（ 続紙 1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	前田　洋太
論文題目	Birational geometry and compactifications of modular varieties and arithmetic of modular forms （モジュラー多様体の双有理幾何学とコンパクト化及びモジュラー形式の数論について）		

（論文内容の要旨）

エルミート対称領域の算術商として定義されるモジュラー多様体は，代数幾何学や数論における重要な研究対象である．モジュラー多様体上の直線束の切断は保型形式とも関係しており，保型形式論の観点からも重要である．本論文において，前田氏は，符号 $(1,n)$ のユニタリ群に伴うエルミート対称領域の算術商 (ボール商) の場合に，コンパクト化の境界の幾何学的な性質を研究し，その応用としてボール商の双有理幾何学に関する結果を得た．

本論文において前田氏が得た結果について述べる．L を虚二次体の整数環上のエルミート格子であって，符号が $(1,n)$　$(n>2)$ であるものとする．D_L を L に付随するエルミート対称領域とする．数論的部分群 $\Gamma\subset \mathrm{U}(L)(\mathbb{Q})$ に対し，ボール商 $\mathscr{F}_L(\Gamma):=D_L/\Gamma$ は複素数体 $\mathbb{C}$ 上の準射影的な代数多様体の構造を持つことが知られている．$\mathscr{F}_L(\Gamma)$ のトロイダルコンパクト化の一つを $\overline{\mathscr{F}_L(\Gamma)}$ とおく．前田氏は $\mathscr{F}_L(\Gamma)$ が一般型になるための判定法を証明した．

定理　D_L 上の重さ k，レベル Γ の 0 でない尖点形式 Ψ であって，以下の条件を満たすものが存在すると仮定する:

(1) $D_L\to\mathscr{F}_L(\Gamma)$ の各分岐因子 R_i について，$v_{R_i}(\Psi)/k>(r_i-1)(n+1)$ が成り立つ．ここで，r_i は R_i の分岐指数である．

(2) すべての通常等方的部分格子 $I\subset L$ に対し，$v_I(\Psi)/k>1/(n+1)$ が成り立つ．

(3) すべての指数 m_I の特異等方的部分格子 $I\subset L$ に対し，$v_I(\Psi)/k>m_I/(n+1)$ が成り立つ．

さらに $n\geq\max_{i,I}\{r_i-2,\ m_I-1\}$ が成り立ち，トロイダルコンパクト化 $\overline{\mathscr{F}_L(\Gamma)}$ は高々標準特異点しか持たないと仮定する．このとき，ボール商 $\mathscr{F}_L(\Gamma)$ は一般型の代数多様体である．

この結果は Gritsenko–Hulek–Sankaran および馬氏による直交群の場合の low slope cusp form trick のユニタリ類似である．前田氏は，この定理の証明のために，ボール商の場合に「特異カスプ」と呼ばれる通常のカスプとは異なる振る舞いをするカスプを定義し，その性質を研究した．また，馬氏により研究されていた直交型の志村多様体上の特異カスプとの関係も研究した．

さらに，前田氏は，エルミート格子に関するある条件の下で，直線束 $a\mathscr{L}-B$ が巨大であることを示した．ここで a は $1\leq a\leq n$ を満たす整数であり，$\mathscr{L}$ は重さ 1 の保型形式に対応する直線束である．因子 B は，写像 $D_L\to\mathscr{F}_L(\Gamma)$ の分岐

因子を標準係数付きで足しあげたものである．この結果の証明には Hirzebruch の比例性定理と Prasad の体積公式が用いられる．系として，もしレベル Γ の 0 でない尖点形式であって重さ $n+1$ 未満のものが存在すれば，n が十分大きいか，または，虚二次体の判別式の絶対値が十分大きい場合に，ボール商 $\mathscr{F}_L(\Gamma)$ が一般型の代数多様体であることが示される．直交群上の鏡映的保型形式の有限性に関する Gritsenko–Nikulin の予想のユニタリ類似も示される．

これら以外にも，前田氏は，モジュラー多様体の双有理幾何学に関する結果をいくつか得ている．前田氏は，一般のモジュラー多様体 $X := D/\Gamma$ について，スロープ $s(X)$ を持つ特殊鏡映的保型形式が存在するという仮定の下で，Baily–Borel コンパクト化 $\overline{X}^{\mathrm{BB}}$ の双有理幾何学的な分類が次のように与えられることを示した（尾高悠志氏との共同研究）．

(1) $s(X) > 1$ なら，$\overline{X}^{\mathrm{BB}}$ は Fano 多様体である．

(2) $s(X) = 1$ なら，$\overline{X}^{\mathrm{BB}}$ は Calabi–Yau 多様体である．

(3) $s(X) < 1$ なら，標準因子 K_{BB} は豊富である．

この結果の証明には Hirzebruch の比例性原理が用いられる．系として，対数的 Enriques 曲面のモジュライ空間が Fano 多様体であることが示される．

前田氏は，射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の 8 点のモジュライ空間の双有理幾何学の研究も行っている．$\mathcal{M}^{\mathrm{GIT}}$ を $\mathbb{P}^1$ 上の順序の無い 8 点のモジュライ空間の GIT 商とする．Deligne–Mostow 理論により，$\mathcal{M}^{\mathrm{GIT}}$ は，ある 5 次元ボール商の Baily–Borel コンパクト化 $\overline{\mathbb{B}^5/\Gamma}^{\mathrm{BB}}$ と同型になる．Deligne–Mostow による同型を $\phi\colon \mathcal{M}^{\mathrm{GIT}} \cong \overline{\mathbb{B}^5/\Gamma}^{\mathrm{BB}}$ で表す．同型 ϕ が両辺のブローアップの間の同型に持ち上がるかを調べることは，興味深い問題である．GIT 商には Kirwan ブローアップと呼ばれるブローアップ $\mathcal{M}^{\mathrm{K}} \to \mathcal{M}^{\mathrm{GIT}}$ が存在する．一方，Baily–Borel コンパクト化には，トロイダルコンパクト化の理論によるブローアップ $\overline{\mathbb{B}^5/\Gamma}^{\mathrm{tor}} \to \overline{\mathbb{B}^5/\Gamma}^{\mathrm{BB}}$ が存在する．前田氏は，同型 ϕ が，Kirwan ブローアップ $\mathcal{M}^{\mathrm{K}}$ とトロイダルコンパクト化 $\overline{\mathbb{B}^5/\Gamma}^{\mathrm{tor}}$ の間の射には持ち上がらないことを示した（Klaus Hulek 氏との共同研究）．さらに，$\mathcal{M}^{\mathrm{K}}$ と $\overline{\mathbb{B}^5/\Gamma}^{\mathrm{tor}}$ が K-同値ではないことを示し，特にこれらの多様体は同型ではないことが従う．

さらに，前田氏は，ユニタリ群に伴う志村多様体上の代数的サイクルの研究も行った．志村多様体上の特殊サイクルの生成する母関数が保型性を持つことが Kudla，Kudla–Millson，Yuan–Zhang–Zhang らによって研究されており，Kudla プログラムあるいは Kudla 予想と呼ばれている．前田氏は，Beilinson–Bloch 予想の仮定の下で，直交型およびユニタリ型の志村多様体に対する Chow 群係数版 Kudla 予想を解決した．直交群の場合は，Lie 環のコホモロジーを計算し，Beilinson–Bloch 予想を用いて Kudla–Millson によるコホモロジー係数の場合に帰着させる．ユニタリ群の場合は，総実体上のテータリフトや直交群の場合の結果を用いる．

以上が本論文の主要結果である．

（ 続紙　2）

（論文審査の結果の要旨）

エルミート対称領域の算術商として得られるモジュラー多様体は，代数幾何学や数論において深く研究されている重要な研究対象である．また，モジュラー多様体上の直線束の切断は保型形式と関係しており，多くの先行研究がある．しかし，モジュラー多様体の双有理幾何学的な性質については，まだ分かっていないことも多い．本論文において，前田氏は，ユニタリ群 $\mathrm{U}(1,n)$ に伴うモジュラー多様体であるボール商について，その双有理幾何学的な性質と保型形式との関係の研究を行い，いくつかの結果を証明した．

まず，前田氏は，ボール商の場合に「特異カスプ」と呼ばれる通常のカスプとは異なる振る舞いをするカスプを定義し，その性質を研究した．そして，もし写像 $D_L \to \mathscr{F}_L(\Gamma) \coloneqq D_L/\Gamma$ の各分岐因子において十分大きな位数の零点を持つ尖点形式が存在すれば，ボール商 $\mathscr{F}_L(\Gamma)$ が一般型の代数多様体になることを証明した．この結果は，Gritsenko–Hulek–Sankaran および馬氏により直交群の場合に得られていた low slope cusp form trick と呼ばれる判定法のユニタリ類似である．さらに，エルミート格子に関するある条件の下で，もし重さが十分に小さい 0 でない尖点形式が存在すれば，ユニタリ群のサイズが十分大きいか，または，虚二次体の判別式の絶対値が十分大きい場合に，ボール商 $\mathscr{F}_L(\Gamma)$ が一般型の代数多様体になることを証明した．

これら以外にも，前田氏は，モジュラー多様体についていくつかの興味深い結果を得ている．一般のモジュラー多様体 $X \coloneqq D/\Gamma$ について，スロープ $s(X)$ を持つ特殊鏡映的保型形式が存在するという仮定の下で，スロープ $s(X)$ と Baily–Borel コンパクト化 $\overline{X}^{\mathrm{BB}}$ の双有理幾何学的な分類との関係を与えた（尾高悠志氏との共同研究）．射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の順序の無い 8 点のモジュライ空間とボール商の関係は Deligne–Mostow により研究されていた．前田氏は，Deligne–Mostow 理論から得られる同型が GIT 商の Kirwan ブローアップとボール商のトロイダルコンパクト化の間の射には持ち上がらないことを示した（Klaus Hulek 氏との共同研究）．また，前田氏は，志村多様体上の特殊サイクルの生成する母関数が保型性を持つという Kudla 予想の研究も行っている．前田氏は，Beilinson–Bloch 予想の仮定の下で，直交型およびユニタリ型の志村多様体に対する Chow 群係数版の Kudla 予想を解決した．

これらの結果は，代数幾何学および数論の双方において非自明なものであり，今後の研究において重要な役割を果たすことが期待される．

よって，本論文は博士 (理学) の学位論文として価値あるものと認める．また，論文内容とそれに関連した事項について令和 4 年 12 月 19 日に試問を行った結果，全調査委員の一致で合格と認めた．

要旨公開可能日：　　　　年　　　月