

(続紙 1)

京都大学	博士 (理学)	氏名	宮永 潤
論文題目	Limit theorems of persistence diagrams for random cubical filtrations (ランダム方体複体フィルトレーションのパーシステント図に対する極限定理)		
(論文内容の要旨)			
<p>本学位論文では、ランダムな幾何学的対象に対して定まるパーシステントベッチ数やパーシステント図に関する各種極限定理を考察している。特にユークリッド空間に実現される方体複体とよばれるクラスに対して、そのランダム性がこれらの位相的不変量にどのように影響するかを、大数の法則および大偏差原理の観点から研究をおこなっている。</p> <p>まず本学位論文の背景としてパーシステントホモロジーについて簡単に説明を与える。近年、膨大かつ複雑なデータに対する解析手法の一つとしてトポロジカルデータ解析と呼ばれる分野の研究が活発に行われている。そこでは実験観測等で得られる高次元画像データや空間点列データに対してトポロジカルな不変量をデータ記述子として与え、従来法では困難であったデータの大域的な構造解析を行うことを可能としている。その代表的な方法の一つが本学位論文で扱うパーシステントホモロジーであり、その不変量としてパーシステント図が定まることになる。つまりデータ解析の現場では、データのパーシステント図を計算することを通じて、データに埋め込まれた幾何学的な構造を記述でき、それらの構造に関する特徴抽出や比較などが可能になる。一方で、通常データには観測誤差やノイズに相当するランダム性が付加されており、ここで説明したパーシステント図にランダム性が誘導されることになる。よってパーシステント図がデータのランダム性によってどのように振る舞うかを確率論的に考察することは、パーシステント図のデータ記述子としての性能を議論する上で極めて重要になる。本学位論文はこのようなデータ解析に関する応用研究から動機づけられたテーマについて、確率論的極限定理の側面から数学的にアプローチする位置付けになっている。また、この例にあるように位相的不変量の確率論的振る舞いを調べる分野はランダムトポロジーとして近年活発に研究されているが、本研究はランダムトポロジーの発展に貢献する研究となっている。</p> <p>本学位論文は6つの章で構成されている。まず1章では上述したようなデータ解析の立場から見た本研究の位置付けや、ランダムトポロジーにおいて本研究と関連するこれまでの一連の研究をサーベイしている。特に後者については、近年様々な確率的モデルについて極限定理が示されており、その全体像を知り、本研究の位置付けを正確に理解する上で大切になる。その後、1.2節において本学位論文で得られた主結果 (Theorem 1.2.1, Theorem 1.2.5, Theorem 1,2,8, Theorem 1.2.9) が示されている。大きく分けて主張は大数の法則と大偏差原理に関するものであり、それぞれについてパーシステントベッチ数およびパーシステント図に関するものから構成されている。これらの定理の証明は2章以降に示されるが、1章だけでも背景と主結果が十分理解できる形で執筆されている。またTheorem 1.2.3には中心極限定理が示されている。この結果は宮永氏の修士論文における主結果であり、博士学位論文として極限定理を包括的に議論する上で必要と判断し掲載している。</p> <p>次に2章では本学位論文で重要になる概念が、幾つかの性質とともに紹介されている。まず方体複体、パーシステントホモロジー、パーシステント図などを導入したのちに、本研究の考察対象となる確率モデルとしてランダム方体複体フィルトレーショ</p>			

ンの定義が与えられている．特に，上述した4つの主結果すべてに共通して課される仮定としてAssumption 2.1.6とAssumption 2.1.7が説明されている．前者はユークリッド空間上の確率モデルの設定でよく扱われる定常性に関するものであり，後者は基本方体の出現が局所的な相関だけであることを課している．さらに2.2節では大偏差原理について，その定義や幾つかのバリエーションについて紹介されている．

3章は大偏差原理に関する主結果の証明で必要になる主張を，ランダム方体複体フィルトレーションに限らないより一般的な設定で紹介している．ここでは \mathbf{R}^h に値を取る確率過程 $\{S^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ を扱うが，以後の議論で大切になる概念としてexponentially r -nearly additive性 (Definition 3.1.1) およびexponentially regular性 (Definition 3.1.3) がまず導入されている．これら二つの仮定，および対数モーメント生成関数の有界性に関する条件から，大偏差原理が導かれることがTheorem 3.1.4で示されている．背景としてはSeppäläinen & Yukich(2001)の結果で $h = 1, r = 0$ の場合に同様の結果が得られていたが，それを拡張することに成功し主結果の導出につなげている．この定理およびこれから導かれるCorollary 3.1.7が4章の証明で中心的役割を果たすことになる．

4章では主結果のなかでもパーシステントベッチ数に対する大数の法則 (Theorem 1.2.1) と大偏差原理 (Theorem 1.2.8) が証明されている．その方針はCorollary 3.1.7の主張で必要な対数モーメント生成関数の有界性，exponentially r -nearly additive性，およびexponentially regular性を示すことである．証明の構成としては，まず本論文で考察対象としている方体複体フィルトレーションに関する性質としてパーシステントベッチ数やその差を基本方体の数で上から抑える幾つかの評価を与えている．これらの評価，Assumption 2.1.6，およびAssumption 2.1.7を用いて上記3項目を確かめることは，比較的容易に示される．

5章では残りの主結果であるパーシステント図に対する大数の法則 (Theorem 1.2.5) と大偏差原理 (Theorem 1.2.9) の証明が与えられている．その基本的なアイデアは，Theorem 1.2.1とTheorem 1.2.8で示されたパーシステントベッチ数に対するそれぞれの主張を，パーシステント図に持ち上げることである．つまりパーシステント図を $\Delta \subset \mathbf{R}^2$ 上の数え上げ測度とみなし，パーシステントベッチ数に対する主張を Δ 上のラドン測度の空間 $M(\Delta)$ での主張に一般化するのである．歴史的には，このような証明法はHiraoka, Shirai, Trinh (2018)において異なるモデルに対する大数の法則の証明ですでに導入されており，本学位論文でも同じ方針で証明が試みられている．実際に大数の法則に関してはHiraoka et al. の論文とほぼ同じ議論で証明を展開することが可能である．一方でパーシステント図の大偏差原理については本質的に新しいアイデアが取り込まれている．ここでは $M(\Delta)$ 上に拡張する前に，パーシステント図の単関数近似に相当するヒストグラムと呼ばれるクラスで大偏差原理が成り立つことが示されている．次にこのヒストグラムの解像度を細かくして得られる射影極限上で大偏差原理が成り立つことをDawson-Gärtnerの定理により確認し，さらにRiesz-Markov-Kakutaniの表現定理を用いてラドン測度の空間 $M(\Delta)$ で大偏差原理が成立することを示すことでTheorem 1.2.9の証明が完結する．

最後に6章では本学位論文で考察した内容に関連した幾つかの話題が紹介されている．また技術的な部分や既存の結果などはAppendixにまとめられている．

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

以上の学位論文の内容に関して調査委員による審査が行われ、結果の新規性、正当性、重要性が認められた。特に本学位論文で得られた主結果 (Theorem 1.2.1, Theorem 1.2.5, Theorem 1, 2, 8, Theorem 1.2.9) について、数学的な内容に問題がないことが確認された。大数の法則および大偏差原理をパーシステントベッチ数とパーシステント図のそれぞれで示しており、学術的価値が高いことも確認した。パーシステントベッチ数で成立する大偏差原理をパーシステント図に一般化するには、まずパーシステントベッチ数からつくられる有限次元ベクトル空間へ拡張する必要があるが、その際導入した概念であるexponentially r -nearly additive性 (Definition 3.1.1) およびexponentially regular性 (Definition 3.1.3) を用いた大偏差原理は、今後パーシステントホモロジーに限らずより幅広い応用が可能な結果だと思われる。また最終的にパーシステント図に対する大偏差原理を射影極限を介して証明する手法も、これまでのランダムトポロジーの研究分野には無い新たなアイデアに基づいており、今後同様の方法でパーシステント図の性質が測度論的に研究されることが期待される。

また、令和5年2月1日、論文内容とそれに関連した事項について試問が行われた。調査委員からは、先行研究との詳細な比較、本学位論文で用いられた証明法が適用できる理由、エルゴード性の仮定の下での困難な点、および本研究に関する将来の方向性などについて質問が出された。宮永氏からはそれら全てに対して的確な回答が与えられ、口頭試問についても合格を与えられると判断した。

以上より、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと判断し、結果、合格と認めた。

要旨公表可能日： 年 月 日以降