

(続紙 1)

京都大学	博士 (理 学)	氏名	後藤 慶太
論文題目	On Affine Structures Which Come from Berkovich Geometry for K-trivial Finite Quotients of Abelian Varieties (アーベル多様体の K-自明な有限商の Berkovich 幾何に付随するアフィン構造について)		
(論文内容の要旨)			
<p>後藤慶太氏の学位論文の主たるテーマは、非アルキメデス幾何学の一つであるベルコビッチ幾何学およびその「有限」版であるトロピカル幾何学(およびその複素幾何学との関係性)である。これらは複素解析空間の幾何学の類似として元来は導入されたものであるが、他分野での重要性や応用が近年増してきている。その応用は力学系、数論、数論幾何学、代数幾何に加え、数理物理学におけるミラー対称性といったところにも及んでいる。後藤氏は修士課程および博士課程1年目までには純粋にベルコビッチ幾何学に現れる構造そのものの研究を主にしてきたのだが、博士課程2年目からはミラー対称性の実現のために提唱された予想に着目をした。ただし後藤氏の学位論文そのものはそうした数理物理的な応用やミラー対称性への応用よりは純粋に数学的な研究といえる。以下、より詳しい背景と氏の研究成果について述べる。一般に体 k 上の代数多様体 X および k の上のしかるべき付値が与えられると、それに伴う X のベルコビッチ解析化 X^{an} が与えられる。これは X に対応するさまざまな非アルキメデス解析化の相当物の中で空間として古典的な直感の働く空間である。ベルコビッチはベルコビッチ解析空間の点 x に対してその剰余体が付値体であることからさらにその剰余体を取ることで二重剰余体という概念を考えた。これの代数幾何学的な意味を主に k 上に自明な付値を与えた場合に考えたのが彼の修士論文であったが、博士課程1年次において彼はそれを一般の付値体に拡張する方向の仕事を行った。これは一部学位論文の3節に収められている。その主張は、双有理モデル内の中心を元に記述をするもので、非アルキメデス幾何学に深く双有理幾何に関わる一つの現れでもある。次に主に博士後期課程2年次以降に後藤氏が研究を発展させた、学位論文の主題の背景について詳述する。数理物理学の中の超弦理論において見つかったミラー対称性はシンプレクティック幾何学と複素幾何学の深いレベルでの双対性であるが、その一つのより数学的な解釈、理解の仕方として1990年台にストロミンジャー-ヤウ-ザスロウによる数理物理の論文によって提唱されたものがある。これは(広義)カラビヤウ多様体の中の特殊ラグランジアン多様体のなすモジュライないしファイブレーションを考えて、その双対(T双対性)をとることによってミラーを実現するという考え方であった。この実現のためには数学的にはまずカラビヤウ多様体の上にそうした特殊ラグランジアン多様体のなすファイブレーション(以下特殊ラグランジアンファイブレーション)を構成することがまず第一の重要な問題となる。また、この問題は数理物理的な動機以外にもモジュライのコンパクト化や微分幾何学におけるリッチ平坦ケーラー計量の漸近挙動への応用にも重要な応用を持つと近年の研究(例えば尾高一)</p>			

島) でわかってきている。

一方でコンツエビッジーソイベルマンらは、上記特殊ラグランジアンファイブレーションの非アルキメデス幾何学的な類似としてベルコビッチによるベルコビッチ空間からその本質的スケルトン、ないしトロピカル化、への上のレトラクションを捉えられること指摘した。それらはしばしば非アルキメデス SYZ ファイブレーションと呼ばれる。これらの二つのタイプの SYZ ファイブレーション (特殊ラグランジアンファイブレーションと非アルキメデス SYZ ファイブレーション) の共通する顕著な性質として、ファイブレーションの底空間の上に (特異点つき) 整アフィン構造が構成されるという事が指摘されており、コンツエビッジーソイベルマンらはこれらが然るべき意味で一致するであろうという神秘的な予想 (以下コンツエビッジーソイベルマン予想と呼ぶ) を提唱していた。後藤氏はその学位論文の主要論文においてまずこのコンツエビッジーソイベルマン予想を複素 2 次元の多くの場合に強い形の解決をもたらした。そのために彼はまずその場合の特殊ラグランジアンファイブレーションの存在と構成を扱い、大変具体的な記述を与えた。先行研究である K 3 曲面の場合の特殊ラグランジアンファイブレーションは尾高一夫大島のモノグラフによって、超ケーラー回転と周期の記述を用いて極大退化の近傍で一般に存在が証明されていたが、これは抽象的な証明であるため、直接的には明示的構成は与えないものである。これは一部尾高悠志との共同研究の中でなされたが、アーベル多様体の有限商の極大退化族を扱うにあたり、有限群のアーベル多様体の退化族への作用とそのトロピカル化への作用の関係を明らかにする必要がある、この部分において後藤氏は主要な寄与を行った。その一方で後藤氏のアプローチは非アルキメデス幾何側により大きな貢献をもたらした。つまりクンマー曲面やアーベル曲面など一般のアーベル多様体の K 自明な有限商の場合に、非アルキメデス解析化されたアーベル多様体のマンフォード・ファルティングスチャイの一意化と対応するトロピカル化の細分に基づいてのモデルの構成を与え、それによって非アルキメデス SYZ ファイブレーションの明示的な記述を可能とした。後藤氏はまず、この問題を特にクンマー曲面の場合にはオーバーキャンプ氏の結果を援用した上でトロピカル化としての実トーラスの細分・(多重周期的な) 三角化の構成を注意深く与えることで解決した。2 次元の場合には後藤氏の単著である主要論文の中でなされたものであり、その後一般次元への拡張が尾高悠志との共同研究の中でなされた。これらも学位論文の一部に含まれている。さらに上述共同研究の中では、上記二つのファイブレーション (特殊ラグランジアンファイブレーションと非アルキメデス SYZ ファイブレーション) を融合したハイブリッド SYZ ファイブレーションの概念を提唱し、その存在証明と構成を一般の K 自明な多くのアーベル多様体の有限商の極大退化に対して実行した。これは前述のコンツエビッジーソイベルマン予想やそれにまつわる先行研究の中では期待すら記述されていなかったものであり、本質的に新たな発見であると言える。ここにおいても後藤氏の非アルキメデス SYZ ファイブレーションの明示的な理解や有限群の作用の様子は、議論中の重要なピースである。一方でその後には尾高悠志との共同研究においてこれらの構成を一般次元化にも成功しているが、実際にはその鍵となる議論は後藤氏の単著主要論文の中で既に見つかった。

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

これらのファイブレーションの存在問題や構成、並びに群作用との明示的整合性は大変技術的な問題であり、その丁寧な問題解決を行ったことは高く評価される。令和5年1月23日、上記の学位論文内容とそれに関連した事項について公聴会と試問を行った。これらの研究を遂行するには大変膨大で高度な予備知識と広い知見が必要である。それらに対する十分に綿密な理解はもちろん、自身で構成を適宜改良する非アルキメデス幾何学における技術、コンツエビッジーソイベルマン予想への貢献の成果は高く評価され国際的にも認識されている次第であり、公聴会の中でその成果は十分に説明された。よって本学位論文提出者後藤慶太は博士の学位を授与されるに十分な資格があると判断し、合格と認めた。

要旨公開可能日： _____ 年 _____ 月 _____