつか準備を行っておこう．まず，一般論として，方程式 (1.5) の基本解行列を $\Gamma(t)$ と表記すれば，方程式

$$\mathbf{y}' = B\mathbf{y} + \mathbf{g}(t) \tag{3.2}$$

の解の公式は，$\mathbb{R}$ 上において，

$$\mathbf{y}(t) = \Gamma(t)\Gamma^{-1}(0)\mathbf{y}(0) + \Gamma(t)\int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau \tag{3.3}$$

として与えられる．ただし，$\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ である．当然，方程式 (3.1) は方程式 (1.5) の特別な場合であるから，(3.1) に摂動 $\mathbf{g}(t)$ が加わった摂動系においても (3.3) の形で解の公式が得られることに注意する．さて，方程式 (3.1) の係数行列は具体的であるから，基本解行列を求めることも容易である．実際に，基本解行列とその逆行列は，

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 \\ 0 & e^{\nu t} \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-\mu t} & 0 \\ 0 & e^{-\nu t} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

として得られる．前節では，行列のノルム $\|\cdot\|$ は任意の行列のノルムとして差し支えないが，本節では，ウラム定数を導出の際，詳細な計算を必要とするため，

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|a| + |b|, |c| + |d|\}$$

を行列のノルムとして用いる．では，以下に定理の証明を与える．

定理 3.1 の証明． まず，(i) $\mu \geq \nu > 0$ ならば，方程式 (3.1) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，ウラム定数は，$1/\nu$ であることを示す．$\varepsilon > 0$ とし，$\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は不等式

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{p}' - A\mathbf{p}\| \leq \varepsilon$$

を満たすと仮定する．このとき，方程式 (3.1) のある解 $\mathbf{q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ が存在し，

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\nu}$$

であることを示すのが目標となる．いま，$\mathbf{g} = \mathbf{p}' - A\mathbf{p}$ と定めれば，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\|\mathbf{g}(t)\| \leq \varepsilon$ が成り立つ．ここで定めた等式は，方程式 (3.2) において，$B = A$ かつ $\mathbf{y} = \mathbf{p}$ とした方程式であるので，先に述べた解の公式 (3.3) より，

$$\mathbf{p}(t) = \Gamma(t)\Gamma^{-1}(0)\mathbf{p}(0) + \Gamma(t)\int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau \tag{3.5}$$

を得る．ただし，Γ と Γ^{-1} は (3.4) で与えられた行列関数である．いま，関数

$$\mathbf{c}(t) = \int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau$$

とし，$t \to \infty$ のとき，$\mathbf{c}(t)$ は絶対収束することを示そう．$t \geq 0$ に対して，

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau\right\| &\leq \int_0^t \left\|\Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)\right\| d\tau \leq \int_0^t \left\|\Gamma^{-1}(\tau)\right\|_\infty \|\mathbf{g}(\tau)\|d\tau \\ &\leq \varepsilon \int_0^t \left\|\Gamma^{-1}(\tau)\right\|_\infty d\tau\end{aligned}$$

であるから，(3.4) より，$t \geq 0$ に対して，

$$\left\|\int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau\right\| \leq \varepsilon \int_0^t \left\|\begin{pmatrix} e^{-\mu\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\nu\tau}\end{pmatrix}\right\|_\infty d\tau = \varepsilon \int_0^t e^{-\nu\tau}d\tau = \frac{\varepsilon}{\nu}\left(1 - e^{-\nu t}\right) < \frac{\varepsilon}{\nu}$$

であるので，$t \to \infty$ のとき，$\mathbf{c}(t)$ は絶対収束し，$\lim_{t\to\infty} \mathbf{c}(t)$ が存在する．いま，この定ベクトルを $\mathbf{c}(\infty)$ と書き，

$$\mathbf{p}_\infty = \mathbf{p}(0) + \mathbf{c}(\infty) \tag{3.6}$$

と定める．当然，$\mathbf{p}_\infty$ は定ベクトルであるから，

$$\mathbf{q}(t) = \Gamma(t)\mathbf{p}_\infty$$

と置けば，この関数 $\mathbf{q}(t)$ は方程式 (3.1) のある解である．また，(3.5) と (3.6) より，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t) &= \Gamma(t)\Gamma^{-1}(0)\mathbf{p}(0) + \Gamma(t)\int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau - \Gamma(t)\mathbf{p}_\infty \\ &= \Gamma(t)\left(\Gamma^{-1}(0)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau - \mathbf{p}_\infty\right) \\ &= \Gamma(t)\left(\Gamma^{-1}(0)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau - \mathbf{p}(0) - \mathbf{c}(\infty)\right) \\ &= \Gamma(t)\left(\int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau - \mathbf{c}(\infty)\right) \\ &= -\int_t^\infty \Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau\end{aligned}$$

である．したがって，(3.4) より，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t)\| &= \left\|\int_t^\infty \Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau\right\| \leq \int_t^\infty \left\|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)\right\| d\tau \\ &\leq \int_t^\infty \left\|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tau)\right\|_\infty \|\mathbf{g}(\tau)\| d\tau \\ &\leq \varepsilon \int_t^\infty \left\|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tau)\right\|_\infty d\tau = \varepsilon \int_t^\infty \left\|\begin{pmatrix} e^{\mu t} & 0 \\ 0 & e^{\nu t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\mu\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\nu\tau}\end{pmatrix}\right\|_\infty d\tau \\ &= \varepsilon \int_t^\infty \left\|\begin{pmatrix} e^{-\mu(\tau-t)} & 0 \\ 0 & e^{-\nu(\tau-t)}\end{pmatrix}\right\|_\infty d\tau = \varepsilon \int_t^\infty e^{-\nu(\tau-t)}d\tau = \frac{\varepsilon}{\nu}\end{aligned}$$

を得る．以上より，方程式 (3.1) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，ウラム定数は，$1/\nu$ である．

次に，(ii) $0 > \mu \geq \nu$ ならば，方程式 (3.1) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，ウラム定数は，$1/(-\mu)$ であることを示す．$\varepsilon > 0$ とし，$\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は不等式

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{p}' - A\mathbf{p}\| \leq \varepsilon$$

を満たすと仮定する．いま，$\mathbf{g} = \mathbf{p}' - A\mathbf{p}$ と定めれば，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\|\mathbf{g}(t)\| \leq \varepsilon$ が成り立つ．また，(i) の証明と同様に，$\mathbf{p}(t)$ は (3.5) の形で与えられる．ただし，Γ と Γ^{-1} は (3.4) の行列関数である．さて，関数

$$\mathbf{d}(t) = \int_t^0 \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau$$

とし，$t \to -\infty$ のとき，$\mathbf{d}(t)$ は絶対収束することを示そう．$t \leq 0$ に対して，

$$\left\|\int_t^0 \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau\right\| \leq \int_t^0 \left\|\Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)\right\| d\tau \leq \varepsilon \int_t^0 \left\|\Gamma^{-1}(\tau)\right\|_\infty d\tau$$

であるから，(3.4) より，$t \leq 0$ に対して，

$$\left\|\int_t^0 \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau\right\| \leq \varepsilon \int_t^0 \left\|\begin{pmatrix} e^{-\mu\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\nu\tau} \end{pmatrix}\right\|_\infty d\tau = \frac{\varepsilon}{-\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right) < \frac{\varepsilon}{-\mu}$$

であるので，$t \to -\infty$ のとき，$\mathbf{d}(t)$ は絶対収束し，$\lim_{t\to-\infty} \mathbf{d}(t)$ が存在する．いま，この定ベクトルを $\mathbf{d}(-\infty)$ と書き，

$$\mathbf{p}_{-\infty} = \mathbf{p}(0) - \mathbf{d}(-\infty) \tag{3.7}$$

と定める．このとき，$\mathbf{q}(t) = \Gamma(t)\mathbf{p}_{-\infty}$ は方程式 (3.1) のある解である．また，(3.5) と (3.7) より，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t) &= \Gamma(t)\left(\Gamma^{-1}(0)\mathbf{p}(0) + \int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau - \mathbf{p}_{-\infty}\right) \\
&= \Gamma(t)\left(\int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau + \mathbf{d}(-\infty)\right) \\
&= \int_{-\infty}^t \Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

である．したがって，(3.4) より，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}(t) - \mathbf{q}(t)\| &= \left\|\int_{-\infty}^t \Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau\right\| \\
&\leq \varepsilon \int_{-\infty}^t \left\|\Gamma(t)\Gamma^{-1}(\tau)\right\|_\infty d\tau = \varepsilon \int_{-\infty}^t \left\|\begin{pmatrix} e^{-\mu(\tau-t)} & 0 \\ 0 & e^{-\nu(\tau-t)} \end{pmatrix}\right\|_\infty d\tau \\
&= \varepsilon \int_{-\infty}^t e^{-\mu(\tau-t)}d\tau = \frac{\varepsilon}{-\mu}
\end{aligned}$$

を得る．以上より，方程式 (3.1) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，ウラム定数は，$1/(-\mu)$ である．

最後に，(iii) $\mu > 0 > \nu$ ならば，方程式 (3.1) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，ウラム定数は，$(\mu-\nu)/(-\mu\nu)$ であることを示す．$\varepsilon > 0$ とし，$\mathbf{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は不等式

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathbf{p}' - A\mathbf{p}\| \leq \varepsilon$$

を満たすと仮定する．いま，$\mathbf{g} = \mathbf{p}' - A\mathbf{p}$ と定めれば，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\|\mathbf{g}(t)\| \leq \varepsilon$ が成り立つ．また，(i) の証明と同様に，$\mathbf{p}(t)$ は (3.5) の形で与えられる．ただし，Γ と Γ^{-1} は (3.4) の行列関数である．いま，関数

$$\mathbf{e}_+(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\mu\tau} g(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau, \quad \mathbf{e}_-(t) = \int_t^0 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\nu\tau} h(\tau) \end{pmatrix} d\tau$$

とする．ただし，$g(t)$ と $h(t)$ はそれぞれベクトル $\mathbf{g}(t)$ の第 1 成分と第 2 成分である．まず，$t \to \infty$ のとき，$\mathbf{e}_+(t)$ は絶対収束することを示す．$t \geq 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}_+(t)\| &\leq \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} e^{-\mu\tau} g(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| d\tau = \int_0^t e^{-\mu\tau} \left\| \begin{pmatrix} g(\tau) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| d\tau \\
&\leq \int_0^t e^{-\mu\tau} \|\mathbf{g}(\tau)\| d\tau \\
&\leq \varepsilon \int_0^t e^{-\mu\tau} d\tau = \frac{\varepsilon}{\mu}\left(1 - e^{-\mu t}\right) < \frac{\varepsilon}{\mu}
\end{aligned}$$

であるから，$t \to \infty$ のとき，$\mathbf{e}_+(t)$ は絶対収束し，$\lim_{t\to\infty} \mathbf{e}_+(t)$ が存在する．次に，$t \to -\infty$ のとき，$\mathbf{e}_-(t)$ は絶対収束することを示す．$t \leq 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{e}_-(t)\| &\leq \int_t^0 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-\nu\tau} h(\tau) \end{pmatrix} \right\| d\tau = \int_t^0 e^{-\nu\tau} \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ h(\tau) \end{pmatrix} \right\| d\tau \\
&\leq \int_t^0 e^{-\nu\tau} \|\mathbf{g}(\tau)\| d\tau \\
&\leq \varepsilon \int_t^0 e^{-\nu\tau} d\tau = \frac{\varepsilon}{-\nu}\left(1 - e^{-\nu t}\right) < \frac{\varepsilon}{-\nu}
\end{aligned}$$

であるから，$t \to -\infty$ のとき，$\mathbf{e}_-(t)$ は絶対収束し，$\lim_{t\to-\infty} \mathbf{e}_-(t)$ が存在する．ここで，

$$\mathbf{e}_+(\infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{e}_+(t), \quad \mathbf{e}_-(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} \mathbf{e}_-(t)$$

と書き，

$$\mathbf{p}_{\pm\infty} = \mathbf{p}(0) + \mathbf{e}_+(\infty) - \mathbf{e}_-(-\infty) \tag{3.8}$$

と定める．このとき，$\mathbf{q}(t)=\Gamma(t)\mathbf{p}_{\pm\infty}$ は方程式 (3.1) のある解である．また，(3.4), (3.5) と (3.8) より，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(t)-\mathbf{q}(t) &= \Gamma(t)\left(\Gamma^{-1}(0)\mathbf{p}(0)+\int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau-\mathbf{p}_{\pm\infty}\right)\\
&= \Gamma(t)\left(\int_0^t \Gamma^{-1}(\tau)\mathbf{g}(\tau)d\tau-\mathbf{e}_+(\infty)+\mathbf{e}_-(-\infty)\right)\\
&= \Gamma(t)\left(\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\mu\tau} & 0\\ 0 & e^{-\nu\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(\tau)\\ h(\tau)\end{pmatrix}d\tau-\mathbf{e}_+(\infty)+\mathbf{e}_-(-\infty)\right)\\
&= \Gamma(t)\left(\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\mu\tau}g(\tau)\\ e^{-\nu\tau}h(\tau)\end{pmatrix}d\tau-\mathbf{e}_+(\infty)+\mathbf{e}_-(-\infty)\right)\\
&= \Gamma(t)\left(\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\mu\tau}g(\tau)\\ 0\end{pmatrix}d\tau-\mathbf{e}_+(\infty)+\int_0^t \begin{pmatrix} 0\\ e^{-\nu\tau}h(\tau)\end{pmatrix}d\tau+\mathbf{e}_-(-\infty)\right)\\
&= \Gamma(t)\left(-\int_t^\infty \begin{pmatrix} e^{-\mu\tau}g(\tau)\\ 0\end{pmatrix}d\tau+\int_{-\infty}^t \begin{pmatrix} 0\\ e^{-\nu\tau}h(\tau)\end{pmatrix}d\tau\right)\\
&= -\int_t^\infty \Gamma(t)\begin{pmatrix} e^{-\mu\tau}g(\tau)\\ 0\end{pmatrix}d\tau+\int_{-\infty}^t \Gamma(t)\begin{pmatrix} 0\\ e^{-\nu\tau}h(\tau)\end{pmatrix}d\tau\\
&= -\int_t^\infty \begin{pmatrix} e^{-\mu(\tau-t)}g(\tau)\\ 0\end{pmatrix}d\tau+\int_{-\infty}^t \begin{pmatrix} 0\\ e^{-\nu(\tau-t)}h(\tau)\end{pmatrix}d\tau
\end{aligned}$$

である．したがって，任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{p}(t)-\mathbf{q}(t)\| &\le \left\|\int_t^\infty \begin{pmatrix} e^{-\mu(\tau-t)}g(\tau)\\ 0\end{pmatrix}d\tau\right\|+\left\|\int_{-\infty}^t \begin{pmatrix} 0\\ e^{-\nu(\tau-t)}h(\tau)\end{pmatrix}d\tau\right\|\\
&\le \int_t^\infty \left\|\begin{pmatrix} e^{-\mu(\tau-t)}g(\tau)\\ 0\end{pmatrix}\right\|d\tau+\int_{-\infty}^t \left\|\begin{pmatrix} 0\\ e^{-\nu(\tau-t)}h(\tau)\end{pmatrix}\right\|d\tau\\
&\le \int_t^\infty e^{-\mu(\tau-t)}\|\mathbf{g}(\tau)\|d\tau+\int_{-\infty}^t e^{-\nu(\tau-t)}\|\mathbf{g}(\tau)\|d\tau\\
&\le \varepsilon\left(\int_t^\infty e^{-\mu(\tau-t)}d\tau+\int_{-\infty}^t e^{-\nu(\tau-t)}d\tau\right)=\varepsilon\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{-\nu}\right)\\
&= \frac{\mu-\nu}{-\mu\nu}\varepsilon
\end{aligned}$$

を得る．以上より，方程式 (3.1) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，ウラム定数は，$(\mu-\nu)/(-\mu\nu)$ である． □

注意 3.1. 定理 3.1 の (i) と (ii) は，文献 [3] の Theorem 3.1 からも得られ，定理 3.1 の (iii) は，文献 [3] の Theorem 3.2 を用いれば得られる．また，文献 [4] の Corollary 3.4 を用いても，定理 3.1 が得られるが，特に，(iii) については，よりシャープなウラム定数が導出可能であることも分かる．

注意 3.2. 文献 [3, 4] から，定理 3.1 の (i) と (ii) で与えられたウラム定数は，最良ウラム定数であることが分かっている．文献 [4] では，(iii) の場合の最良ウラム定数も得られている．ここで詳しく述べないが，最良ウラム定数を導出するためには，単にウラム安定性を証明するだけでなく，それ以外の詳細な情報を必要とすることに注意しておく．

次に，序文で登場した (ii) のタイプの標準形の定数係数線形微分方程式

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{3.9}$$

のウラム安定性を考察する．このとき，以下の結果が得られる．

定理 3.2. $I = \mathbb{R}$ かつ $\mu \neq 0$ とする．このとき，方程式 (3.9) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，以下が成立する．

(i) もし，$\mu > 0$ ならば，一つのウラム定数は，$(\mu + 1)/\mu^2$ である．

(ii) もし，$0 > \mu$ ならば，一つのウラム定数は，$(-\mu + 1)/\mu^2$ である．

定理 3.2 の証明は，定理 3.1 と同様の証明手法で証明できるため省略する．

注意 3.3. 定理 3.2 は，文献 [3] の Theorem 3.1 からも得られる．また，文献 [4] の Corollary 4.4 を用いても，定理 3.2 が得られる．

注意 3.4. 文献 [3, 4] から，定理 3.2 の (i) と (ii) で与えられたウラム定数は，最良ウラム定数であることが分かっている．

次に，序文で登場した (iii) のタイプの標準形の定数係数線形微分方程式

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \rho & \phi \\ -\phi & \rho \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{3.10}$$

のウラム安定性を考察する．このとき，以下の結果が得られる．

定理 3.3. $I = \mathbb{R}$ かつ $\rho \neq 0 \neq \phi$ とする．このとき，方程式 (3.9) は $\mathbb{R}$ 上でウラム安定であり，以下が成立する．

(i) もし，$\rho > 0$ ならば，一つのウラム定数は，$\sqrt{2}/\rho$ である．

(ii) もし，$0 > \rho$ ならば，一つのウラム定数は，$\sqrt{2}/(-\rho)$ である．

定理 3.3 の証明は，定理 3.1 と同様の証明手法で証明できるため省略する．

注意 3.5. 定理 3.3 は，文献 [3] の Theorem 3.3 からも得られる．また，文献 [4] の Theorem 5.6 を用いても，定理 3.3 が得られる．

注意 3.6. 文献 [4] の Theorem 5.6 から，定理 3.3 の (i) と (ii) で与えられたウラム定数は，最良ウラム定数であることが分かっている．

4　まとめ

本稿では，行列係数をもつ線形微分方程式のウラム安定性について紹介した．一般的な線形微分方程式のウラム安定性は，標準形を行列係数としてもつ線形微分方程式（以後，標準形の線形微分方程式と呼ぶ.）のウラム安定性に帰着されることを示した．その結果，単にウラム安定性を調べるには，標準形の線形微分方程式のウラム安定性を考察すればよいことになる．本稿では特に，2×2 の行列係数の場合に限り，標準形の線形微分方程式における明示的なウラム定数の導出を実現し，いくつかの場合で最良ウラム定数を得ることができた．また，これまで多くの線形微分方程式のウラム安定性の解析で課されていた初期条件や境界条件，そして，有界区間に限定する条件は，本研究では使用しておらず，不要であることが明白となった．

本稿で紹介した証明は，文献 [3] で使用した証明をよりシンプルに改良しようというアイディアから生まれた．さらに，証明方法を練り上げ，詳細を調べることで，文献 [4] の結果へと発展することができている．特に，文献 [4] では，$I = \mathbb{R}$ に限定せず，ある時刻で特異性をもつ変数係数の方程式も扱える結果を与えており，例えば，有限時刻で爆発する近似解に対しても近くに真の解の存在を保証する定理を確立した．もし，興味があれば参照していただきたい．

参考文献

[1] R. P. Agarwal, B. Xu and W. Zhang, Stability of functional equations in single variable, J. Math. Anal. Appl. **288** (2003), no. 2, 852–869.

[2] C. Alsina and R. Ger, On some inequalities and stability results related to the exponential function, J. Inequal. Appl. **2** (1998), no. 4, 373–380.

[3] D. R. Anderson and M. Onitsuka, Hyers–Ulam stability for differential systems with 2×2 constant coefficient matrix, Results Math. **77** (2022), Paper No. 136, 23 pp.

[4] D. R. Anderson, M. Onitsuka and D. O'Regan, Best Ulam constants for two-dimensional nonautonomous linear differential systems, 投稿中.

[5] L. Backes, D. Dragičević, M. Onitsuka and M. Pituk, Conditional Lipschitz shadowing for ordinary differential equations, J. Dynam. Differential Equations, 受理.

[6] A. Baias and D. Popa, On the best Ulam constant of the second order linear differential operator, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **114** (2020), no. 1, Paper No. 23, 15 pp.

[7] F. Blaga, L. Mesaroş, D. Popa, G. Pugna and I. Raşa, Bounds for solutions of linear differential equations and Ulam stability, Miskolc Math. Notes **21** (2020), no. 2, 653–664.

[8] J. Brzdęk, K. Ciepliński and Z. Leśniak, On Ulam's type stability of the linear equation and related issues, Discrete Dyn. Nat. Soc. 2014, Art. ID 536791, 14 pp.

[9] J. Brzdęk, D. Popa, I. Raşa and B. Xu, Ulam Stability of Operators. Mathematical Analysis and Its Applications, Academic Press, London, 2018.

[10] C. Buşe, V. Lupulescu and D. O'Regan, Hyers–Ulam stability for equations with differences and differential equations with time-dependent and periodic coefficients, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **150** (2020), no. 5, 2175–2188.

[11] D. Dragičević, Hyers–Ulam stability for a class of perturbed Hill's equations, Results Math. **76** (2021), no. 3, Paper No. 129, 11 pp.

[12] R. Fukutaka and M. Onitsuka, Best constant for Ulam stability of Hill's equations, Bull. Sci. Math. **163** (2020), 102888, 23pp.

[13] D. H. Hyers, On the stability of a linear functional equation, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **27** (1941), 222–224.

[14] D. H. Hyers, G. Isac and Th. M. Rassias, Stability of functional equations in several variables, (English summary) Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 34, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

[15] S.-M. Jung, Hyers–Ulam stability of a system of first order linear differential equations with constant coefficients, J. Math. Anal. Appl. **320** (2006) 549–561.

[16] S.-M. Jung, Hyers–Ulam–Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis, Springer Optimization and Its Applications, 48. Springer, New York, 2011.

[17] S.-M. Jung and Y. W. Nam, Hyers–Ulam stability of the first order inhomogeneous matrix difference equation, J. Comput. Anal. Appl. **23** (2017), No. 8, 1368–1383.

[18] M. Obłoza, Hyers stability of the linear differential equation, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **13** (1993), 259–270.

[19] M. Obłoza, Connections between Hyers and Lyapunov stability of the ordinary differential equations, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. **14** (1997), 141–146.

[20] M. Onitsuka, Hyers–Ulam stability of first order linear differential equations of Carathéodory type and its application, Appl. Math. Lett. **90** (2019), 61–68.

[21] M. Onitsuka, Conditional Ulam stability and its application to the logistic model, Appl. Math. Lett. **122** (2021), Paper No. 107565, 7 pp.

[22] M. Onitsuka, Conditional Ulam stability and its application to von Bertalanffy growth model, Math. Biosci. Eng. **19** (2022), no. 3, 2819–2834.

[23] M. Onitsuka and Iz. El-Fassi, On approximate solutions of a class of Clairaut's equations, Appl. Math. Comput. **428** (2022), Paper No. 127205, 13 pp.

[24] M. Onitsuka and T. Shoji, Hyers–Ulam stability of first-order homogeneous linear differential equations with a real-valued coefficient, Appl. Math. Lett. **63** (2017), 102–108.

[25] D. Popa, I. Raşa and A. Viorel, Approximate solutions of the logistic equation and Ulam stability, Appl. Math. Lett. **85** (2018), 64–69.

[26] D. Popa and I. Raşa, On the best constant in Hyers–Ulam stability of some positive linear operators, J. Math. Anal. Appl. **412** (2014), no. 1, 103–108.

[27] D. Popa and I. Raşa, Best constant in Hyers–Ulam stability of some functional equations, Carpathian J. Math. **30** (2014), no. 3, 383–386.

[28] D. Popa and I. Raşa, Best constant in stability of some positive linear operators, Aequationes Math. **90** (2016), no. 4, 719–726.

[29] S. M. Ulam, Problem in Modern Mathematics, Chapter IV, Science Editors, Willey, New York, 1960.