

# Existence and multiplicity of positive solutions to the scalar-field equation on large annuli in the 3-sphere

防衛大学校・情報工学科 渡辺 宏太郎

Kohtaro Watanabe

Department of Computer Science, National Defense Academy

東北大学・大学院理学研究科数学専攻 田中 敏

Satoshi Tanaka

Mathematical Institute, Tohoku University

横浜国立大学 塩路 直樹

Naoki Shioji

Yokohama National University

三次元単位球面  $\mathbb{S}^3$  上のスカラーフィールド方程式のディリクレ問題

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{S}^3} U - U + U^p = 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ U = 0 & \text{on } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (1)$$

を考える. ここで,  $\Delta_{\mathbb{S}^3}$  は  $\mathbb{S}^3$  上の Laplace-Beltrami 作用素,  $p > 1$ ,  $0 < \varepsilon < \pi/2$  であり,  $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{S}^3$  は

$$\Omega_\varepsilon := \left\{ (\sin \theta \sin \phi \sin \psi, \sin \theta \sin \phi \cos \psi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta) \in \mathbb{R}^4 : \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \psi \leq 2\pi \right\}$$

である. (1) の  $\theta$  にのみ依存する正值解について考察する. そのような解  $u(\theta)$  は

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \theta} ((\sin^2 \theta)u')' - u + u^p = 0, & \theta \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon), \\ u(\varepsilon) = u(\pi - \varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

を満たす. さらに (2) は次のように書き換えることができる.

$$\begin{cases} w_{rr}(r) + (\cos r)^{1-p} w(r)^p = 0, & w(r) > 0, \quad r \in (-a, a), \\ w(-a) = w(a) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

このような定曲率空間（やそれを一般化した Riemann 多様体）で基本的な楕円型方程式を扱う問題に対する研究は近年拡がりを見せている．例えば，双曲空間上で Mancini and Sandeep[11] は Brezis-Nirenberg 問題の正值解の存在・非存在を扱った（[7, 8, 12, 16] も参照）．さらに Bandle and Kabeya[2] では解の漸近挙動について研究を行っている．一方，球面上の問題については次の結果が知られている．Bandle and Peletier[5] 及び Bandle and Benguria[1] は  $\mathbb{S}^3$  上で測地球 (spherical caps) 上でスカラーフィールド方程式を扱った．さらに Bandle and Wei [6], Bandle, Kabeya and Ninomiya [3, 4] は  $\mathbb{S}^N$  に一般化して同じ問題を扱っている（Kosaka and Miyamoto [10] も参照）．上記の問題は空間全体，或いは測地球上での問題を扱っており，円環領域上ではあまり扱われていないように思える（Shioji and Watanabe [13, 14] では正值球対称解の一意性を扱っている）．本研究は，この円環領域上でのスカラーフィールド方程式の正值球対称解の多重存在性と一意性を扱う．

ところで領域  $\Omega_\varepsilon$  の対称性から，問題 (2) は  $\theta = \pi/2$  について対称な解をもち得る．このような  $\theta = \pi/2$  について対称な解を偶関数解とよび，そうでない解を非偶関数解とよぶことにする．上記には円環領域上の研究の充実を理由に上げたが，実は，S. Tanaka[17] で扱われた 2 点境界値問題の類似物を球面上の問題として扱ってみるとどうなるのだろうかという疑問も動機となっていたことを記しておきたい．

次が偶関数解，非偶関数解の個数について得た結果である．

**定理 1** 各  $p > 1$  に対して，以下を満たす  $\varepsilon_p \in (0, \pi/2)$  が存在する． $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_p$  ならば，次の (i)–(iv) が成り立つ：

- (i)  $1 < p \leq 5$  ならば問題 (2) は  $\theta = \pi/2$  について対称な正值解をただ一つもつ．
- (ii)  $p > 5$  ならば問題 (2) は  $\theta = \pi/2$  について対称な正值解を少なくとも 3 個もつ．
- (iii)  $1 < p \leq (\pi^2 + 12)/(\pi^2 - 4) (\approx 3.73)$  ならば問題 (2) は  $\theta = \pi/2$  について非対称な正值解をもたない．
- (iv)  $p > 4$  ならば問題 (2) は  $\theta = \pi/2$  について非対称な正值解を少なくとも 2 個もつ．

上記の主張 (iv) は [15] では  $4 < p \leq 5$  の場合と  $p > 5$  の場合に分けて証明を行うが，(i), (ii), (iii) については主張のとおりを示す．指数  $p$  に依存した解の個数の変化をとらえるという意味では，上記は次のようにまとめた方がわかりやすい．

**系 1** 各  $p > 1$  に対して，以下を満たす  $\varepsilon_p \in (0, \pi/2)$  が存在する． $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_p$  ならば，次の (i)–(iii) が成り立つ：

- (i)  $1 < p < (\pi^2 + 12)/(\pi^2 - 4) (\approx 3.73)$  ならば，(2) は一意な正值球対称解をもつ（これは偶関数解となる）．
- (ii)  $4 < p \leq 5$  ならば，(2) は少なくとも 3 個の正值球対称解をもつ（一意な偶関数解と少なくとも 2 つの非偶関数解が存在する）．

- (iii)  $5 < p$ ならば, (2)は少なくとも5個の正值球対称解をもつ (少なくとも3個の偶関数解と少なくとも2個の非偶関数解をもつ).

上記の結果に対する注意を述べたい.

### 注意 1

1.  $p + 1 = 6$ は正值偶関数解の一意存在と多重存在を分ける指数だが, これは $\Omega$ を $\mathbb{S}^3$ 上の領域としたときのソボレフ, コンパクト埋め込み $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ の臨界指数になっている. この指数の対応は偶然なのだろうか?
2.  $\mathbb{R}^N$ の円環領域で対応する問題を考えると $N \geq 3$ の場合はTang [18],  $N = 2$ の場合はFelmer, Martínez and K. Tanaka [9]によってスカラーフィールド方程式の正值球対称解の一意性が示されている. したがって, 定理1の(2)の正值解の多重存在性の部分は球面の効果によるものと言える.
3. 定理1は $p$ が区間 $[(\pi^2 + 12)/(\pi^2 - 4), 4]$ のどこかの値で正值球対称解の一意性が崩れると言っているが, 正確な値は今のところ不明である. 或いはもう少しタイトな範囲に絞ることができるのであろうか?

定理1の(i), (iii)は正值球対称解の一意性に係る部分でこの部分はPohožaev恒等式を用いて示す[14]. 図1, 2, 3は $p = 4.5$ で $a = \pi/2 - 0.01$ の場合の3つの正值球対称解を表す. これは系1-(ii)の場合に相当する. 図2の偶関数解は一意存在する解である. 左側のグラフは(3)の解, 右側のグラフは(2)の解で $\theta = \pi/2$ を原点に移す平行移動を行った図である.

ところで問題(3)は,  $\varepsilon = 0$ の場合,  $w(r) = \cos r$ という解をもつ. 形式的に $w(r) = \cos r$ のまわりの線形化固有値問題

$$\begin{cases} \Phi'' + p\Phi + \lambda\Phi = 0, & r \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ \Phi(-\frac{\pi}{2}) = \Phi(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

を考えると, 問題(4)は固有値 $\lambda_k = k^2 - p$  ( $k = 1, 2, \dots$ )をもつ.  $p = 4$ のとき, 第二固有値 $\lambda_2$ は0となる.  $4 < p \leq 5$ の場合は(2)の正值偶関数解はPohožaev型の恒等式を利用すると一意であることがわかるので,  $\varepsilon > 0$ が十分小さいときは, それは $\varepsilon = 0$ のときの正值偶関数解 $\cos r$ にある意味で近い.  $4 < p \leq 5$ のとき, (4)の固有値 $\{\lambda_k\}$ は $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ を満たすので,  $\varepsilon > 0$ が十分小さいときは(3)の正值偶関数解のMorse指数は2であることが示される. また, (3)の最小エネルギー解 $w_*(r)$ はMorse指数が1の正值解であることが知られているので,  $w_*(r)$ は偶関数解にはなり得ない. 以上が系1-(ii)の解の多重存在性の直観的説明となる (詳細については[15]をご覧ください).

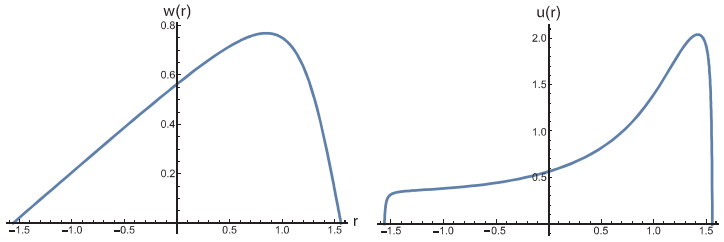


図 1:  $r \mapsto w(r)$  及び  $r \mapsto u(r)$ ,  $r \in (0, a)$  のグラフ. パラメータ:  $p = 4.5$ ,  $a = \pi/2 - 0.01$ .  
Rayleigh 商:  $R(w) = 1.305$ .

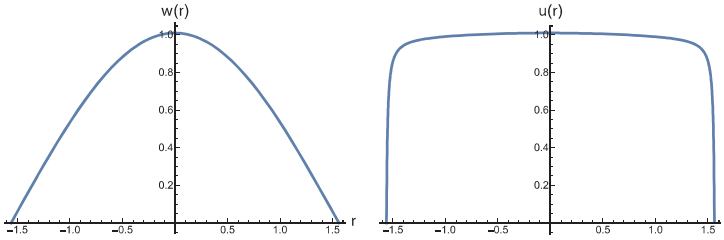


図 2:  $r \mapsto w(r)$  及び  $r \mapsto u(r)$ ,  $r \in (0, a)$  のグラフ. パラメータ:  $p = 4.5$ ,  $a = \pi/2 - 0.01$ .  
Rayleigh 商:  $R(w) = 1.350$ .

次に  $p > 5$  の場合を考える. そのとき, (2) の偶関数上の最小エネルギー解  $W_*(r)$  は,  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき,  $W_*(0) \rightarrow 0$  を満たすことがそのエネルギーを評価することでわかる. このことを利用して正值偶関数解が少なくとも3つ存在することを示す. 図6の解は(3)の解の最大値の大きさが他の2つに比べて小さく異質な解に思える. さらにこの解は偶関数に限ったとき Rayleigh 商を最小化 ( $R(w) = 0.285$ である. 他の2解は  $R(w) = 1.437$ となり, 大きな値をとる) する解である. 非偶関数解はこの偶関数における最小化元よりもさらに Rayleigh 商が小さくなる解である. この場合は, 図6に対応する偶関数解の Morse 指数が1でないことを示すのは難しいよう思える. そのため  $p > 5$  でも非偶関数解が存在することを示すために, 別の方法を模索した. 具体的には図6に対応する偶関数解の Rayleigh 商に関する第2変分を計算し, 安定でない許容関数が存在することを示すことにより証明を行った. 証明では  $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき,  $W_*(0) \rightarrow 0$  となることを再び用いている. 図7, 8は2つの非偶関数解を表す. Rayleigh 商の値は  $R(w) = 0.166$  となり, 確かに図6に対応する偶関数解の Rayleigh 商  $R(w) = 0.285$  よりも小さくなっていることが見て取れる (最後に主観的なことを書いてしまいますが, 図6の解, 図7, 8の解共に極端な形状をした解であり, これらが Rayleigh 商の最小化元になっていることは興味深く思えます).

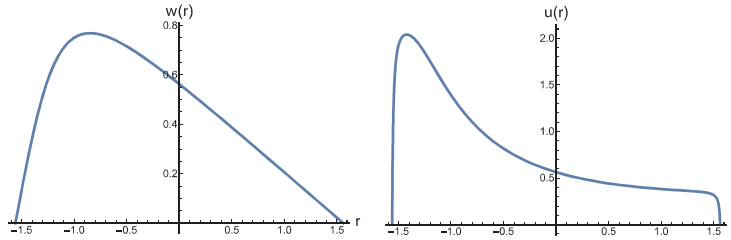


図 3:  $r \mapsto w(r)$  及び  $r \mapsto u(r)$ ,  $r \in (0, a)$  のグラフ. パラメータ:  $p = 4.5$ ,  $a = \pi/2 - 0.01$ .  
Rayleigh 商:  $R(w) = 1.305$ .

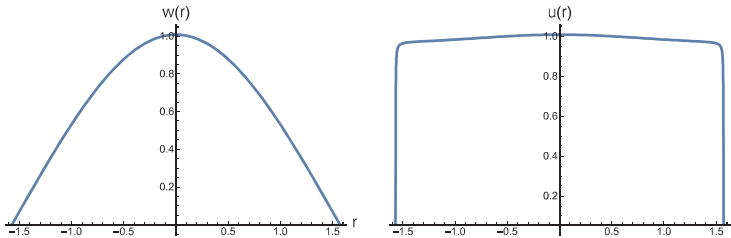


図 4:  $r \mapsto w(r)$  及び  $r \mapsto u(r)$ ,  $r \in (0, a)$  のグラフ. パラメータ:  $p = 9$ ,  $a = 1.57$ .  
Rayleigh 商:  $R(w) = 1.436$ .

## 参考文献

- [1] C. Bandle and R. Benguria, *The Brézis-Nirenberg problem on  $S^3$* , J. Differential Equations **178** (2002), 264–279.
- [2] C. Bandle and Y. Kabeya, *On the positive, “radial” solutions of a semilinear elliptic equation in  $\mathbb{H}^N$* , Adv. Nonlinear Anal. **1** (2012), no. 1, 1–25.
- [3] C. Bandle, Y. Kabeya, and H. Ninomiya, *Imperfect bifurcations in nonlinear elliptic equations on spherical caps*, Commun. Pure Appl. Anal. **9** (2010), no. 5, 1189–1208, DOI 10.3934/cpaa.2010.9.1189.
- [4] ———, *Bifurcating solutions of a nonlinear elliptic Neumann problem on large spherical caps*, Funkcial. Ekvac. **62** (2019), no. 3, 285–317.
- [5] C. Bandle and L. A. Peletier, *Best Sobolev constants and Emden equations for the critical exponent in  $S^3$* , Math. Ann. **313** (1999), no. 1, 83–93.
- [6] C. Bandle and J. Wei, *Multiple clustered layer solutions for semilinear elliptic problems on  $S^n$* , Comm. Partial Differential Equations **33** (2008), no. 4-6, 613–635, DOI 10.1080/03605300801970911.
- [7] M. Bonforte, F. Gazzola, G. Grillo, and J. L. Vázquez, *Classification of radial solutions to the Emden-Fowler equation on the hyperbolic space*, Calc. Var. Partial Differential Equations **46** (2013), no. 1-2, 375–401.
- [8] P. C. Carrião, R. Lehrer, O. H. Miyagaki, and A. Vicente, *A Brezis-Nirenberg problem on hyperbolic spaces*, Electron. J. Differential Equations (2019), Paper No. 67, 15.

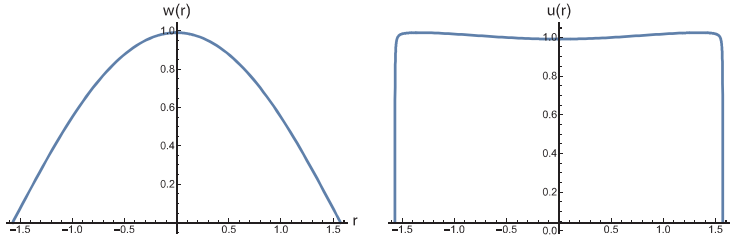


図 5:  $r \mapsto w(r)$  及び  $r \mapsto u(r)$ ,  $r \in (0, a)$  のグラフ. パラメータ:  $p = 9$ ,  $a = 1.57$ .  
Rayleigh 商:  $R(w) = 1.437$ .

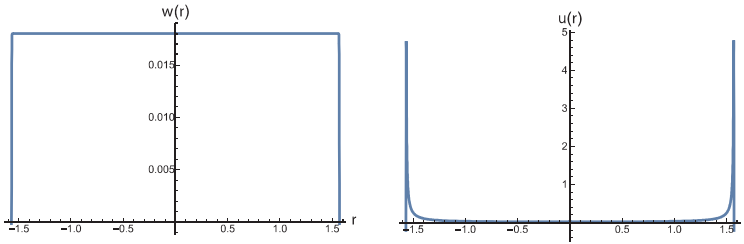


図 6:  $r \mapsto w(r)$  及び  $r \mapsto u(r)$ ,  $r \in (0, a)$  のグラフ. パラメータ:  $p = 9$ ,  $a = 1.57$ .  
Rayleigh 商:  $R(w) = 0.285$ .

- [9] P. Felmer, S. Martínez, and K. Tanaka, *Uniqueness of radially symmetric positive solutions for  $-\Delta u + u = u^p$  in an annulus*, J. Differential Equations **245** (2008), no. 5, 1198–1209, DOI 10.1016/j.jde.2008.06.006.
- [10] A. Kosaka and Y. Miyamoto, *The Emden-Fowler equation on a spherical cap of  $\mathbb{S}^n$* , Nonlinear Analysis **178** (2019), 110–132.
- [11] G. Mancini and K. Sandeep, *On a semilinear elliptic equation in  $\mathbb{H}^n$* , Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **7** (2008), no. 4, 635–671.
- [12] N. Shioji and K. Watanabe, *Uniqueness of positive solutions of Brezis-Nirenberg problems on  $\mathbb{H}^n$* , Linear Nonlinear Anal. **1** (2015), no. 2, 261–270.
- [13] ———, *Uniqueness and nondegeneracy of positive radial solutions of  $\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \rho(-gu + hu^p) = 0$* , Calc. Var. Partial Differential Equations **55** (2016), Art. 32, 42.
- [14] ———, *Uniqueness of positive radial solutions of the Brezis-Nirenberg problem on thin annular domains on  $\mathbb{S}^n$  and symmetry breaking bifurcations*, Commun. Pure Appl. Anal. **19** (2020), no. 10, 4727–4770, DOI 10.3934/cpaa.2020210.
- [15] N. Shioji, S. Tanaka, and K. Watanabe, *Uniqueness and multiple existence of positive radial solutions of the Scalar-field Equation on annular domains in  $\mathbb{S}^3$* , Submitting.
- [16] S. Stapelkamp, *The Brezis-Nirenberg problem on  $\mathbb{H}^n$ . Existence and uniqueness of solutions*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

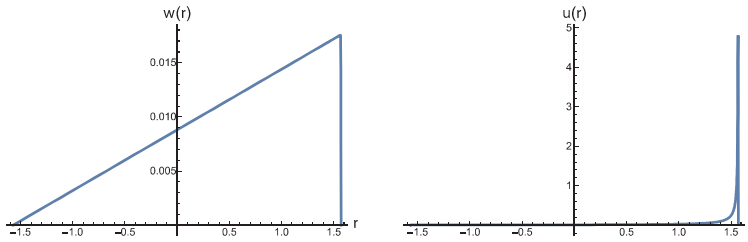


図 7:  $r \mapsto w(r)$  及び  $r \mapsto u(r)$ ,  $r \in (0, a)$  のグラフ. パラメータ:  $p = 9$ ,  $a = 1.57$ .  
Rayleigh 商:  $R(w) = 0.166$ .

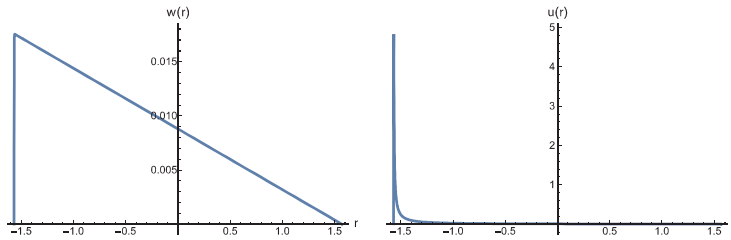


図 8:  $r \mapsto w(r)$  及び  $r \mapsto u(r)$ ,  $r \in (0, a)$  のグラフ. パラメータ:  $p = 9$ ,  $a = 1.57$ .  
Rayleigh 商:  $R(w) = 0.166$ .

- [17] S. Tanaka, *Morse index and symmetry-breaking for positive solutions of one-dimensional Hénon type equations*, J. Differential Equations **255** (2013), no. 7, 1709–1733, DOI 10.1016/j.jde.2013.05.029.
- [18] M. Tang, *Uniqueness of positive radial solutions for  $\Delta u - u + u^p = 0$  on an annulus*, J. Differential Equations **189** (2003), no. 1, 148–160, DOI 10.1016/S0022-0396(02)00142-0.